

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 1 (1955)
Heft: 1-2-3: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LES CRITÈRES DE CONVERGENCE ET DIVERGENCE DUS À
V. ERMAKOF
Autor: Ostrowski, A.
Kapitel: V. Enoncé du résultat obtenu.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-31365>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 23.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Or, en vertu de (IV, 5), on obtient

$$\varphi'_+(\nu) \geq \Psi_0^{-\mu} \int_{\nu-1}^{\nu} \varphi'_+(x) dx,$$

et la divergence de la série (II, 4) résulte de celle de l'intégrale (IV, 1). D'autre part on a, en vertu de (IV, 6),

$$\frac{\varphi'_+(\nu)}{\varphi(\nu)^2} \leq \frac{\Psi_0^{\mu} \varphi'_+(x)}{(\varphi(x) - \mu - 1)^2} \quad (\nu \leq x \leq \nu + 1),$$

dès que $\varphi(x) \geq 2\mu + 2$, donc

$$\frac{\varphi'_+(\nu)}{\varphi(\nu)^2} \leq 4 \Psi_0^{\mu} \frac{\varphi'_+(x)}{\varphi(x)^2} \quad (\nu \leq x \leq \nu + 1, \quad \varphi(x) \geq 2\mu + 2),$$

$$\frac{\varphi'_+(\nu)}{\varphi(\nu)^2} \leq 4 \Psi_0^{\mu} \int_{\nu}^{\nu+1} \frac{\varphi'_+(x)}{\varphi(x)^2} dx \quad (\varphi(\nu) \geq 2\mu + 2),$$

et la convergence de la série (II, 5) résulte de celle de l'intégrale (IV, 2).

V. Énoncé du résultat obtenu.

En rassemblant nos résultats nous avons le théorème suivant:

C. Soit $\Psi(x)$ une fonction de x continue, possédant une dérivée positive et continue pour $x \geq a_0$ et telle que l'on ait

$$\Psi(x) > x \quad (x \geq a_0).$$

Supposons que $\Psi'(x)$ satisfait à l'une des deux conditions suivantes: ou bien $\Psi'(x)$ ne décroît pas à partir d'un x et atteint ou dépasse la valeur un: ou bien $\Psi'(x)$ ne croît pas à partir d'un x . Alors:

a) Si $f(x)$ est positive à partir d'un x et est sommable tandis que $\frac{1}{f(x)}$ reste uniformément borné dans chaque sous-intervalle fini de l'intervalle de définition de $f(x)$ et si l'on a à partir d'un x

$$\frac{f(\Psi(x)) \Psi'(x)}{f(x)} \geq 1,$$

la série

$$\sum_v^{\infty} f(v)$$

est divergente.

- b) Si $f(x)$ est mesurable et positive à partir d'un x et reste uniformément borné dans chaque sous-intervalle fini de l'intervalle de définition de $f(x)$ et s'il existe un nombre δ , $0 < \delta < 1$, tel qu'à partir d'un x ,

$$\frac{f(\Psi(x)) \Psi'(x)}{f(x)} \leq \delta, \quad 0 < \delta < 1,$$

la série

$$\sum_v^{\infty} f(v)$$

est convergente.

VI. Le critère B d'Ermakof et les critères de première espèce.

Quelle est la portée du critère B d'Ermakof comparée à celle des critères connus ? On trouve souvent l'assertion que le critère B d'Ermakof (avec $\Psi(x) = e^x$) « embrasse » tous les critères de la série logarithmique de MORGAN-BERTRAND. Or ceci n'est vrai qu'en partie.

Si l'on considère les critères de première espèce dans lesquels a_v est comparé avec différentes fonctions de l'index v , le critère B d'Ermakof n'est pas même plus efficace que le critère de Cauchy portant sur $\sqrt[v]{a_v}$.

En effet, nous allons construire une fonction $f(x)$ positive, continue, non croissante et tendant vers 0 avec $x \rightarrow \infty$, telle que l'on a

$$f(x) \leq e^{-x} \quad (x \geq 1), \quad (\text{VI}, 1)$$

$$\frac{f(e^{x_v}) e^{x_v}}{f(x_v)} \rightarrow \infty \quad (x \rightarrow \infty) \quad (\text{VI}, 2)$$

pour une suite x_v tendant vers l'infini. Alors la série $\sum_{v=1}^{\infty} f(v)$ est