Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 1 (1955)

Heft: 1-2-3: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LES CRITÈRES DE CONVERGENCE ET DIVERGENCE DUS À V. ERMAKOF

Autor: Ostrowski, A.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-31365

SUR LES CRITÈRES DE CONVERGENCE ET DIVERGENCE DUS À V. ERMAKOF

A Trygve Nagell à l'occasion de son 60^e^ anniversaire

PAR

A. OSTROWSKI (Bâle)

I. Introduction.

V. ERMAKOF a découvert, il y a quatre-vingt-cinq ans, une classe très remarquable de critères de convergence et de divergence de séries [1]. Ces critères, extrêmement sensibles, ne sont guère connus et l'on trouve généralement des indications peu exactes sur leur portée. Nous nous proposons ici de préciser les démonstrations des différents critères d'Ermakof et de mettre au point certaines considérations sur leur portée.

Avant d'indiquer le contenu des sections suivantes de cet article, nous donnons une démonstration très simple et rapide du critère d'Ermakof dans un cas très important.

A. *Soit* $f(x)$ *une fonction non négative et mesurable pour* $x \geqq a_0$. *Soient* $\Psi(x)$ *et* $\psi(x)$ *deux fonctions définies pour* $x \geqq a$ *et telles que l'on ait*

$$\Psi(x) \geqq \psi(x) \geqq a_0 \quad (x \geqq a), \qquad \psi(x) \longrightarrow \infty \ (x \longrightarrow \infty), \tag{I, 1}$$

---

[1] I. V. ERMAKOF, Caractère de convergence de séries. *Bull. d. Sciences mathématiques et astronomiques*, 1871, II, pp. 250-256;

II. V. ERMAKOF, Extrait d'une lettre adressée à A. M. Hoüel, *l. c.*, 1883, (II) VII, pp. 142-144.

Ces notes sont indiquées dans le texte par E.I, resp. E.II.

Il existe encore des communications d'Ermakof sur cette question publiées en russe, que nous étions malheureusement hors d'état de nous procurer. De même, il nous a été impossible de nous procurer une dissertation pour le grade de magistre de BOUGAÏEF intitulée *Convergence des séries infinies, d'après leur forme extérieure*, publiée en russe et citée par Ermakof dans E.I.

$\psi(x)$ *étant non décroissante à partir de* a, *tandis que chaque intervalle* $\langle a, A \rangle$ *consiste en un nombre fini d'intervalles de monotonie de* $\Psi(x)$. *Alors, si l'on a pour presque chaque* $x \geqq a$ *et un* $q > 0$ *inférieur à* 1:

$$f(\Psi(x))\,\Psi'(x) \leqq q f(\psi(x))\,\psi'(x) \qquad (x \geqq a)\,, \tag{I, 2}$$

l'intégrale

$$\int_a^\infty f(x)\,dx \tag{I, 3}$$

est convergente; si l'on a pour presque chaque $x \geqq a$:

$$f(\Psi(x))\,\Psi'(x) \geqq f(\psi(x))\,\psi'(x) \qquad (x \geqq a)\,, \tag{I, 4}$$

et s'il existe un $A \geqq a$ *tel que* $\Psi(A) > \psi(A)$ *et que* $f(x)$ *ne s'annule pas presque partout dans l'intervalle* $\langle \psi(A), \Psi(A) \rangle$, *l'intégrale* (I, 3) *diverge.*

Donc en particulier, si $f(x)$ *est décroissante, la série*

$$\sum_1^\infty f(\nu) \tag{I, 5}$$

converge dans le premier cas et diverge dans le second.

En effet, dans le cas (I, 2) on a pour $x \geqq a$ en intégrant de a à x:

$$\int_a^x f(\Psi(x))\,\Psi'(x)\,dx \leqq q \int_a^x f(\psi(x))\,\psi'(x)\,dx\,,$$

donc, en introduisant respectivement $\Psi(x)$, $\psi(x)$ comme nouvelles variables d'intégration [1]:

$$\int_{\Psi(a)}^{\Psi(x)} f(t)\,dt \leqq q \int_{\psi(a)}^{\psi(x)} f(t)\,dt$$

ou encore

$$(1-q)\int_{\psi(a)}^{\psi(x)} f(t)\,dt \leqq \int_{\psi(a)}^{\Psi(a)} f(t)\,dt - \int_{\psi(x)}^{\Psi(x)} f(t)\,dt\,.$$

Or, d'après (I, 1), la dernière intégrale est non négative, donc

[1] Ceci est permis sous nos conditions. Cf. par exemple C. CARATHÉODORY, *Vorlesungen über reelle Funktionen*, 1. Auflage, B. G. Teubner, Leipzig, 1918, p. 556.

l'intégrale

$$\int_{\psi(a)}^{\psi(x)} f(t)\, dt$$

est bornée pour $x \geqq a$, et puisque $\psi(x) \longrightarrow \infty$, (I, 3) converge.

Si, au contraire, (I, 4) est satisfaite on obtient de la même façon, en remplaçant a par A,

$$\int_{\Psi(A)}^{\Psi(x)} f(t)\, dt \geqq \int_{\psi(A)}^{\psi(x)} f(t)\, dt \qquad (x \geqq A)\,,$$

donc

$$\int_{\psi(x)}^{\Psi(x)} f(t)\, dt \geqq \int_{\psi(A)}^{\Psi(A)} f(t)\, dt\,,$$

donc ainsi, pour $x \geqq A$, l'intégrale de gauche reste supérieure à une constante positive tandis que dans le cas de convergence de (I, 3) cette intégrale devrait tendre vers 0 pour $x \longrightarrow \infty$. Donc l'intégrale (I, 3) diverge, C.Q.F.D.

Le théorème qui vient d'être démontré se trouve énoncé dans E.I, p. 252, sous une forme un peu moins générale.

Nous allons appeler avec Ermakof une fonction $\Psi(x)$ positive, croissante, tendant vers l'infini pour $x \longrightarrow \infty$ et à dérivée positive et continue pour $x \geqq a$, *fonction conjuguée de première espèce*, si elle satisfait pour $x \geqq a$ à l'inégalité

$$\Psi(x) > x$$

et *fonction conjuguée de seconde espèce*, si elle satisfait pour $x \geqq a$ à l'inégalité

$$\Psi(x) < x\,.$$

Pour désigner une fonction conjuguée de première espèce nous nous bornerons souvent à l'expression: *fonction conjuguée.*

Ermakof énonce le théorème A en supposant que $\Psi(x)$ est une fonction conjuguée de première espèce et $\psi(x)$ une fonction conjuguée de seconde espèce [1].

---

[1] Actuellement, Ermakof exige de $\psi(x)$ que cette fonction soit une fonction conjuguée ou bien de première espèce ou bien de seconde espèce, mais satisfaisant à l'inégalité $\psi(x) < \Psi(x)$. Mais son raisonnement ne marche pas, si $\psi(x)$ est supposée de seconde espèce.

En posant soit $\psi(x) \equiv x$, soit $\Psi(x) \equiv x$ on obtient deux énoncés qui ne contiennent qu'une seule fonction conjuguée. D'ailleurs il est facile de voir que les deux énoncés ainsi obtenus et le critère général énoncé par Ermakof sont équivalents entre eux. On pourra donc se borner dans l'étude des énoncés d'Ermakof à la considération du critère suivant:

B. *Soit* f (x) *une fonction positive et continue et* Ψ (x) *une fonction conjuguée de première espèce pour* $x \geqq a$. *Alors si l'on a pour une constante* q, $0 < q < 1$, *l'inégalité*

$$f(\Psi(x))\,\Psi'(x) \leqq qf(x) \qquad (x \geqq a)\,, \tag{I, 6}$$

l'intégrale (I, 4) *est convergente et si l'on a l'inégalité*

$$f(\Psi(x))\,\Psi'(x) \geqq f(x) \qquad (x \geqq a)\,, \tag{I, 7}$$

l'intégrale (I, 4) *est divergente.*

La condition de divergence (I, 7) est satisfaite à fortiori si l'on a pour un nombre positif $Q > 1$ l'inégalité

$$f(\Psi(x))\,\Psi'(x) \geqq Qf(x) \qquad (x \geqq a)\,. \tag{I, 8}$$

Dans ce qui suit nous nous occuperons surtout du théorème B et ne reviendrons à l'énoncé A que dans la dernière section de cette communication.

Notons qu'Ermakof dans E.I énonce B sous une forme encore plus restrictive (il suppose $f(x)$ décroissante et son critère de divergence est le critère de divergence réduit à la forme (I, 8)) et que sa démonstration dans E.I est loin d'être irréprochable. Mais il suffit d'apporter quelques légères modifications au raisonnement d'Ermakof pour en tirer une démonstration correcte qui se trouve d'ailleurs dans quelques manuels [1].

Une autre démonstration du théorème B, toujours pour $f(x)$ décroissante, se trouve dans un mémoire connu de A. Pringsheim [2], où le théorème B se déduit par un passage à la limite

[1] Cf. par exemple K. Knopp, *Theorie und Anwendung unendlicher Reihen*, Berlin, 1922, 1. Auflage, pp. 288-290; T. J. I'A. Bromwich, *An Introduction to the Theory of Infinite Series*, 2nd ed., London, 1931, pp. 43-44.

[2] A. Pringsheim, Allgemeine Theorie der Divergenz und Convergenz von Reihen mit positiven Gliedern. *Math. Annalen*, t. **35**, 1890, pp. 392-394. Cf. aussi *Mathematical Papers, Chicago Congress* 1893 (1896), pp. 305-329, en particulier p. 324, p. 329, ainsi que l'*Enzyklopädie der Mathematischen Wissenschaften*, I, Teil I, pp. 88-89.

d'un théorème de Pringsheim, obtenu par ce dernier en développant une idée de G. Kohn [1]. Mais, à vrai dire, cette démonstration ne s'applique qu'au cas où la fonction $\Psi(x)$ est dérivable *uniformément pour* $x \geqq a_0$ (ce qui est par exemple le cas pour $\Psi(x) = e^x$) et ne mène dans le cas de divergence qu'au critère (I, 8). Elle a été reproduite par Hobson [2].

Une démonstration tout à fait différente du théorème B a été donnée par Korkine [3].

