

Zeitschrift:	L'Enseignement Mathématique
Herausgeber:	Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band:	1 (1955)
Heft:	1-2-3: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE
 Artikel:	 SUR LES CRITÈRES DE CONVERGENCE ET DIVERGENCE DUS À V. ERMAKOF
Autor:	Ostrowski, A.
Kapitel:	VI. Le critère B d'Ermakof et les critères de première espèce.
DOI:	https://doi.org/10.5169/seals-31365

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 20.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

$$\frac{f(\Psi(x)) \Psi'(x)}{f(x)} \geq 1 ,$$

la série

$$\sum_{\nu}^{\infty} f(\nu)$$

est divergente.

- b) Si $f(x)$ est mesurable et positive à partir d'un x et reste uniformément borné dans chaque sous-intervalle fini de l'intervalle de définition de $f(x)$ et s'il existe un nombre δ , $0 < \delta < 1$, tel qu'à partir d'un x ,

$$\frac{f(\Psi(x)) \Psi'(x)}{f(x)} \leq \delta , \quad 0 < \delta < 1 ,$$

la série

$$\sum_{\nu}^{\infty} f(\nu)$$

est convergente.

VI. Le critère B d'Ermakof et les critères de première espèce.

Quelle est la portée du critère B d'Ermakof comparée à celle des critères connus ? On trouve souvent l'assertion que le critère B d'Ermakof (avec $\Psi(x) = e^x$) « embrasse » tous les critères de la série logarithmique de MORGAN-BERTRAND. Or ceci n'est vrai qu'en partie.

Si l'on considère les critères de première espèce dans lesquels a_ν est comparé avec différentes fonctions de l'index ν , le critère B d'Ermakof n'est pas même plus efficace que le critère de Cauchy portant sur $\sqrt[\nu]{a_\nu}$.

En effet, nous allons construire une fonction $f(x)$ positive, continue, non croissante et tendant vers 0 avec $x \rightarrow \infty$, telle que l'on a

$$f(x) \leq e^{-x} \quad (x \geq 1) , \tag{VI, 1}$$

$$\frac{f(e^{x_\nu}) e^{x_\nu}}{f(x_\nu)} \rightarrow \infty \quad (x \rightarrow \infty) \tag{VI, 2}$$

pour une suite x_ν tendant vers l'infini. Alors la série $\sum_{\nu=1}^{\infty} f(\nu)$ est

convergente et le critère de Cauchy sur $\sqrt[n]{a_n}$ est applicable tandis que le critère du théorème B ne s'applique pas.

Posons à cet effet

$$x_1 = 1, \dots, x_{n+1} = e^{x_n} + 1 \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Définissons $f(x)$ dans l'intervalle $\langle x_n, e^{x_n} \rangle$ par

$$f(x) = e^{-x_{n+1}} \quad (x_n \leq x \leq e^{x_n}).$$

Quant à l'intervalle de longueur un entre e^{x_n} et $x_{n+1} = e^{x_n} + 1$, la fonction $f(x)$ y est définie comme fonction linéaire et *continue* dans tout l'intervalle fermé $\langle e^{x_n}, x_{n+1} \rangle$:

$$f(e^{x_n} + t) = t \cdot e^{-x_{n+2}} + (1 - t) e^{-x_{n+1}} \quad (0 \leq t \leq 1).$$

Alors $f(x)$ sera positive, continue et non croissante. Pour tout x de l'intervalle $\langle x_n, x_{n+1} \rangle$ elle est au plus égale à

$$f(x_n) = e^{-x_{n+1}} \leq e^{-x},$$

d'où (VI, 1).

D'autre part, on a d'après la définition de $f(x)$ pour $n \rightarrow \infty$

$$f(e^{x_n}) = f(x_n), \quad \frac{f(e^{x_n}) e^{x_n}}{f(x_n)} = e^{x_n} \rightarrow \infty,$$

c'est-à-dire (VI, 2).

Nous montrerons dans la section suivante qu'il n'en est plus de même pour les critères de seconde espèce portant sur le quotient $\frac{a_{n+1}}{a_n}$.

Nous allons d'abord faire quelques observations sur les séries de MORGAN-BERTRAND. Nous désignerons par $\lg_k x$ ($k = 1, 2, \dots$) la k -ième itérée du $\lg x$, c'est-à-dire

$$\lg_0 x = x, \quad \lg_1 x = \lg x, \dots, \quad \lg_{n+1} x = \lg(\lg_n x), \dots \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (\text{VI, 1})$$

En plus, nous poserons

$$L_0(x) = 1, \quad L_1(x) = \frac{1}{x}, \quad \dots, \quad L_{n+1}(x) = \frac{1}{x \lg x \dots \lg_n x}, \dots \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (\text{VI, 2})$$

Les séries de MORGAN-BERTRAND ont alors la forme

$$\sum_{v \geq v_0}^{\infty} \frac{L_n(v)}{\lg_n^{1+s} v} \quad (\text{VI, 3})$$

et sont convergentes pour $s > 0$ et divergentes pour $s \leq 0$.

