

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 1 (1955)  
**Heft:** 1-2-3: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** SUR LES CRITÈRES DE CONVERGENCE ET DIVERGENCE DUS À  
V. ERMAKOF  
**Autor:** Ostrowski, A.  
**Kapitel:** I. Introduction.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-31365>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 27.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

77.521.2

# SUR LES CRITÈRES DE CONVERGENCE ET DIVERGENCE DUS À V. ERMAKOF

*A Trygve Nagell à l'occasion de son 60<sup>e</sup> anniversaire*

PAR

A. OSTROWSKI (Bâle)

---

## I. Introduction.

V. ERMAKOF a découvert, il y a quatre-vingt-cinq ans, une classe très remarquable de critères de convergence et de divergence de séries<sup>1</sup>. Ces critères, extrêmement sensibles, ne sont guère connus et l'on trouve généralement des indications peu exactes sur leur portée. Nous nous proposons ici de préciser les démonstrations des différents critères d'Ermakof et de mettre au point certaines considérations sur leur portée.

Avant d'indiquer le contenu des sections suivantes de cet article, nous donnons une démonstration très simple et rapide du critère d'Ermakof dans un cas très important.

A. Soit  $f(x)$  une fonction non négative et mesurable pour  $x \geq a_0$ . Soient  $\Psi(x)$  et  $\psi(x)$  deux fonctions définies pour  $x \geq a$  et telles que l'on ait

$$\Psi(x) \geq \psi(x) \geq a_0 \quad (x \geq a), \quad \psi(x) \rightarrow \infty \quad (x \rightarrow \infty), \quad (\text{I}, 1)$$

---

<sup>1</sup> I. V. ERMAKOF, Caractère de convergence de séries. *Bull. d. Sciences mathématiques et astronomiques*, 1871, II, pp. 250-256;

II. V. ERMAKOF, Extrait d'une lettre adressée à A. M. Houël, *l. c.*, 1883, (II) VII, pp. 142-144.

Ces notes sont indiquées dans le texte par E.I, resp. E.II.

Il existe encore des communications d'Ermakof sur cette question publiées en russe, que nous étions malheureusement hors d'état de nous procurer. De même, il nous a été impossible de nous procurer une dissertation pour le grade de magistère de BOUGAÏEF intitulée *Convergence des séries infinies, d'après leur forme extérieure*, publiée en russe et citée par Ermakof dans E.I.

$\psi(x)$  étant non décroissante à partir de  $a$ , tandis que chaque intervalle  $\langle a, A \rangle$  consiste en un nombre fini d'intervalles de monotonie de  $\Psi(x)$ . Alors, si l'on a pour presque chaque  $x \geq a$  et un  $q > 0$  inférieur à 1 :

$$f(\Psi(x)) \Psi'(x) \leq q f(\psi(x)) \psi'(x) \quad (x \geq a), \quad (I, 2)$$

l'intégrale

$$\int_a^\infty f(x) dx \quad (I, 3)$$

est convergente; si l'on a pour presque chaque  $x \geq a$  :

$$f(\Psi(x)) \Psi'(x) \geq f(\psi(x)) \psi'(x) \quad (x \geq a), \quad (I, 4)$$

et s'il existe un  $A \geq a$  tel que  $\Psi(A) > \psi(A)$  et que  $f(x)$  ne s'annule pas presque partout dans l'intervalle  $\langle \psi(A), \Psi(A) \rangle$ , l'intégrale (I, 3) diverge.

Donc en particulier, si  $f(x)$  est décroissante, la série

$$\sum f(v) \quad (I, 5)$$

converge dans le premier cas et diverge dans le second.

En effet, dans le cas (I, 2) on a pour  $x \geq a$  en intégrant de  $a$  à  $x$  :

$$\int_a^x f(\Psi(x)) \Psi'(x) dx \leq q \int_a^x f(\psi(x)) \psi'(x) dx,$$

donc, en introduisant respectivement  $\Psi(x)$ ,  $\psi(x)$  comme nouvelles variables d'intégration <sup>1</sup> :

$$\int_{\Psi(a)}^{\Psi(x)} f(t) dt \leq q \int_{\psi(a)}^{\psi(x)} f(t) dt$$

ou encore

$$(1 - q) \int_{\psi(a)}^{\psi(x)} f(t) dt \leq \int_{\psi(a)}^{\Psi(a)} f(t) dt - \int_{\psi(x)}^{\Psi(x)} f(t) dt.$$

Or, d'après (I, 1), la dernière intégrale est non négative, donc

<sup>1</sup> Ceci est permis sous nos conditions. Cf. par exemple C. CARATHÉODORY, *Vorlesungen über reelle Funktionen*, 1. Auflage, B. G. Teubner, Leipzig, 1918, p. 556.

l'intégrale

$$\int_{\psi(a)}^{\psi(x)} f(t) dt$$

est bornée pour  $x \geq a$ , et puisque  $\psi(x) \rightarrow \infty$ , (I, 3) converge.