Dans toutes ces démonstrations on n'obtient un énoncé portant sur la série infinie (I, 5) que sous l'hypothèse assez restrictive que la fonction $f(x)$ *décroît.*

Or, Ermakof a publié en 1883 (E.II) une démonstration de son théorème sur les séries infinies qui est restée incomprise et très peu connue. On n'en trouve une mention que chez Pringsheim [4]. Cette démonstration est importante surtout parce que Ermakof évite le passage par l'intégrale (I, 3) et parce qu'elle s'applique aux fonctions positives et continues $f(x)$ *sans qu'il soit nécessaire de rien supposer sur leur caractère de monotonie.* Donc, en particulier, le critère d'Ermakof sous sa forme la plus connue, celle qui porte sur le quotient

$$\frac{f(e^x)\,e^x}{f(x)},$$

n'est nullement borné aux séries à termes décroissants. Ce fait n'a pas été remarqué jusqu'à présent [5].

D'autre part, cette démonstration n'est pas tout à fait complète. Ermakof a bien remarqué qu'une condition supplémentaire doit être imposée à la fonction $\Psi(x)$. Il en dit quelques mots (E.II, p. 142, dans une note au bas de la page) et il y indique la condition qui avec nos notations équivaut à $\Psi'(a) \geqq 1$,

---

1 G. Kohn, Beiträge zur Theorie der Convergenz unendlicher Reihen. *Archiv der Mathematik und Physik*, **67** (1882), pp. 63-95.

2 E. W. Hobson, *The Theory of Functions of a Real Variable and the Theory of Fourier's Series*, 2nd ed., Vol. II, Cambridge, 1926, pp. 33-34.

3 A. Korkine, Sur un problème d'interpolation. *Bull. d. sciences mathématiques et astronomiques*, 1882, (II) VI, pp. 228-231.

4 A. Pringsheim, *l. c.*, p. 393, note ** au bas de la page.

5 En particulier, Pringsheim, en parlant de cette démonstration, dit qu'elle ne s'applique qu'aux fonctions $f(x)$ décroissantes. (Cf. le second article de Pringsheim, mentionné plus haut, noté au bas de la page, p. 327: « Dies ist der von Herrn Ermakoff ausschliesslich betrachtete Fall ».)

en ajoutant: « C'est la seule condition pour que notre démonstration soit juste. »

Or, il nous semble que cette dernière condition ne suffit pas pour sauver la démonstration d'Ermakof. Une analyse plus détaillée nous a permis de rendre cette démonstration correcte en utilisant l'une des deux hypothèses suivantes:

α) $\Psi'(x)$ ne décroît pas à partir d'un x et devient égale ou supérieure à *un*;

β) $\Psi'(x)$ ne croît pas à partir d'un x.

Nous exposons la démonstration d'Ermakof ainsi rectifiée dans les sections II-IV de cette communication. On trouve l'énoncé complet du théorème démontré dans la section V. Dans la section VI nous montrons sur un exemple que le critère B d'Ermakof avec $\Psi(x) = e^x$ peut être moins efficace que le critére de Cauchy portant sur $\sqrt[\nu]{|a_\nu|}$. Ce critère d'Ermakof n'embrasse donc nullement les critères de première espèce de la suite de Morgan-Bertrand. Il n'en est plus ainsi si l'on veut comparer ce critere d'Ermakof aux critères de deuxième espèce de Morgan-Bertrand. Ici, ce critère d'Ermakof embrasse en effet les critères de Morgan-Bertrand au moins pour les séries Σa_ν avec $a_\nu \downarrow 0$ ou avec $\frac{a_{\nu+1}}{a_\nu} \longrightarrow 1$. Ceci est démontré dans la section VII.

On trouve dans la première note d'Ermakof l'affirmation que les critères du type B utilisant une fonction conjuguée $\Psi(x)$ et ses fonctions itérées $\Psi(\Psi(x))$, ... possèdent la même sensibilité. Nous montrons dans la section VIII sur un exemple que cette assertion est inexacte.

Ermakof a avancé d'autre part dans E.I que le critère B pour une fonction conjuguée $\Psi_2(x)$ est plus sensible que pour la fonction conjuguée $\Psi_1(x)$ si l'on a $\Psi_2(x) > \Psi_1(x)$. Cette assertion est, elle aussi, inexacte comme nous le montrons dans la section IX. Toutefois, on peut dire que si la croissance de la fonction $\Psi_2(x)$ est considérablement plus rapide que celle de $\Psi_1(x)$, le critère B avec $\Psi_2(x)$ s'applique à toute série convergente à laquelle s'applique le critère B avec $\Psi_1(x)$. Nous précisons ce principe en donnant dans la section IX un énoncé exact pour $\Psi(x) = x + 1$, c'est-à-dire pour le critère de D'ALEMBERT.

Dans la section X nous établissons une classe de fonctions conjuguées pour laquelle le critère B de convergence est au moins aussi sensible que le critère B de convergence pour $\Psi(x) = x^k$ $(k > 1)$. Nous terminons cette communication en présentant dans la section XI quelques observations sur l'énoncé A. Nous y cherchons surtout dans quelle mesure la condition (I, 1) est nécessaire.

II. Le critère d'Ermakof et l'équation fonctionnelle d'Abel [1].

Lemme. — *Soit* $\Psi(x)$ *une fonction de* x *définie pour* $x \geqq a_0$, *continue, possédant une dérivée positive et continue, et telle que l'on ait*

$$\Psi(x) > x \qquad (x \geqq a_0)\ . \tag{II, 1}$$

Supposant qu'il existe une solution $\varphi(x)$ *de l'équation fonctionnelle d'Abel*

$$\varphi(\Psi(x)) = \varphi(x) + 1 \qquad (x \geqq a_0)\ , \tag{II, 2}$$

définie, positive et continue pour $x \geqq a_0$ *et jouissant des propriétés suivantes:*

α) $\varphi(x)$ *tend en croissant vers* ∞, *si* x *va de* a_0 à ∞ ;

β) *la dérivée de droite* $\varphi'_+(x)$ *existe pour* $x \geqq a_0$ *et reste positive et bornée de telle sorte qu'à chaque* $A > a$ *correspondent deux constantes positives* c (A) *et* C (A), *telles que*

$$c(A) \leqq \varphi'_+(x) \leqq C(A) \qquad (a_0 \leqq x \leqq A)\ ; \tag{II, 3}$$

[1] Il est remarquable que dans la communication citée, Korkine s'occupe lui aussi de l'équation fonctionnelle d'Abel, mais sans s'apercevoir de la connexion étroite entre cette équation et le critère d'Ermakof, qui n'a été découverte que par Ermakof un an plus tard. La démonstration de Korkine pour le critère B d'Ermakof repose, en notation de la section III, sur l'identité

$$\int_a^{\Psi(a)} \left(\sum_{\nu=0}^{n-1} f(\Psi_\nu(x))\, \Psi'_\nu(x)\right) dx = \int_a^{\Psi_n(a)} f(x)\, dx$$

et nous paraît d'être particulièrement intéressante, parce qu'elle fait nettement apparaître le lien entre le critère B d'Ermakof et « le principe de condensation » de Cauchy.

γ) *la série*

$$\sum_{\nu \geqq a_0} \varphi'_+(\nu) \tag{II, 4}$$

est divergente;

δ) *la série*

$$\sum_{\nu \geqq a_0} \frac{\varphi'_+(\nu)}{\varphi(\nu)^2} \tag{II, 5}$$

est convergente.

Alors:

a) *Soit* f (x) *une fonction positive pour* $x \geqq a_0$, *sommable dans chaque intervalle* $a_0 \leqq x \leqq A$ *et telle que* $1/f(x)$ *est uniformément borné dans chaque intervalle* $a_0 \leqq x \leqq A$. *Si l'on a, à partir d'un* x:

$$\frac{f(\Psi(x))\,\Psi'(x)}{f(x)} \geqq 1 \,, \tag{II, 6}$$

la série

$$\sum_{\nu \geqq a_0} f(\nu) \tag{II, 7}$$

est divergente.

b) *Soit* f (x) *une fonction positive pour* $x \geqq a_0$, *sommable dans chaque intervalle* $a_0 \leqq x \leqq A$ *et uniformément bornée dans chaque intervalle* $a_0 \leqq x \leqq A$. *Si l'on a, à partir d'un* x:

$$\frac{f(\Psi(x))\,\Psi'(x)}{f(x)} \leqq \delta \,, \qquad 0 < \delta < 1 \,, \tag{II, 8}$$

la série (II, 7) *est convergente.*

Démonstration. — On peut supposer sans restreindre la généralité que les relations (II, 6), respectivement (II, 8), sont valables pour $x \leqq a_0$. Posons

$$\Psi_0(x) \equiv x \,, \quad \Psi_1(x) = \Psi(x) \,, \quad \Psi_2(x) = \Psi(\Psi(x)) \,, \quad \ldots ,$$
$$\Psi_n(x) = \Psi(\Psi_{n-1}(x)) \tag{II, 9}$$

et

$$\Psi_\nu(a_0) = a_\nu \,, \quad a_0 < a_1 < a_2 < \ldots . \tag{II, 10}$$

Alors *la suite* a_ν *tend vers l'infini.* En effet, si l'on avait

$a_\nu \longrightarrow \alpha < \infty$, il résulterait de la relation $\Psi(a_\nu) = a_{\nu+1}$ pour $\nu \longrightarrow \infty$:

$$\Psi(\alpha) = \alpha \, ,$$

ce qui est en contradiction avec (II, 1).

Donc, pour chaque $x > a_0$, il existe un x^* situé dans l'intervalle $a_0 \leqq x^* < a_1$ et un nombre entier $n \geqq 0$ tel que l'on ait

$$x = \Psi_n(x^*) \, , \qquad a_0 \leqq x^* < a_1 \, . \tag{II, 11}$$

Supposons maintenant que les hypothèses de *a)* soient satisfaites pour $x \geqq a_0$. Soit c la borne inférieure de $\frac{f(x)}{\varphi'_+(x)}$ dans l'intervalle $\langle a_0, a_1 \rangle$, qui est, d'après nos hypothèses, > 0, de sorte que l'on ait

$$\frac{f(x)}{\varphi'_+(x)} \geqq c > 0 \qquad (a_0 \leqq x < a_1) \, . \tag{II, 12}$$

Formons le quotient

$$\frac{f(\Psi(x))}{\varphi'_+(\Psi(x))} \bigg/ \frac{f(x)}{\varphi'_+(x)} = \frac{f(\Psi(x))}{f(x)} \bigg/ \frac{\varphi'_+(\Psi(x))}{\varphi'_+(x)} \, . \tag{II, 13}$$

On a en prenant les dérivées de droite des deux membres de (II, 2):

$$\varphi'_+(x) = \varphi'_+(\Psi(x)) \, \Psi'(x) \, . \tag{II, 14}$$

Donc, le quotient (II, 13) devient

$$\frac{f(\Psi(x)) \, \Psi'(x)}{f(x)}$$

et est, en vertu de (II, 6), $\geqq 1$. Il en résulte que si l'on a pour un x quelconque $\frac{f(x)}{\varphi'_+(x)} \geqq c$, on a aussi pour chaque entier $n > 0$

$$\frac{f(\Psi_n(x))}{\varphi'_+(\Psi_n(x))} \geqq c \, .$$

Or nous avons vu que chaque $x \geqq a_0$ peut être mis sous la forme (II, 11). Il résulte donc de (II, 12) que l'on a

$$\frac{f(x)}{\varphi'_+(x)} \geqq c \qquad (a_0 \leqq x),$$

et (II, 7) est divergente avec (II, 4).