On a évidemment

$$L_n(e^x) = e^{-x} L_n(x) \lg_{n-1} x \quad (n = 1, 2, \dots), \quad (\text{VI, 4})$$

donc, en posant $\varphi(x) = \frac{L_n(x)}{\lg_n^{1+s} x}$:

$$\frac{\varphi(e^x) e^x}{\varphi(x)} = \frac{\lg_n^{1+s} x}{\lg_{n-1}^s x}. \quad (\text{VI, 5})$$

Or, pour $x \rightarrow \infty$, cette expression tend vers ∞ pour $s \leq 0$, et vers 0 pour $s > 0$. On voit que le critère B d'Ermakof avec $\Psi(x) = e^x$ permet de décider immédiatement la question de la convergence ou divergence des séries de MORGAN-BERTRAND.

Quel sera le résultat si l'on pose $\Psi(x) = x^k$ ($k > 1$) ? On a évidemment les relations

$$k x^{k-1} L_2(x^k) = L_2(x), \quad \lg_2(x^k) = \left(1 + \frac{\lg k}{\lg_2 x}\right) \lg_2 x,$$

donc

$$\frac{L_2(x^k) k x^{k-1}}{\lg_2^{1+s}(x^k)} \Big/ \frac{L_2(x)}{\lg_2^{1+s} x} = \left(1 + \frac{\lg k}{\lg_2 x}\right)^{-1-s}. \quad (\text{VI, 6})$$

(VI, 6) tend vers un pour $x \rightarrow \infty$, de sorte que le critère B de convergence pour $s > 0$ est en défaut pour les séries de MORGAN-BERTRAND correspondant à $n = 2$. (VI, 6) est < 1 pour $s > -1$ et n'est ≥ 1 que pour $s \leq -1$. Le critère B d'Ermakof ne permet donc de prouver la divergence des séries de MORGAN-BERTRAND correspondant à $n = 2$ que pour $s \leq -1$. D'autre part, il résulte immédiatement des relations

$$\frac{k x^{k-1} x^{1+s}}{x^{k(1+s)}} = k x^{-s(k-1)}, \quad \frac{k x^{k-1} x (\lg x)^{1+s}}{x^k (k \lg x)^{1+s}} = k^{-s}$$

que pour $n = 0$ et $n = 1$ la question de la convergence (ou divergence) des séries de MORGAN-BERTRAND est complètement résolue par le critère B d'Ermakof avec $\Psi(x) = x^k$ ($k > 1$).

VII. Le critère B d'Ermakof et les critères de seconde espèce.

Les critères de seconde espèce reposent sur le fait que si l'on a

$$\frac{a_{v+1}}{a_v} \leq \frac{c_{v+1}}{c_v} \quad (a_v, c_v > 0 ; v = 1, 2, \dots),$$

la convergence de $\sum c_v$ entraîne celle de $\sum a_v$, donc la divergence de $\sum a_v$ entraîne la divergence de $\sum c_v$. On obtient les différentes formes de ce critère par un choix convenable des « séries de comparaison »: la série convergente $\sum c_v$ ou la série divergente $\sum a_v$.

Or si les a_v et les c_v convergent vers 0 en décroissant, le principe suivant est « en général » valable:

Si la convergence de la série de comparaison $\sum c_v$ s'obtient au moyen d'un critère B d'Ermakof avec la fonction conjuguée $\Psi(x)$, le même critère d'Ermakof assure directement la convergence de $\sum a_v$. Si la divergence de la série $\sum a_v$ s'obtient au moyen d'un critère B d'Ermakof, ce même critère assure aussi la divergence de $\sum c_v$.

Toutefois, pour les énoncés précis, il faut utiliser des hypothèses supplémentaires. Nous dirons d'une fonction $f(x)$ non nulle à partir d'un x , qu'elle possède la propriété E si l'on a

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x + \theta)}{f(x)} = 1 \quad (\text{VII, 1})$$

uniformément par rapport à θ pour $|\theta| \leq 1$.

Avec cette notion, nous allons démontrer le lemme suivant:

Lemme. — Soient $f(x)$ et $g(x)$ deux fonctions positives pour $x \geq x_0$, dont l'une au moins jouit de la propriété E, tandis que l'autre est ou bien non croissante, ou bien jouit de la propriété E. Soient $\Psi(x)$, $\Phi(x)$ deux fonctions positives pour $x \geq x_0$ avec $\Psi(x) \geq x + 1$. Alors si l'on a pour tout entier $v \geq n_0$: