Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 1 (1955)

Heft: 1-2-3: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LES CRITÈRES DE CONVERGENCE ET DIVERGENCE DUS À V. ERMAKOF

Autor: Ostrowski, A.

Kapitel: V. Enoncé du résultat obtenu.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-31365

Or, en vertu de (IV, 5), on obtient

$$\varphi_+'(\nu) \geqq \Psi_0'^{-\mu} \int_{\nu-1}^{\nu} \varphi_+'(x)\,dx\,,$$

et la divergence de la série (II, 4) résulte de celle de l'intégrale (IV, 1). D'autre part on a, en vertu de (IV, 6),

$$\frac{\varphi_+'(\nu)}{\varphi(\nu)^2} \leqq \frac{\Psi_0'^{\mu}\,\varphi_+'(x)}{(\varphi(x) - \mu - 1)^2} \qquad (\nu \leqq x \leqq \nu + 1)\,,$$

dès que $\varphi(x) \geqq 2\mu + 2$, donc

$$\frac{\varphi_+'(\nu)}{\varphi(\nu)^2} \leqq 4\,\Psi_0'^{\mu}\,\frac{\varphi_+'(x)}{\varphi(x)^2} \qquad (\nu \leqq x \leqq \nu + 1\,,\quad \varphi(x) \geqq 2\mu + 2)\,,$$

$$\frac{\varphi_+'(\nu)}{\varphi(\nu)^2} \leqq 4\,\Psi_0'^{\mu} \int_{\nu}^{\nu+1} \frac{\varphi_+'(x)}{\varphi(x)^2}\,dx \qquad (\varphi(\nu) \geqq 2\mu + 2)\,,$$

et la convergence de la série (II, 5) résulte de celle de l'intégrale (IV, 2).

V. Enoncé du résultat obtenu.

En rassemblant nos résultats nous avons le théorème suivant:

C. *Soit* $\Psi(x)$ *une fonction de* x *continue, possédant une dérivée positive et continue pour* $x \geqq a_0$ *et telle que l'on ait*

$$\Psi(x) > x \qquad (x \geqq a_0)\,.$$

Supposons que $\Psi'(x)$ *satisfait à l'une des deux conditions suivantes: ou bien* $\Psi'(x)$ *ne décroît pas à partir d'un* x *et atteint ou dépasse la valeur* un: *ou bien* $\Psi'(x)$ *ne croît pas à partir d'un* x. *Alors:*

a) *Si* $f(x)$ *est positive à partir d'un* x *et est sommable tandis que* $\frac{1}{f(x)}$ *reste uniformément borné dans chaque sous-intervalle fini de l'intervalle de définition de* $f(x)$ *et si l'on a à partir d'un* x

$$\frac{f(\Psi(x))\,\Psi'(x)}{f(x)} \geqq 1\,,$$

la série

$$\sum_{\nu}^{\infty} f(\nu)$$

est divergente.

b) *Si* f (x) *est mesurable et positive à partir d'un* x *et reste uniformément borné dans chaque sous-intervalle fini de l'intervalle de définition de* f (x) *et s'il existe un nombre* δ, $0 < \delta < 1$, *tel qu'à partir d'un* x,

$$\frac{f(\Psi(x))\,\Psi'(x)}{f(x)} \leqq \delta\,, \qquad 0 < \delta < 1\,,$$

la série

$$\sum_{\nu}^{\infty} f(\nu)$$

est convergente.

VI. Le critère B d'Ermakof et les critères de première espèce.

Quelle est la portée du critère B d'Ermakof comparée à celle des critères connus ? On trouve souvent l'assertion que le critère B d'Ermakof (avec $\Psi(x) = e^x$) « embrasse » tous les critères de la série logarithmique de Morgan-Bertrand. Or ceci n'est vrai qu'en partie.

Si l'on considère *les critères de première espèce* dans lesquels a_ν est comparé avec différentes fonctions de l'index ν, le critère B d'Ermakof n'est pas même plus efficace que le critère de Cauchy portant sur $\sqrt[\nu]{a_\nu}$.

En effet, nous allons construire une fonction $f(x)$ positive, continue, non croissante et tendant vers 0 avec $x \longrightarrow \infty$, telle que l'on a

$$f(x) \leqq e^{-x} \qquad (x \geqq 1)\,, \tag{VI, 1}$$

$$\frac{f\left(e^{x_\nu}\right) e^{x_\nu}}{f(x_\nu)} \longrightarrow \infty \qquad (x \longrightarrow \infty) \tag{VI, 2}$$

pour une suite x_ν tendant vers l'infini. Alors la série $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} f(\nu)$ est