Si, au contraire, (I, 4) est satisfaite on obtient de la même façon, en remplaçant  $a$  par  $A$ ,

$$\int_{\Psi(A)}^{\Psi(x)} f(t) dt \geq \int_{\psi(A)}^{\psi(x)} f(t) dt \quad (x \geq A),$$

donc

$$\int_{\psi(x)}^{\Psi(x)} f(t) dt \geq \int_{\psi(A)}^{\Psi(A)} f(t) dt,$$

donc ainsi, pour  $x \geq A$ , l'intégrale de gauche reste supérieure à une constante positive tandis que dans le cas de convergence de (I, 3) cette intégrale devrait tendre vers 0 pour  $x \rightarrow \infty$ . Donc l'intégrale (I, 3) diverge, C.Q.F.D.

Le théorème qui vient d'être démontré se trouve énoncé dans E.I, p. 252, sous une forme un peu moins générale.

Nous allons appeler avec Ermakof une fonction  $\Psi(x)$  positive, croissante, tendant vers l'infini pour  $x \rightarrow \infty$  et à dérivée positive et continue pour  $x \geq a$ , *fonction conjuguée de première espèce*, si elle satisfait pour  $x \geq a$  à l'inégalité

$$\Psi(x) > x$$

et *fonction conjuguée de seconde espèce*, si elle satisfait pour  $x \geq a$  à l'inégalité

$$\Psi(x) < x.$$

Pour désigner une fonction conjuguée de première espèce nous nous bornerons souvent à l'expression: *fonction conjuguée*.

Ermakof énonce le théorème A en supposant que  $\Psi(x)$  est une fonction conjuguée de première espèce et  $\psi(x)$  une fonction conjuguée de seconde espèce <sup>1</sup>.

<sup>1</sup> Actuellement, Ermakof exige de  $\psi(x)$  que cette fonction soit une fonction conjuguée ou bien de première espèce ou bien de seconde espèce, mais satisfaisant à l'inégalité  $\psi(x) < \Psi(x)$ . Mais son raisonnement ne marche pas, si  $\psi(x)$  est supposée de seconde espèce.

En posant soit  $\psi(x) \equiv x$ , soit  $\Psi(x) \equiv x$  on obtient deux énoncés qui ne contiennent qu'une seule fonction conjuguée. D'ailleurs il est facile de voir que les deux énoncés ainsi obtenus et le critère général énoncé par Ermakof sont équivalents entre eux. On pourra donc se borner dans l'étude des énoncés d'Ermakof à la considération du critère suivant :

B. Soit  $f(x)$  une fonction positive et continue et  $\Psi(x)$  une fonction conjuguée de première espèce pour  $x \geq a$ . Alors si l'on a pour une constante  $q$ ,  $0 < q < 1$ , l'inégalité

$$f(\Psi(x)) \Psi'(x) \leq qf(x) \quad (x \geq a), \quad (I, 6)$$

l'intégrale (I, 4) est convergente et si l'on a l'inégalité

$$f(\Psi(x)) \Psi'(x) \geq f(x) \quad (x \geq a), \quad (I, 7)$$

l'intégrale (I, 4) est divergente.

La condition de divergence (I, 7) est satisfaite à fortiori si l'on a pour un nombre positif  $Q > 1$  l'inégalité

$$f(\Psi(x)) \Psi'(x) \geq Qf(x) \quad (x \geq a). \quad (I, 8)$$

Dans ce qui suit nous nous occuperons surtout du théorème B et ne reviendrons à l'énoncé A que dans la dernière section de cette communication.

Notons qu'Ermakof dans E.I énonce B sous une forme encore plus restrictive (il suppose  $f(x)$  décroissante et son critère de divergence est le critère de divergence réduit à la forme (I, 8)) et que sa démonstration dans E.I est loin d'être irréprochable. Mais il suffit d'apporter quelques légères modifications au raisonnement d'Ermakof pour en tirer une démonstration correcte qui se trouve d'ailleurs dans quelques manuels <sup>1</sup>.