Supposons, d'autre part, que l'hypothèse *b*) soit satisfaite pour $x \geqq a_0$. Posons

$$Q(x) = \frac{f(x)\,\varphi(x)^2}{\varphi'_+(x)} \qquad (x \geqq a_0) \tag{II, 15}$$

et formons le quotient

$$\frac{Q(\Psi(x))}{Q(x)} = \frac{f(\Psi(x))}{f(x)}\,\frac{\varphi'_+(x)}{\varphi'_+(\Psi(x))}\left(\frac{\varphi(\Psi(x))}{\varphi(x)}\right)^2. \tag{II, 16}$$

Il résulte de (II, 2) et α) que

$$\left(\frac{\varphi(\Psi(x))}{\varphi(x)}\right)^2 = \left(\frac{\varphi(x)+1}{\varphi(x)}\right)^2 \longrightarrow 1 \qquad (x \longrightarrow \infty).$$

On peut donc supposer sans restreindre la généralité que l'on a

$$\left(\frac{\varphi(\Psi_n(x))}{\varphi(x)}\right)^2 \leqq \frac{1}{\delta} \qquad (x \geqq a_0). \tag{II, 17}$$

Le second membre de (II, 16) devient en tenant compte de (II, 14), (II, 8) et (II, 17)

$$\frac{f(\Psi(x))\,\Psi'(x)}{f(x)}\left(\frac{\varphi(\Psi_n(x))}{\varphi(x)}\right)^2 \leqq 1.$$

Alors on a évidemment

$$Q(\Psi(x)) \leqq Q(x) \qquad (x \geqq a_0),$$

donc à fortiori pour un entier n positif

$$Q(\Psi_n(x)) \leqq Q(x) \qquad (x \geqq a_0). \tag{II, 18}$$

Or soit C la borne supérieure de $Q(x)$ dans l'intervalle $\langle a_0, a_1 \rangle$:

$$Q(x) = \frac{f(x)\,\varphi(x)^2}{\varphi'_+(x)} \leqq C \qquad (a_0 \leqq x \leqq a_1). \tag{II, 19}$$

On peut mettre tout $x \geqq a_1$ sous la forme (II, 11). Donc, en vertu de (II, 18), la relation (II, 19) est aussi valable pour tout $x \geqq a_0$ et l'on a

$$f(x) \leqq C \frac{\varphi'_+(x)}{\varphi(x)^2} \qquad (x \geqq a_0) \cdot$$

La série (II, 7) est convergente avec (II, 5).

Les assertions *a*) et *b*) sont complètement démontrées.

III. Construction d'une solution de l'équation d'Abel.

Dans cette section nous allons construire avec Ermakof, pour chaque fonction $\Psi(x)$ satisfaisant aux conditions du lemme de la section II une fonction $\varphi(x)$ jouissant des propriétés exigées dans ce lemme, sauf, pour le moment, les propriétés γ) et δ).

Désignons l'inverse de la fonction $y = \Psi(x)$ $(x \geqq a_0)$ par

$$x = \psi(y) \qquad (y \geqq a_1 = \Psi(a_0)) \, .$$

La fonction $\psi(y)$ est continue et croissante pour $y \geqq a_1$, et l'on a

$$\psi'(y) = \frac{1}{\Psi'(x)} \qquad (y = \Psi(x) \, , \quad x \geqq a_0 \, , \quad y \geqq a_1) \, . \tag{III, 1}$$

Posons

$$\psi_0(x) = x \, , \quad \psi_1(x) = \psi(x) \, , \quad \psi_2(x) = \psi(\psi(x)) \, , \quad \dots ,$$
$$\psi_n(x) = \psi(\psi_{n-1}(x)) \, .$$

Alors $\psi_n(x)$ est l'inverse de la fonction $\Psi_n(x)$ donnée par (II, 9). Donc, en résolvant (II, 11) par rapport à x^*, on a

$$x^* = \psi_n(x) \, . \tag{III, 2}$$

La valeur de x donnée par (II, 11) parcourt évidemment l'intervalle

$$a_n \leqq x < a_{n+1} \, , \tag{III, 3}$$

où les a_ν sont définies par (II, 10).

Donc, dès qu'un $x \geqq a_0$ est donné, l'entier n et le nombre x^* dans l'intervalle $\langle a_0, a_1 \rangle$ sont univoquement déterminés par la relation (II, 11).

Posons maintenant

$$\varphi(x) = n + 1 + \frac{x^* - a_0}{a_1 - a_0} \qquad (x \geqq a_0)\,, \qquad \text{(III, 4)}$$

où l'entier n est déterminé par (III, 3) et x^* par (III, 2). Il résulte de (II, 11)

$$\Psi(x) = \Psi_{n+1}(x^*)\,,$$

donc

$$\varphi(\Psi(x)) = n + 2 + \frac{x^* - a_0}{a_1 - a_0} = \varphi(x) + 1\,.$$

La fonction $\varphi(x)$ donnée par (III, 4) satisfait donc à l'équation d'Abel.

D'autre part, si x tend vers ∞, le nombre n déterminé par (III, 3) tend aussi vers ∞. Donc, $\frac{x^* - a_0}{a_1 - a_0}$ étant situé dans l'intervalle $\langle 0, 1 \rangle$, on a $\varphi(x) \longrightarrow \infty$ $(x \longrightarrow \infty)$.

La fonction $\psi_n(x)$ est continue pour tout entier n. Donc, tant que x reste dans l'intervalle (III, 3), x^* et $\varphi(x)$ sont continus.

On a évidemment pour tout $n \geqq 0$

$$\varphi(a_n) = n + 1\,.$$

Donc $\varphi(x)$ est positive et continue pour $x > a_0$ autant que x est différente de chaque a_ν $(\nu = 1, 2, \ldots)$. $\varphi(x)$ est, de plus, *continue de droite* en tout point a_n $(n = 0, 1, \ldots)$.

Je dis que $\varphi(x)$ est aussi continue de gauche en chaque point a_{n+1} $(n = 0, 1, \ldots)$. En effet, si x tend *en croissant* vers l'extrémité de droite de l'intervalle (III, 3), x^* tend vers a_1, et d'après (III, 4) $\varphi(x)$ tend vers $n + 2 = \varphi(a_{n+1})$. Donc $\varphi(x)$ *est continue pour tout* $\mathrm{x} \geqq \mathrm{a}_0$.

Il résulte, en plus, de (III, 4) et (III, 2) que $\varphi(x)$ est dérivable à l'intérieur de tout intervalle (III, 3), c'est-à-dire pour $a_n < x < a_{n+1}$. On a évidemment

$$\varphi'(x) = \frac{1}{a_1 - a_0} \; \frac{d\,\psi_n(x)}{dx}\,,$$

$$(a_1 - a_0)\,\varphi'(x) = \psi'(\psi_{n-1}(x))\,\psi'(\psi_{n-2}(x)) \ldots \psi'(\psi(x))\,\psi'(x) \qquad (a_n < x < a_{n+1})\,. \tag{III, 5}$$

La même expression donne encore la *dérivée de droite* de $\varphi(x)$ en a_ν, de sorte que $\varphi'_+(x)$ *est continue dans l'intervalle* (III, 3).

On a en particulier

$$(a_1 - a_0)\,\varphi'_+(a_0) = 1\,, \quad (a_1 - a_0)\,\varphi'_+(a_1) = \psi'(a_1)\,, \quad \ldots$$

$$(a_1 - a_0)\,\varphi'_+(a_n) = \psi'(a_n)\,\psi'(a_{n-1}) \ldots \psi'(a_1) \quad (n = 1, 2, \ldots)\,. \tag{III, 6}$$

Pour l'extrémité de droite de l'intervalle (III, 3), l'expression (III, 5) tend avec $x \uparrow a_{n+1}$ vers

$$\frac{d\psi_n(a_{n+1})}{dx} = \psi'(a_{n+1})\,\psi'(a_n) \ldots \psi'(a_2)\,.$$

Or, ceci est aussi

$$(a_1 - a_0)\,\varphi'_-(a_{n+1})\,,$$

où $\varphi'_-(a_{n+1})$ est la *dérivée de gauche* de $\varphi(x)$ en a_{n+1}. En effet, on a

$$(a_1 - a_0)\,\varphi'_-(a_{n+1}) = \lim_{x \uparrow a_{n+1}} \frac{(a_1 - a_0)(n+2) - [(n+1)(a_1 - a_0) + \psi_n(x) - a_0]}{a_{n+1} - x} =$$

$$= \lim_{x \uparrow a_{n+1}} \frac{a_1 - \psi_n(x)}{a_{n+1} - x} = \lim_{x \uparrow a_{n+1}} \frac{\psi_n(a_{n+1}) - \psi_n(x)}{a_{n+1} - x} = \frac{d\psi_n(a_{n+1})}{dx}\,.$$

On a donc en particulier

$$(a_1\, a_0)\,\varphi'_-(a_n) = \psi'(a_n)\,\psi'(a_{n-1}) \ldots \psi'(a_2) \qquad (n > 0)$$

où le second membre a la valeur *un* pour $n = 1$. Donc, en comparant avec (III, 6),

$$\varphi'_+(a_n) = \psi'(a_1)\,\varphi'_-(a_n)\,, \quad \varphi'_-(a_n) = \Psi'(a_0)\,\varphi'_+(a_n)\,. \tag{III ,7}$$

On voit que $\varphi'(x)$ est continue à l'intérieur de chacun des intervalles $\langle a_n, a_{n+1} \rangle$, à condition de prendre aux extrémités les dérivées du côté correspondant. Au point de discontinuité a_n $(n = 1, 2, \ldots)$ on a (III, 7). Il résulte maintenant de l'hypothèse de la continuité de $\Psi'(x)$ que la propriété β) est satisfaite.