Une autre démonstration du théorème B, toujours pour  $f(x)$  décroissante, se trouve dans un mémoire connu de A. PRINGSHEIM <sup>2</sup>, où le théorème B se déduit par un passage à la limite

<sup>1</sup> Cf. par exemple K. KNOPP, *Theorie und Anwendung unendlicher Reihen*, Berlin, 1922, 1. Auflage, pp. 288-290; T. J. I'A. BROMWICH, *An Introduction to the Theory of Infinite Series*, 2nd ed., London, 1931, pp. 43-44.

<sup>2</sup> A. PRINGSHEIM, *Allgemeine Theorie der Divergenz und Convergenz von Reihen mit positiven Gliedern*. *Math. Annalen*, t. 35, 1890, pp. 392-394. Cf. aussi *Mathematical Papers*, Chicago Congress 1893 (1896), pp. 305-329, en particulier p. 324, p. 329, ainsi que l'*Enzyklopädie der Mathematischen Wissenschaften*, I, Teil I, pp. 88-89.

d'un théorème de Pringsheim, obtenu par ce dernier en développant une idée de G. KOHN<sup>1</sup>. Mais, à vrai dire, cette démonstration ne s'applique qu'au cas où la fonction  $\Psi'(x)$  est dérivable *uniformément pour*  $x \geq a_0$  (ce qui est par exemple le cas pour  $\Psi'(x) = e^x$ ) et ne mène dans le cas de divergence qu'au critère (I, 8). Elle a été reproduite par HOBSON<sup>2</sup>.

Une démonstration tout à fait différente du théorème B a été donnée par KORKINE<sup>3</sup>.

Dans toutes ces démonstrations on n'obtient un énoncé portant sur la série infinie (I, 5) que sous l'hypothèse assez restrictive que la fonction  $f(x)$  *décroît*.

Or, Ermakof a publié en 1883 (E.II) une démonstration de son théorème sur les séries infinies qui est restée incomprise et très peu connue. On n'en trouve une mention que chez PRINGSHEIM<sup>4</sup>. Cette démonstration est importante surtout parce que Ermakof évite le passage par l'intégrale (I, 3) et parce qu'elle s'applique aux fonctions positives et continues  $f(x)$  *sans qu'il soit nécessaire de rien supposer sur leur caractère de monotonie*. Donc, en particulier, le critère d'Ermakof sous sa forme la plus connue, celle qui porte sur le quotient

$$\frac{f(e^x) e^x}{f(x)},$$

n'est nullement borné aux séries à termes décroissants. Ce fait n'a pas été remarqué jusqu'à présent<sup>5</sup>.

D'autre part, cette démonstration n'est pas tout à fait complète. Ermakof a bien remarqué qu'une condition supplémentaire doit être imposée à la fonction  $\Psi'(x)$ . Il en dit quelques mots (E.II, p. 142, dans une note au bas de la page) et il y indique la condition qui avec nos notations équivaut à  $\Psi'(a) \geq 1$ ,

<sup>1</sup> G. KOHN, Beiträge zur Theorie der Convergenz unendlicher Reihen. *Archiv der Mathematik und Physik*, **67** (1882), pp. 63-95.

<sup>2</sup> E. W. HOBSON, *The Theory of Functions of a Real Variable and the Theory of Fourier's Series*, 2nd ed., Vol. II, Cambridge, 1926, pp. 33-34.

<sup>3</sup> A. KORKINE, Sur un problème d'interpolation. *Bull. d. sciences mathématiques et astronomiques*, 1882, (II) VI, pp. 228-231.

<sup>4</sup> A. PRINGSHEIM, *l. c.*, p. 393, note \*\* au bas de la page.

<sup>5</sup> En particulier, Pringsheim, en parlant de cette démonstration, dit qu'elle ne s'applique qu'aux fonctions  $f(x)$  décroissantes. (Cf. le second article de Pringsheim, mentionné plus haut, noté au bas de la page, p. 327: « Dies ist der von Herrn Ermakoff ausschliesslich betrachtete Fall ».)

en ajoutant: « C'est la seule condition pour que notre démonstration soit juste. »

Or, il nous semble que cette dernière condition ne suffit pas pour sauver la démonstration d'Ermakof. Une analyse plus détaillée nous a permis de rendre cette démonstration correcte en utilisant l'une des deux hypothèses suivantes:

- α)  $\Psi'(x)$  ne décroît pas à partir d'un  $x$  et devient égale ou supérieure à  $un$ ;
- β)  $\Psi'(x)$  ne croît pas à partir d'un  $x$ .