IV. Discussion des séries (II, 4) et (II, 5).

Pour assurer la validité des conditions γ) et δ) on doit faire des hypothèses plus restrictives sur la fonction $\Psi'(x)$. Il résulte en tout cas de la condition α), φ'_+ étant continue par morceaux, que l'intégrale

$$\int_{a_0}^{\infty} \varphi'_+(x)\, dx \tag{IV, 1}$$

est divergente et que l'intégrale

$$\int_{a_0}^{\infty} \frac{\varphi'_+(x)}{\varphi(x)^2}\, dx \tag{IV, 2}$$

converge. Or, le critérium de Maclaurin-Cauchy liant la divergence de la série (II, 4) à la divergence de l'intégrale (IV, 1) et la convergence de la série (II, 5) à l'intégrale (IV, 2) n'est pas valable sans restrictions. On suppose généralement que l'expression sous le signe d'intégral ne croît pas pour x tendant vers l'infini. Or, il résulte des relations (III, 5) et (III, 7) que $\varphi'_+(x)$ ne croît pas si

1° $\psi'(a_1) = \dfrac{1}{\Psi'(a_0)} \leqq 1$

et

2° la fonction $\psi'(x)$ ne croît pas, c'est-à-dire que $\Psi'(x)$ ne décroît pas.

Il suffit donc d'imposer à la fonction $\Psi(x)$ les conditions suivantes pour que $\varphi'_+(x)$ ne croisse dans aucun intervalle au-dessus de a_0:

$$\Psi'(a_0) \geqq 1\,, \quad \Psi'(x) \leqq \Psi'(y) \quad (a_0 \leqq x \leqq y)\,. \tag{IV, 4}$$

On peut d'ailleurs remplacer (IV, 4) par la condition suivante, un peu moins restrictive:

Ψ' (x) *ne décroît pas et atteint ou dépasse la valeur* un *pour une valeur* b_0 *de* x.

En effet, on peut alors remplacer a_0 par b_0, de sorte que les conditions (IV, 4) deviennent satisfaites.

On peut, d'autre part, établir les propriétés γ) et δ) en imposant une condition tout à fait différente à $\Psi'(x)$, à savoir que $\Psi'(x)$ *ne croît pas.*

En effet, dans ce cas on a évidemment $\lim_{x\to\infty} \Psi'(x) = \alpha$ où α ne peut être < 1, puisque dans le cas contraire la condition (II, 1) ne saurait être constamment satisfaite. Donc on a $\alpha \geqq 1$, $\Psi'(x) \geqq 1$. On peut supposer $\Psi'(a_0) > 1$, puisque pour $\Psi'(a_0) = 1$ on aurait $\Psi'(x) \equiv 1$, c'est-à-dire un des cas où les conditions (IV, 4) sont satisfaites. On a alors

$$\frac{d}{dx}(\Psi(x) - x) \geqq \alpha - 1 \geqq 0 \,,$$

de sorte que $\Psi(x) - x$ ne décroît pas. On a donc en particulier

$$a_\nu - a_{\nu-1} \geqq a_1 - a_0 \,.$$

Posons $a_1 - a_0 = \Delta$, $\Psi'(a_0) = \Psi_0$. On a alors

$$a_\nu - a_{\nu-1} \geqq \Delta > 0 \qquad (\nu \geqq 1) \,,$$

$$\varphi'_-(a_n) = \Psi_0 \varphi'_+(a_n) \qquad (\Psi_0 > 1) \,.$$

Soit $\mu - 1$ le plus grand entier contenu dans $\frac{1}{\Delta}$. Alors pour tout entier ν, chaque intervalle $\langle \nu, \nu+1 \rangle$ contient μ points a_λ au plus, c'est-à-dire au plus μ points de discontinuité de $\varphi'_+(x)$.

Or, dans notre hypothèse, $\psi'(x)$ ne décroît pas, donc d'après (III, 5) dans un intervalle de continuité $\varphi'_+(x)$ ne décroît pas et se trouve multipliée par $\psi'(a_1) = \frac{1}{\Psi_0} < 1$ à chaque passage par un point de discontinuité a_ν. Il en résulte qu'on a pour chaque entier $\nu \geqq 1$

$$\varphi'_+(\nu) \geqq \Psi_0^{-\mu} \varphi'_+(x) \qquad (\nu \geqq x \geqq \nu - 1) \,, \qquad \text{(IV, 5)}$$

$$\left.\begin{array}{l} \varphi'_+(\nu) \leqq \Psi_0^{\mu} \varphi'_+(x) \,, \\ \varphi(\nu) \geqq \varphi(x) - \mu - 1 \end{array}\right\} \qquad (\nu \leqq x \leqq \nu + 1) \,. \qquad \text{(IV, 6)}$$

La dernière inégalité résulte de ce que, $\varphi'_+(x)$ étant toujours positive, la fonction $\varphi(x)$ croît constamment et accroît d'une unité dans chaque intervalle $\langle a_{\nu-1}, a_\nu \rangle$.

Or, en vertu de (IV, 5), on obtient

$$\varphi_+'(\nu) \geqq \Psi_0'^{-\mu} \int_{\nu-1}^{\nu} \varphi_+'(x)\, dx ,$$

et la divergence de la série (II, 4) résulte de celle de l'intégrale (IV, 1). D'autre part on a, en vertu de (IV, 6),

$$\frac{\varphi_+'(\nu)}{\varphi(\nu)^2} \leqq \frac{\Psi_0'^{\mu}\, \varphi_+'(x)}{(\varphi(x) - \mu - 1)^2} \qquad (\nu \leqq x \leqq \nu + 1) ,$$

dès que $\varphi(x) \geqq 2\mu + 2$, donc

$$\frac{\varphi_+'(\nu)}{\varphi(\nu)^2} \leqq 4\, \Psi_0'^{\mu} \frac{\varphi_+'(x)}{\varphi(x)^2} \qquad (\nu \leqq x \leqq \nu + 1 , \quad \varphi(x) \geqq 2\mu + 2) ,$$

$$\frac{\varphi_+'(\nu)}{\varphi(\nu)^2} \leqq 4\, \Psi_0'^{\mu} \int_{\nu}^{\nu+1} \frac{\varphi_+'(x)}{\varphi(x)^2} dx \qquad (\varphi(\nu) \geqq 2\mu + 2) ,$$

et la convergence de la série (II, 5) résulte de celle de l'intégrale (IV, 2).

V. Enoncé du résultat obtenu.

En rassemblant nos résultats nous avons le théorème suivant:

C. *Soit* $\Psi(x)$ *une fonction de* x *continue, possédant une dérivée positive et continue pour* $x \geqq a_0$ *et telle que l'on ait*

$$\Psi(x) > x \qquad (x \geqq a_0) .$$

Supposons que $\Psi'(x)$ *satisfait à l'une des deux conditions suivantes: ou bien* $\Psi'(x)$ *ne décroît pas à partir d'un* x *et atteint ou dépasse la valeur* un: *ou bien* $\Psi'(x)$ *ne croît pas à partir d'un* x. *Alors:*

a) *Si* $f(x)$ *est positive à partir d'un* x *et est sommable tandis que* $\frac{1}{f(x)}$ *reste uniformément borné dans chaque sous-intervalle fini de l'intervalle de définition de* $f(x)$ *et si l'on a à partir d'un* x

$$\frac{f(\Psi(x))\,\Psi'(x)}{f(x)} \geqq 1\,,$$

la série

$$\sum_{\nu}^{\infty} f(\nu)$$

est divergente.

b) *Si* f (x) *est mesurable et positive à partir d'un* x *et reste uniformément borné dans chaque sous-intervalle fini de l'intervalle de définition de* f (x) *et s'il existe un nombre* δ, $0 < \delta < 1$, *tel qu'à partir d'un* x,

$$\frac{f(\Psi(x))\,\Psi'(x)}{f(x)} \leqq \delta\,, \qquad 0 < \delta < 1\,,$$

la série

$$\sum_{\nu}^{\infty} f(\nu)$$

est convergente.

VI. Le critère B d'Ermakof et les critères de première espèce.

Quelle est la portée du critère B d'Ermakof comparée à celle des critères connus ? On trouve souvent l'assertion que le critère B d'Ermakof (avec $\Psi(x) = e^x$) « embrasse » tous les critères de la série logarithmique de Morgan-Bertrand. Or ceci n'est vrai qu'en partie.

Si l'on considère *les critères de première espèce* dans lesquels a_ν est comparé avec différentes fonctions de l'index ν, le critère B d'Ermakof n'est pas même plus efficace que le critère de Cauchy portant sur $\sqrt[\nu]{a_\nu}$.

En effet, nous allons construire une fonction $f(x)$ positive, continue, non croissante et tendant vers 0 avec $x \longrightarrow \infty$, telle que l'on a

$$f(x) \leqq e^{-x} \qquad (x \geqq 1)\,, \tag{VI, 1}$$

$$\frac{f(e^{x_\nu})\,e^{x_\nu}}{f(x_\nu)} \longrightarrow \infty \qquad (x \longrightarrow \infty) \tag{VI, 2}$$

pour une suite x_ν tendant vers l'infini. Alors la série $\sum_{\nu=1}^{\infty} f(\nu)$ est convergente et le critère de Cauchy sur $\sqrt[\nu]{a_\nu}$ est applicable tandis que le critère du théorème B ne s'applique pas.

Posons à cet effet

$$x_1 = 1\,, \quad \ldots, \quad x_{\nu+1} = e^{x_\nu} + 1 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots)\,.$$

Définissons $f(x)$ dans l'intervalle $\langle x_\nu, e^{x_\nu} \rangle$ par

$$f(x) = e^{-x_{\nu+1}} \qquad (x_\nu \leqq x \leqq e^{x_\nu})\,.$$

Quant à l'intervalle de longueur *un* entre e^{x_ν} et $x_{\nu+1} = e^{x_\nu} + 1$, la fonction $f(x)$ y est définie comme fonction linéaire et *continue* dans tout l'intervalle fermé $\langle e^{x_\nu}, x_{\nu+1} \rangle$:

$$f(e^{x_\nu} + t) = t \cdot e^{-x_{\nu+2}} + (1 - t)\, e^{-x_{\nu+1}} \qquad (0 \leqq t \leqq 1)\,.$$

Alors $f(x)$ sera positive, continue et non croissante. Pour tout x de l'intervalle $\langle x_\nu, x_{\nu+1} \rangle$ elle est au plus égale à

$$f(x_\nu) = e^{-x_{\nu+1}} \leqq e^{-x}\,,$$

d'où (VI, 1).

D'autre part, on a d'après la définition de $f(x)$ pour $\nu \longrightarrow \infty$

$$f(e^{x_\nu}) = f(x_\nu)\,, \qquad \frac{f(e^{x_\nu})\, e^{x_\nu}}{f(x_\nu)} = e^{x_\nu} \longrightarrow \infty\,,$$

c'est-à-dire (VI, 2).

Nous montrerons dans la section suivante qu'il n'en est plus de même pour les critères de seconde espèce portant sur le quotient $\dfrac{a_{\nu+1}}{a_\nu}$.

Nous allons d'abord faire quelques observations sur les séries de Morgan-Bertrand. Nous désignerons par $lg_k\, x$ $(k = 1, 2, \ldots)$ la k-ième itérée du lgx, c'est-à-dire

$$lg_0\, x = x\,, \quad lg_1\, x = lgx\,, \ldots, \quad lg_{n+1}\, x = lg\,(lg_n\, x)\,, \ldots \quad (n = 1\,, 2\,, \ldots)\,. \tag{VI, 1}$$

En plus, nous poserons

$$\mathrm{L}_0(x) = 1\,, \ \mathrm{L}_1(x) = \frac{1}{x}\,, \ldots, \ \mathrm{L}_{n+1}(x) = \frac{1}{xlgx \ldots lg_n\, x}\,, \ldots \ (n = 1, 2, \ldots)\,. \tag{VI, 2}$$

Les séries de Morgan-Bertrand ont alors la forme

$$\sum_{\nu \geqq \nu_0}^{\infty} \frac{L_n(\nu)}{lg_n^{1+s} \nu} \tag{VI, 3}$$

et sont convergentes pour $s > 0$ et divergentes pour $s \leqq 0$.

On a évidemment

$$L_n(e^x) = e^{-x} L_n(x)\, lg_{n-1}\, x \qquad (n = 1, 2, \ldots)\,, \tag{VI, 4}$$

donc, en posant $\varphi(x) = \dfrac{L_n(x)}{lg_n^{1+s}\, x}$:

$$\frac{\varphi(e^x)\, e^x}{\varphi(x)} = \frac{lg_n^{1+s}\, x}{lg_{n-1}^{s}\, x}\,. \tag{VI, 5}$$

Or, pour $x \longrightarrow \infty$, cette expression tend vers ∞ pour $s \leqq 0$, et vers 0 pour $s > 0$. On voit que le critère B d'Ermakof avec $\Psi(x) = e^x$ permet de décider immédiatement la question de la convergence ou divergence des séries de Morgan-Bertrand.

Quel sera le résultat si l'on pose $\Psi(x) = x^k\ (k > 1)$? On a évidemment les relations

$$k\, x^{k-1} L_2(x^k) = L_2(x)\,, \qquad lg_2(x^k) = \left(1 + \frac{lg\, k}{lg_2\, x}\right) lg_2\, x\,,$$

donc

$$\frac{L_2(x^k)\, k\, x^{k-1}}{lg_2^{1+s}(x^k)} \Bigg/ \frac{L_2(x)}{lg_2^{1+s}\, x} = \left(1 + \frac{lg\, k}{lg_2\, x}\right)^{-1-s}. \tag{VI, 6}$$

(VI, 6) tend vers *un* pour $x \longrightarrow \infty$, de sorte que le critère B de convergence pour $s > 0$ est en défaut pour les séries de Morgan-Bertrand correspondant à $n = 2$. (VI, 6) est < 1 pour $s > -1$ et n'est $\geqq 1$ que pour $s \leqq -1$. Le critère B d'Ermakof ne permet donc de prouver la divergence des séries de Morgan-Bertrand correspondant à $n = 2$ que pour $s \leqq -1$. D'autre part, il résulte immédiatement des relations

$$\frac{k\, x^{k-1}\, x^{1+s}}{x^{k(1+s)}} = k\, x^{-s(k-1)}, \qquad \frac{k\, x^{k-1}\, x\, (lg\, x)^{1+s}}{x^k\, (k\, lg\, x)^{1+s}} = k^{-s}$$

que pour $n = 0$ et $n = 1$ la question de la convergence (ou divergence) des séries de MORGAN-BERTRAND est complètement résolue par le critère B d'Ermakof avec $\Psi(x) = x^k \, (k > 1)$.

VII. Le critère B d'Ermakof et les critères de seconde espèce.

Les critères de seconde espèce reposent sur le fait que si l'on a

$$\frac{a_{\nu+1}}{a_\nu} \leqq \frac{c_{\nu+1}}{c_\nu} \quad (a_\nu, \, c_\nu > 0 \; ; \quad \nu = 1, 2, \ldots) ,$$

la convergence de Σc_ν entraîne celle de Σa_ν, donc la divergence de Σa_ν entraîne la divergence de Σc_ν. On obtient les différentes formes de ce critère par un choix convenable des « séries de comparaison »: la série convergente Σc_ν ou la série divergente Σa_ν.

Or si les a_ν et les c_ν convergent vers 0 en décroissant, le principe suivant est « en général » valable:

Si la convergence de la série de comparaison Σc_ν *s'obtient au moyen d'un critère* B *d'Ermakof avec la fonction conjuguée* $\Psi(\mathrm{x})$, *le même critère d'Ermakof assure directement la convergence de* Σa_ν. *Si la divergence de la série* Σa_ν *s'obtient au moyen d'un critère* B *d'Ermakof, ce même critère assure aussi la divergence de* Σc_ν.

Toutefois, pour les énoncés précis, il faut utiliser des hypothèses supplémentaires. Nous dirons d'une fonction $f(x)$ non nulle à partir d'un x, qu'elle possède *la propriété* E *si l'on a*

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x + \theta)}{f(x)} = 1 \qquad \text{(VII, 1)}$$

uniformément par rapport à θ pour $|\theta| \leqq 1$.

Avec cette notion, nous allons démontrer le lemme suivant:

Lemme. — *Soient* $\mathrm{f(x)}$ *et* $\mathrm{g(x)}$ *deux fonctions positives pour* $\mathrm{x} \geqq \mathrm{x}_0$, *dont l'une au moins jouit de la propriété* E, *tandis que l'autre est ou bien non croissante, ou bien jouit de la propriété* E. *Soient* $\Psi(\mathrm{x})$, $\Phi(\mathrm{x})$ *deux fonctions positives pour* $\mathrm{x} \geqq \mathrm{x}_0$ *avec* $\Psi(\mathrm{x}) \geqq \mathrm{x} + 1$. *Alors si l'on a pour tout entier* $\nu \geqq \mathrm{n}_0$:

$$\frac{f(\nu+1)}{f(\nu)} \leqq \frac{g(\nu+1)}{g(\nu)} \qquad (\nu \geqq n_0), \tag{VII, 2}$$

on a, x *tendant vers l'infini,*

$$\varlimsup_{x\to\infty} \frac{f(\Psi(x))\,\Phi(x)}{f(x)} \leqq \varlimsup_{x\to\infty} \frac{g(\Psi(x))\,\Phi(x)}{g(x)}, \tag{VII, 3}$$

$$\varliminf_{x\to\infty} \frac{f(\Psi(x))\,\Phi(x)}{f(x)} \leqq \varliminf_{x\to\infty} \frac{g(\Psi(x))\,\Phi(x)}{g(x)}. \tag{VII, 4}$$

Démonstration. — Observons d'abord que si l'on a pour deux fonctions A (x) et B (x), positives pour $x \geqq x_0$:

$$\varlimsup_{x\to\infty} \frac{\mathrm{A}(x)}{\mathrm{B}(x)} \leqq 1,$$

il en résulte

$$\varlimsup_{x\to\infty} \mathrm{A}(x) \leqq \varlimsup_{x\to\infty} \mathrm{B}(x),$$

$$\varliminf_{x\to\infty} \mathrm{A}(x) \leqq \varliminf_{x\to\infty} \mathrm{B}(x).$$

Donc les relations (VII, 3) et (VII, 4) résultent de la relation

$$\varlimsup_{x\to\infty} \frac{f(\Psi(x))\,g(x)}{g(\Psi(x))\,f(x)} \leqq 1, \tag{VII, 5}$$

que nous allons démontrer. Posons $[x] = n$, $[\Psi(x)] = \mathrm{N} \geqq n+1$ où le symbole $[x]$ désigne le plus grand entier contenu dans x.

Si $f(x)$ et $g(x)$ jouissent les deux de la propriété E, l'expression

$$\frac{f(\Psi(x))\,g(x)}{f(x)\,g(\Psi(x))} \tag{VII, 6}$$

est équivalente avec $\dfrac{f(\mathrm{N})\,g(n)}{g(\mathrm{N})\,f(n)}$ et cette dernière expression est $\leqq 1$, en vertu de (VII, 2).

Si $f(x)$ est non croissante et $g(x)$ jouit de la propriété E, l'expression (VII, 6) est équivalente à

$$\frac{f(\Psi(x))\,g(n+1)}{f(x)\,g(\mathrm{N})} \leqq \frac{f(\mathrm{N})\,g(n+1)}{f(n+1)\,g(\mathrm{N})} \leqq 1,$$

en vertu de (VII, 2).

Si enfin $f(x)$ jouit de la propriété E et $g(x)$ est non croissante, l'expression (VII, 6) est équivalente à

$$\frac{f(\mathrm{N}+1)\,g(x)}{f(n)\,g(\Psi(x))} \leqq \frac{f(\mathrm{N}+1)\,g(n)}{f(n)\,g(\mathrm{N}+1)} \leqq 1\,.$$

Notre lemme est démontré.

Soit maintenant $\Psi(x)$ une fonction conjuguée satisfaisant à la condition $\Psi(x) \geqq x + 1$. En remplaçant dans le lemme qui vient d'être démontré $\Phi(x)$ par $\Psi'(x)$ on voit que si la convergence de la série $\Sigma g(\nu)$ se démontre au moyen du critère B d'Ermakof correspondant à $\Psi(x)$ il en est de même pour la série $\Sigma f(\nu)$. De même, si la divergence de la série $\Sigma f(\nu)$ se démontre au moyen du critère (I,7) d'Ermakof correspondant à $\Psi(x)$, il en est de même pour $\Sigma g(\nu)$.

Posons en particulier $\Psi(x) = e^x$. Alors les fonctions

$$\mathrm{L}_n(x)\, lg_n^{1+s}\, x \qquad (n = 0, 1, \ldots)$$

jouissent de la propriété E. D'autre part, nous avons vu que le critére B d'Ermakoff (avec $\Psi(x) = e^x$) s'applique directement à toutes ces séries. Ainsi, en interpolant les a_ν entre deux entiers successifs par des fonctions linéaires, il en résulte:

Les critères de seconde espèce utilisant comme série de comparaison une des séries de Morgan-Bertrand sont contenus dans le critère B d'Ermakof pour $\Psi(x) = e^x$ s'il s'agit d'une série $\Sigma\, a_\nu$ à termes non croissants ou bien si l'on a $\dfrac{a_{\nu+1}}{a_\nu} \longrightarrow 1$.