Nous exposons la démonstration d'Ermakof ainsi rectifiée dans les sections II-IV de cette communication. On trouve l'énoncé complet du théorème démontré dans la section V. Dans la section VI nous montrons sur un exemple que le critère B d'Ermakof avec  $\Psi(x) = e^x$  peut être moins efficace que le critère de CAUCHY portant sur  $\sqrt[n]{|a_n|}$ . Ce critère d'Ermakof n'embrasse donc nullement les critères de première espèce de la suite de MORGAN-BERTRAND. Il n'en est plus ainsi si l'on veut comparer ce critère d'Ermakof aux critères de deuxième espèce de MORGAN-BERTRAND. Ici, ce critère d'Ermakof embrasse en effet les critères de MORGAN-BERTRAND au moins pour les séries  $\sum a_n$  avec  $a_n \downarrow 0$  ou avec  $\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow 1$ . Ceci est démontré dans la section VII.

On trouve dans la première note d'Ermakof l'affirmation que les critères du type B utilisant une fonction conjuguée  $\Psi(x)$  et ses fonctions itérées  $\Psi(\Psi(x))$ , ... possèdent la même sensibilité. Nous montrons dans la section VIII sur un exemple que cette assertion est inexacte.

Ermakof a avancé d'autre part dans E.I que le critère B pour une fonction conjuguée  $\Psi_2(x)$  est plus sensible que pour la fonction conjuguée  $\Psi_1(x)$  si l'on a  $\Psi_2(x) > \Psi_1(x)$ . Cette assertion est, elle aussi, inexacte comme nous le montrons dans la section IX. Toutefois, on peut dire que si la croissance de la fonction  $\Psi_2(x)$  est considérablement plus rapide que celle de  $\Psi_1(x)$ , le critère B avec  $\Psi_2(x)$  s'applique à toute série convergente à laquelle s'applique le critère B avec  $\Psi_1(x)$ . Nous précisons ce principe en donnant dans la section IX un énoncé exact

pour  $\Psi(x) = x + 1$ , c'est-à-dire pour le critère de D'ALEMBERT.

Dans la section X nous établissons une classe de fonctions conjuguées pour laquelle le critère B de convergence est au moins aussi sensible que le critère B de convergence pour  $\Psi(x) = x^k$  ( $k > 1$ ). Nous terminons cette communication en présentant dans la section XI quelques observations sur l'énoncé A. Nous y cherchons surtout dans quelle mesure la condition (I, 1) est nécessaire.

## II. Le critère d'Ermakof et l'équation fonctionnelle d'Abel<sup>1</sup>.

**Lemme.** — Soit  $\Psi(x)$  une fonction de  $x$  définie pour  $x \geq a_0$ , continue, possédant une dérivée positive et continue, et telle que l'on ait

$$\Psi(x) > x \quad (x \geq a_0). \quad (\text{II, 1})$$

Supposant qu'il existe une solution  $\varphi(x)$  de l'équation fonctionnelle d'Abel

$$\varphi(\Psi(x)) = \varphi(x) + 1 \quad (x \geq a_0), \quad (\text{II, 2})$$

définie, positive et continue pour  $x \geq a_0$  et jouissant des propriétés suivantes:

- $\alpha)$   $\varphi(x)$  tend en croissant vers  $\infty$ , si  $x$  va de  $a_0$  à  $\infty$ ;
- $\beta)$  la dérivée de droite  $\varphi'_+(x)$  existe pour  $x \geq a_0$  et reste positive et bornée de telle sorte qu'à chaque  $A > a$  correspondent deux constantes positives  $c(A)$  et  $C(A)$ , telles que

$$c(A) \leq \varphi'_+(x) \leq C(A) \quad (a_0 \leq x \leq A); \quad (\text{II, 3})$$

<sup>1</sup> Il est remarquable que dans la communication citée, Korkine s'occupe lui aussi de l'équation fonctionnelle d'Abel, mais sans s'apercevoir de la connexion étroite entre cette équation et le critère d'Ermakof, qui n'a été découverte que par Ermakof un an plus tard. La démonstration de Korkine pour le critère B d'Ermakof repose, en notation de la section III, sur l'identité

$$\int_a^{\Psi(a)} \left( \sum_{\nu=0}^{n-1} f(\Psi_\nu(x)) \Psi'_\nu(x) \right) dx = \int_a^{\Psi_n(a)} f(x) dx$$

et nous paraît d'être particulièrement intéressante, parce qu'elle fait nettement apparaître le lien entre le critère B d'Ermakof et « le principe de condensation » de Cauchy.