VIII. La sensibilité des critères B d'Ermakof pour les itérées d'une fonction conjuguée.

Nous allons maintenant dire quelques mots sur la sensibilité relative des critères B d'Ermakof correspondant aux différents choix de la fonction conjuguée $\Psi(x)$. A ce sujet, on trouve dans la première note d'Ermakof deux assertions dont les démonstrations vaguement esquissées ne paraissent pas très satisfaisantes. Nous allons montrer que ces énoncés sont inexacts.[1]

[1] E. I, pp. 253-254. L'erreur d'Ermakof consiste en ce qu'il suppose que le quotient $\dfrac{f(\Psi(x))\,\Psi'(x)}{f(x)}$ tend toujours vers une limite qui pourrait être aussi ∞.

Désignons les itérées de la fonction conjuguée $\Psi(x)$ par $\Psi_n(x)$, de sorte qu'on ait

$$\Psi_1(x) = \Psi(x)\ , \quad \ldots\ , \quad \Psi_{n+1}(x) = \Psi(\Psi_n(x)) \qquad (n = 1, 2, \ldots)\ .$$

Alors la *première assertion* d'Ermakof peut être énoncée comme suit:

Les fonctions conjuguées Ψ_n (x) *et* Ψ (x) *donnent une sensibilité identique pour les caractères de convergence et de divergence.*

Ce théorème est inexact. Au contraire, les fonctions itérées $\Psi_n(x)$ $(n > 1)$ donnent une sensibilité en général plus grande que $\Psi(x)$. En effet, on a évidemment

$$\frac{f(\Psi_n(x))}{f(x)}\Psi'_n(x) = \frac{f(\Psi(\Psi_{n-1}(x)))}{f(\Psi_{n-1}(x))}\Psi'(\Psi_{n-1}(x))\ .\ \frac{f(\Psi_{n-1}(x))}{f(x)}\Psi'_{n-1}(x)\ . \qquad \text{(VIII, 1)}$$

Il en résulte que si l'on a

$$\overline{\lim_{x\to\infty}}\ \frac{f(\Psi(x))}{f(x)}\Psi'(x) = q < 1$$

on aura

$$\overline{\lim_{x\to\infty}}\ \frac{f(\Psi_n(x))}{f(x)}\frac{d}{dx}\Psi_n(x) \leqq q\ \overline{\lim_{x\to\infty}}\ \frac{f(\Psi_{n-1}(x))}{f(x)}\frac{d}{dx}\Psi_{n-1}(x)\ ,$$

donc par récurrence

$$\overline{\lim_{x\to\infty}}\ \frac{f(\Psi_n(x))}{f(x)}\frac{d}{dx}\Psi_n(x) \leqq q^n\ .$$

De même, si l'on a à partir d'un x

$$\frac{f(\Psi(x))}{f(x)}\Psi'(x) \geqq 1\ ,$$

il résulte de (VIII, 1) qu'on aura aussi à partir d'un x

$$\frac{f(\Psi_n(x))}{f(x)}\frac{d}{dx}\Psi_n(x) \geqq 1\ .$$

Nous allons maintenant donner un exemple d'une fonction $f(x)$ non croissante à partir d'un x et telle que le critère de convergence B d'Ermakof n'est pas applicable à la série $\Sigma f(\nu)$ pour $\Psi(x) = x^2$, mais devient applicable pour $\Psi_2(x) = x^4$.

A cet effet, formons une suite infinie $x_1, x_2, x_3, \ldots$ en posant

$$x_1 = 3\,, \quad x_2 = 4^4\,, \quad \ldots\,, \quad x_{\nu+1} = (1 + x_\nu)^4 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots)\,.$$

Posons $f(x_1) = 1$ et

$$f(x) = \frac{f(x_\nu)}{(8^{\nu^2}\, lg\, x_\nu)\, x} \qquad \left(x_\nu < x < x_\nu^4\right),$$

$$f(x) = \frac{f(x_\nu)}{\left(8^{\nu^2+\nu}\, lg\, x_\nu\right) x} \qquad \left(x_\nu^4 \leqq x \leqq x_{\nu+1} = (1 + x_\nu)^4\right).$$

Ces relations permettent évidemment de définir la valeur de $f(x)$ par voie de récurrence pour $x \geqq 3$. Il résulte de ces formules que la fonction $f(x)$ ainsi définie est continue, positive et non croissante dans chacun des intervalles (x_ν, x_ν^4), $\langle x_\nu^4, (1 + x_\nu)^4 \rangle$, tandis qu'en passant par le point $x = x_\nu^4$ sa valeur se trouve divisée par 8^ν et en passant par le point x_ν, par $8^{\nu^2} x_\nu\, lg\, x_\nu$.

Considérons le rapport $\dfrac{f(x^2)\, 2\, x}{f(x)}$ pour $x_\nu < x < 1 + x_\nu$; x^2 étant contenu dans l'intervalle (x_ν, x_ν^4), il résulte évidemment

$$\frac{f(x^2)\, 2\, x}{f(x)} = \frac{x \cdot 2\, x}{x^2} = 2\,.$$

On a donc, en posant $\Psi(x) \equiv x^2$,

$$\overline{\lim_{x\to\infty}}\, \frac{f(\Psi(x))\, \Psi'(x)}{f(x)} \geqq 2\,.$$

Pour $\Psi_2(x) = x^4$, on obtient

$$\frac{f(\Psi_2(x))}{f(x)} \frac{d}{dx} \Psi_2(x) = \frac{f(x^4)\, 4\, x^3}{f(x)}\,.$$

Or, en premier lieu, si $x_\nu \leqq x \leqq 1 + x_\nu$, x^4 est située dans l'intervalle $\langle x_\nu^4, x_{\nu+1} \rangle$. On aura donc

$$f(x^4) = \frac{f(x_\nu)}{\left(8^{\nu^2+\nu}\, lg\, x_\nu\right) x^4}\,,$$

donc

$$\frac{f(x^4)\, 4\, x^3}{f(x)} \leqq \frac{x \cdot 4\, x^3}{8^\nu\, x^4} = \frac{4}{8^\nu} \longrightarrow 0 \qquad (x \longrightarrow \infty, \quad x_\nu \leqq x \leqq 1 + x_\nu)\,.$$

En second lieu, si $1 + x_\nu < x < x_{\nu+1}$, x^4 sera situé dans l'intervalle $(x_{\nu+1}, x_{\nu+1}^4)$ de sorte qu'on aura

$$f(x^4) = \frac{f(x_{\nu+1})}{\left(8^{(\nu+1)^2} lg\, x_{\nu+1}\right) x^4},$$

donc

$$\frac{f(x^4)\, 4\, x^3}{f(x)} = \frac{4\, f(x_{\nu+1})}{\left(8^{\nu^2+2\nu+1} lg\, x_{\nu+1}\right) x\, f(x)},$$

et, puisqu'on a en tout cas

$$f(x) \geqq \frac{f(x_\nu)}{\left(8^{\nu^2+\nu} lg\, x_\nu\right) x},$$

il vient

$$\frac{f(x^4)\, 4x^3}{f(x)} \leqq \frac{f(x_{\nu+1})\left(8^{\nu^2+\nu} lg\, x_\nu\right) \cdot 4}{\left(8^{\nu^2+2\nu+1} lg\, x_{\nu+1}\right) f(x_\nu)} = \frac{f(x_{\nu+1})\, lg\, x_\nu}{\left(2 \cdot 8^\nu\, lg\, x_{\nu+1}\right) f(x_\nu)}.$$

Or, on a évidemment pour $\nu \longrightarrow \infty$

$$lg\, x_{\nu+1} \sim 4\, lg\, x_\nu\ , \quad f(x_{\nu+1}) < f(x_\nu)\,,$$

donc

$$\frac{f(x^4)\, 4\, x^3}{f(x)} \longrightarrow 0 \quad (x \longrightarrow \infty,\ \ 1 + x_\nu < x < x_{\nu+1})\ .$$

On a ainsi

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(\Psi_2(x))}{f(x)} \frac{d}{dx} \Psi_2(x) = 0\ ,$$

et le critère B d'Ermakof avec la fonction conjuguée $\Psi_2(x) = x^4$ est applicable à la série $\Sigma f(\nu)$.

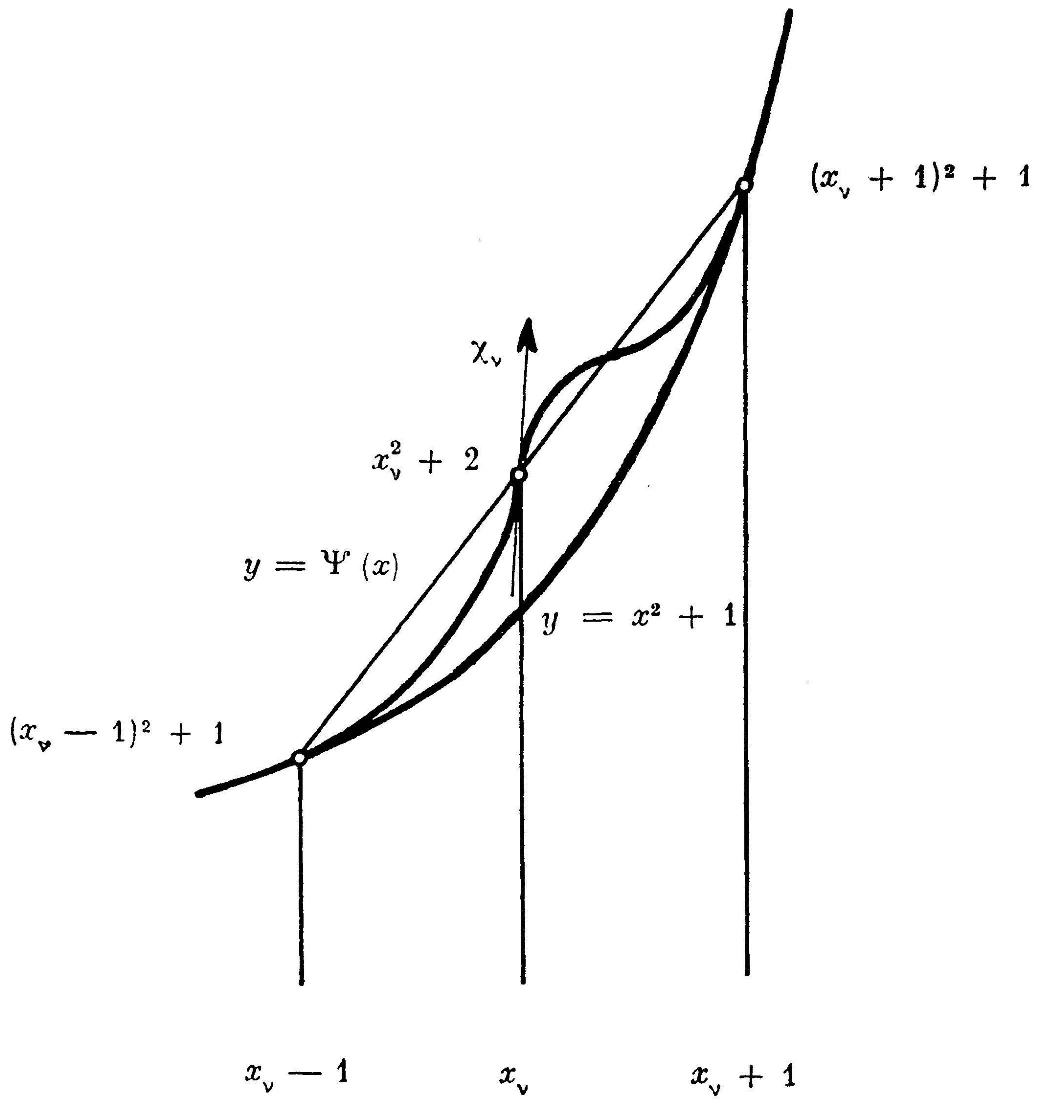
IX. Les fonctions conjuguées auxquelles x + 1 est subordonné.

En second lieu Ermakof donne à l'endroit cité l'énoncé suivant:

« *De deux fonctions conjuguées de première espèce la plus grande est celle qui donne le caractère le plus sensible de convergence ou de divergence.* »

Or cet énoncé est de même inexact. Nous allons construire une fonction conjuguée $\Psi(x)$ qui, pour $x \geqq 3$, est partout $> x^2$, et telle que pour

$$f(x) = \frac{1}{x\,(lg\,x)^2}$$



le critère B de convergence d'Ermakof est applicable avec la fonction conjuguée x^2 et ne l'est pas avec la fonction conjuguée $\Psi(x)$.

A cet effet posons

$$x_\nu = 10\,\nu\,, \quad \chi_\nu = 32\,x_\nu = 320\,\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots)$$

et considérons la courbe $y = x^2 + 1$ $(x \geqq 3)$ qui est situé au-dessus de $y = x^2$. Pour obtenir la courbe $y = \Psi(x)$ nous poserons $\Psi(x) = x^2 + 1$ pour $x \geq 3$ *en dehors* de tout intervalle fermé

$\langle x_\nu - 1, 1 + x_\nu \rangle$. Quant aux intervalles $\langle x_\nu - 1, 1 + x_\nu \rangle$ nous y définirons $\Psi(x)$ comme une fonction continue, constamment croissante et douée d'une dérivée continue, telle qu'on ait $\Psi(x) \geqq x^2 + 1$ ($x \geqq 3$) et

$$\Psi(x_\nu - 1) = (x_\nu - 1)^2 + 1\,, \qquad \Psi(x_\nu + 1) = (x_\nu + 1)^2 + 1\,,$$

$$\Psi'(x_\nu - 1) = 2(x_\nu - 1)\,, \qquad \Psi'(x_\nu + 1) = 2(x_\nu + 1)\,,$$

$$\Psi(x_\nu) = x_\nu^2 + 2\,, \qquad \Psi'(x_\nu) = \chi_\nu\,.$$

On remplace donc l'arc correspondant de la courbe $y = x^2 + 1$ par un arc qui est tangent à $y = x^2 + 1$ aux points $x = x_\nu \pm 1$, qui passe par le point $(x_\nu, 2 + x_\nu^2)$ et y a une tangente à coefficient angulaire χ_ν. On voit immédiatement qu'il est possible de trouver un tel arc en étudiant la figure ci-contre. En effet, pour qu'il soit possible de construire cet arc de $y = \Psi(x)$ situé entre les abscisses $x_\nu - 1$ et $1 + x_\nu$, il suffit que l'arc correspondant de $y = x^2 + 1$ soit convexe d'en bas et que l'on ait

$$\Psi(x_\nu - 1) < \Psi(x_\nu) < \Psi(x_\nu + 1)\,.$$

On a pour notre fonction $f(x)$:

$$\frac{f(x^2)\,2x}{f(x)} = \frac{x\,(lg\,x)^2 \cdot 2\,x}{x^2\,(lg\,x^2)^2} = \frac{1}{2} < 1 \qquad (x \geqq 3)\,.$$

Donc le critère de convergence B d'Ermakof est satisfait pour la fonction conjuguée x^2. D'autre part, on a

$$\frac{f(\Psi(x_\nu))\,\Psi'(x_\nu)}{f(x_\nu)} = \frac{f(2 + x_\nu^2)\,\chi_\nu}{f(x_\nu)}$$

$$= \frac{x_\nu\,(lg\,x_\nu)^2\,32\,x_\nu}{(2 + x_\nu^2)\left(lg\left(2 + x_\nu^2\right)\right)^2} > \frac{32\,x_\nu^2\,(lg\,x_\nu)^2}{2\,x_\nu^2\left(lg\,x_\nu^4\right)^2} = 1\,,$$

et le critère B de convergence d'Ermakof n'est pas satisfait par la fonction conjuguée $\Psi(x)$.

Toutefois, il est possible d'établir quelques énoncés dans cet ordre d'idées. Nous nous bornerons dans cette discussion au *critère* B *de convergence* et supposerons que $f(x)$ est une fonction *non croissante* de x.

Nous dirons alors qu'une fonction conjuguée $\Psi(x)$ est *subordonnée* à une fonction $\Psi_1(x)$ si, pour une fonction $f(x)$ positive et non croissante, l'inégalité

$$\overline{\lim_{x\to\infty}} \frac{f(\Psi(x))\,\Psi'(x)}{f(x)} < 1$$

entraîne toujours l'inégalité

$$\overline{\lim_{x\to\infty}} \frac{f(\Psi_1(x))\,\Psi_1'(x)}{f(x)} < 1 \,.$$

La fonction conjuguée la plus simple étant $x + 1$, il est naturel de se demander à quelles fonctions conjuguées $\Psi(x)$ elle est subordonnée. Tout d'abord $x + 1$ est subordonné à $x + \alpha$ $(\alpha > 1)$. En effet, puisqu'on a par hypothèse:

$$f(x + \alpha) \leqq f(x + 1)$$

on a évidemment

$$\frac{f(x+\alpha)}{f(x)} \leqq \frac{f(x+1)}{f(x)} \,.$$

Plus généralement, si pour la fonction conjuguée $\Psi(x)$ on a à partir d'un x:

$$\Psi(x) - x \geqq 1 \,, \qquad \overline{\lim_{x\to\infty}} \Psi'(x) \leqq 1 \,,$$

$x + 1$ est subordonné à $\Psi(x)$. En effet, on a d'après les hypothèses que nous avons faites

$$\overline{\lim_{x\to\infty}} \frac{f(\Psi(x))\,\Psi'(x)}{f(x)} \leqq \overline{\lim_{x\to\infty}} \frac{f(\Psi(x))}{f(x)} \leqq \overline{\lim_{x\to\infty}} \frac{f(x+1)}{f(x)} \,.$$

Un autre énoncé relatif à la fonction conjuguée $x + 1$ est le suivant:

$x + 1$ est subordonné à une fonction conjuguée $\Psi(x)$ si l'on a

$$\Psi(x) - x \longrightarrow \infty \quad (x \longrightarrow \infty) \,, \qquad \overline{\lim_{x\to\infty}} \frac{lg\,\Psi'(x)}{\Psi(x) - x} \leqq 0 \,,$$

En effet, supposons que l'on ait pour $x \geqq x_0$

$$\frac{f(x+1)}{f(x)} \leqq q = e^{-\varepsilon} < 1 \,.$$

Alors on a pour tout entier positif n:

$$\frac{f(x+n)}{f(x)} \leqq e^{-\varepsilon n}.$$

Or, soit $n = [\Psi(x) - x]$. On obtient

$$\frac{f(\Psi(x))\,\Psi'(x)}{f(x)} \leqq \frac{f(x+n)\,\Psi'(x)}{f(x)} \leqq e^{\varepsilon}\, e^{-\varepsilon[\Psi(x)-x]} \cdot \Psi'(x).$$

D'autre part, on a à partir d'un x

$$lg\,\Psi'(x) \leqq \frac{\varepsilon}{2}[\Psi(x) - x], \qquad \Psi'(x) \leqq e^{\frac{\varepsilon}{2}[\Psi(x)-x]},$$

donc

$$e^{-\varepsilon[\Psi(x)-x]} \cdot \Psi'(x) \leqq e^{-\frac{\varepsilon}{2}[\Psi(x)-x]} \longrightarrow 0, \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

X. Les fonctions conjuguées auxquelles x^k est subordonné.

Nous allons maintenant établir une condition suffisante pour que $x^k\,(k > 1)$ soit subordonné à la fonction conjuguée $\Psi(x)$ pour chaque k:

Si la fonction conjuguée $\Psi(x)$ satisfait aux deux conditions

$$\frac{\Psi'(x)}{\Psi(x)\,(lg\,\Psi(x))^{1+\delta}} \longrightarrow 0, \qquad \frac{lg\,x}{lg\,lg\,\Psi(x)} \longrightarrow 0 \qquad (x \longrightarrow \infty) \tag{X, 1}$$

pour chaque $\delta > 0$, la fonction conjuguée x^{k} *est subordonnée à* $\Psi(x)$ *pour chaque* $\mathrm{k} > 1$.

Démonstration. — On a à partir d'un x

$$\frac{f(x^k)\,k\,x^{k-1}}{f(x)} \leqq q = e^{-\varepsilon} < 1;$$

il en résulte pour chaque entier positif n

$$\frac{f\left(x^{k^n}\right) k^n\, x^{k^n}}{x\,f(x)} \leqq e^{-\varepsilon n}. \tag{X, 2}$$

Or, choisissons l'entier n en fonction de x de façon que l'on ait

$$x^{k^{n+1}} > \Psi(x) \geqq x^{k^n}. \tag{X, 3}$$

On a alors, $\Psi(x)$ étant continue, pour un certain $\overline{x}$

$$\Psi(x) = \overline{x}^{k^n},$$

où évidemment

$$x \leqq \overline{x} < x^k. \tag{X, 4}$$

En appliquant (X, 2) à $\overline{x}$, on aura donc

$$\frac{f(\Psi(x))\, k^n\, \Psi(x)}{\overline{x}\, f(\overline{x})} \leqq e^{-\varepsilon n},$$

ce que nous pouvons encore écrire

$$\frac{f(\Psi(x))\, \Psi'(x)}{f(x)} \leqq e^{-\varepsilon n} \frac{f(\overline{x})}{f(x)}\, \overline{x}\, \frac{\Psi'(x)}{\Psi(x)}\, \frac{1}{k^n}. \tag{X, 5}$$

Or, $\overline{x}$ étant $\geqq x$ d'après (X, 4) on aura $f(\overline{x})/f(x) \leqq 1$. D'autre part, il résulte de (X, 3)

$$k^{n+1} > \frac{lg\, \Psi(x)}{lg\, x}, \tag{X, 6}$$

donc

$$\frac{1}{k^n} < k \frac{lg\, x}{lg\, \Psi(x)}.$$

On obtient donc en introduisant cette borne dans l'expression de droite de (X, 5) et en remplaçant $\overline{x}$ par sa borne supérieure x^k:

$$\frac{f(\Psi(x))\, \Psi'(x)}{f(x)} \leqq e^{-\varepsilon n}\, k\, x^k \frac{lg\, x}{lg\, \Psi(x)} \frac{\Psi'(x)}{\Psi(x)}. \tag{X, 7}$$

On a à partir d'un x par hypothèse

$$\Psi'(x) \leqq \Psi(x)\, (lg\, \Psi(x))^{1+\delta},$$

avec

$$\delta = \frac{\varepsilon}{2\, lg\, k}, \tag{X, 8}$$

donc, en vertu de (X, 7)

$$\frac{f(\Psi(x))\, \Psi'(x)}{f(x)} \leqq e^{-\varepsilon n}\, k\, x^k\, lg\, x\, (lg\, \Psi(x))^{\delta}. \tag{X, 9}$$

D'autre part, on a d'après (X, 6)

$$n > \frac{lg \dfrac{lg\, \Psi(x)}{lg\, x}}{lg\, k} - 1\,,$$

donc

$$e^{-\varepsilon n} \leqq e^{\varepsilon} \left(\frac{lg\, \Psi(x)}{lg\, x}\right)^{-\frac{\varepsilon}{lg\, k}},$$

par suite, d'après (X, 8),

$$e^{-\varepsilon n} \leqq e^{\varepsilon} \left(\frac{lg\, x}{lg\, \Psi(x)}\right)^{2\delta}.$$

En introduisant cette borne dans (X, 9) on obtient

$$\frac{f(\Psi(x))\, \Psi'(x)}{f(x)} \leqq k\, e^{\varepsilon}\, x^{k}\, \frac{(lg\, x)^{1+2\delta}}{(lg\, \Psi(x))^{\delta}}. \tag{X, 10}$$

Or on a, en vertu de (X, 1) à partir d'un x:

$$\delta\, lg\, lg\, \Psi(x) > (k+1)\, lg x\,, \quad (lg\, \Psi(x))^{\delta} > x^{k+1}\,.$$

L'expression de droite de (X, 10) est donc à partir d'un x

$$\leqq k\, e^{\varepsilon}\, \frac{(lg\, x)^{1+2\delta}}{x}$$

et tend vers 0 avec $x \longrightarrow \infty$. x^k est donc bien subordonné à $\Psi(x)$.

Nos conditions (X, 1) sont par exemple satisfaites pour

$$\Psi(x) = e^{e^{x}}\,, \quad \Psi(x) = e^{e^{e^{x}}}\,, \quad \Psi(x) = e^{e^{(lg\, x)^2}}\,.$$

XI. Quelques observations sur le théorème A.

Nous établirons enfin quelques propositions supplémentaires relatives au critère A d'Ermakof.

α) *Soient* $\Psi(x)$ *et* $\psi(x)$ *deux fonctions positives, continues et dérivables pour* $0 < x_0 \leqq x < \infty$ *et telles que l'on ait*

$$\Psi(x) \longrightarrow \infty\,, \quad \psi(x) \longrightarrow \infty \quad (x \longrightarrow \infty)$$

et que $\Psi'(x)$ et $\psi'(x)$ *soient positifs et sommables dans tout sous-intervalle fini de* $\langle x_0, \infty)$. *Soit* $f(x)$ *positif pour* $x \geqq x_0$ *et sommable dans tout sous-intervalle fini de* $\langle x_0, \infty)$. *Supposons, qu'il existe un* q $(0 < q < 1)$ *tel que l'on ait*

$$f(\Psi(x))\,\Psi'(x) \leqq q\, f(\psi(x))\,\psi'(x) \qquad (x \geqq x_0)\,. \tag{XI, 1}$$

Alors on a ou bien pour tout $x \geqq x_0$: $\Psi(x) > \psi(x)$, *ou bien à partir d'un* x: $\Psi(x) < \psi(x)$, *suivant que l'intégrale*

$$\int_{x_0}^{\infty} f(x)\,dx \tag{XI, 2}$$

est convergente ou divergente.

Démonstration. — Il résulte de (XI, 1) pour $x_0 \leqq x' \leqq x''$

$$\int_{x'}^{x''} f(\Psi(x))\,\Psi'(x)\,dx \leqq q \int_{x'}^{x''} f(\psi(x))\,\psi'(x)\,dx\,,$$

c'est-à-dire

$$\int_{\Psi(x')}^{\Psi(x'')} f(x)\,dx \leqq q \int_{\psi(x')}^{\psi(x'')} f(x)\,dx\,. \tag{XI, 3}$$

Donc, si (XI, 2) converge:

$$\int_{\Psi(x')}^{\infty} f(x)\,dx \leqq q \int_{\psi(x')}^{\infty} f(x)\,dx < \int_{\psi(x')}^{\infty} f(x)\,dx\,;$$

de sorte qu'on a pour chaque $x' \geqq x_0$

$$\Psi(x') > \psi(x')\,.$$

Supposons d'autre part que (XI, 2) soit divergente. Alors nous allons démontrer qu'il est impossible que pour une suite x_ν avec $x_\nu > x_0$ $(\nu > 0)$, $x_\nu \longrightarrow \infty$ on ait

$$\Psi(x_\nu) > \psi(x_\nu)\,. \tag{XI, 4}$$

Car on il résulterait de (XI, 4) d'après (XI, 1)

$$\int_{x_0}^{x_\nu} f(\Psi(x))\,\Psi'(x)\,dx \leqq q \int_{x_0}^{x_\nu} f(\psi(x))\,\psi'(x)\,dx\,,$$

$$\int_{\Psi(x_0)}^{\Psi(x_\nu)} f(x)\,dx \leqq q \int_{\psi(x_0)}^{\psi(x_\nu)} f(x)\,dx\,,$$

donc, d'après (XI, 4):

$$\int_{\Psi(x_0)}^{\Psi(x_\nu)} f(x)\,dx \leqq q \int_{\psi(x_0)}^{\Psi(x_\nu)} f(x)\,dx \leqq q \left(\int_{\Psi(x_0)}^{\Psi(x_\nu)} f(x)\,dx + \int_{\psi(x_0)}^{\Psi(x_0)} f(x)\,dx \right)\,,$$

et, puisque $0 < q < 1$,

$$(1-q) \int_{\Psi(x_0)}^{\Psi(x_\nu)} f(x)\,dx \leqq q \int_{\psi(x_0)}^{\Psi(x_0)} f(x)\,dx\,, \quad \int_{\Psi(x_0)}^{\Psi(x_\nu)} f(x)\,dx \leqq \frac{q}{1-q} \int_{\psi(x_0)}^{\Psi(x_0)} f(x)\,dx\,,$$

et l'intégrale (XI, 2) serait convergente puisque $\Psi(x_\nu)$ tend vers l'infini, C.Q.F.D.

β) *Supposons que dans les hypothèses de la proposition* α) *on ait pour* $x \geqq x_0$

$$x f(x) \leqq c\,, \quad \Psi(x) \geqq \gamma\, \psi(x) \quad (x \geqq x_0) \tag{XI, 5}$$

pour une constante positive c *et une constante positive* $\gamma \leqq 1$. *Alors l'intégrale* (XI, 2) *est convergente et l'on a*

$$\Psi(x) > \psi(x) \quad (x \geqq x_0)\,.$$

Démonstration. — On a pour $x \geqq x_0$ comme dans la démonstration de (XI, 3)

$$\int_{\Psi(x_0)}^{\Psi(x)} f(x)\,dx \leqq q \int_{\psi(x_0)}^{\psi(x)} f(x)\,dx\,. \tag{XI, 6}$$

D'autre part, on a

$$\int_{\Psi(x_0)}^{\Psi(x)} f(x)\,dx = \int_{x_0}^{\psi(x)} f(x)\,dx - \int_{\Psi(x)}^{\psi(x)} f(x)\,dx - \int_{x_0}^{\Psi(x_0)} f(x)\,dx\,,$$

$$\int_{\psi(x_0)}^{\psi(x)} f(x)\,dx = \int_{x_0}^{\psi(x)} f(x)\,dx - \int_{x_0}^{\psi(x_0)} f(x)\,dx\,\cdot$$

Donc en introduisant ces expressions dans (XI, 6) et en résolvant l'inégalité obtenue par rapport à $\int_{x_0}^{\psi(x)} f(x)\,dx$:

$$(1-q)\int_{x_0}^{\psi(x)} f(x)\,dx \leqq \int_{\Psi(x)}^{\psi(x)} f(x)\,dx + \int_{x_0}^{\Psi(x_0)} f(x)\,dx - q\int_{x_0}^{\psi(x_0)} f(x)\,dx\,.$$

Ici on a pour la première intégrale de droite d'après (XI, 5):

$$\int_{\Psi(x)}^{\psi(x)} f(x)\,dx \leqq \int_{\gamma\psi(x)}^{\psi(x)} f(t)\,dt \leqq c\int_{\gamma\psi(x)}^{\psi(x)} \frac{dt}{t} = c\,lg\,\frac{1}{\gamma}\,.$$

Donc l'intégrale $\int_{x_0}^{\infty} f(x)\,dx$ reste bornée pour $x \longrightarrow \infty$ et (XI, 2) est convergente.

γ) *Remplaçons dans les hypothèses de la proposition* α) *l'inégalité* (XI, 1) *par*

$$f(\Psi(x))\,\Psi'(x) \geqq f(\psi(x))\,\psi'(x) \qquad (x \geqq x_0) \tag{XI, 7}$$

et supposons en plus que l'on ait pour un $x_1 \geqq x_0$ *convenablement choisi*

$$\Psi(x_1) > \psi(x_1)\,.$$

Alors l'intégrale (XI, 2) *est divergente.*

Démonstration. — On a pour $x > x_1 \geqq x_0$ d'après (XI, 7)

$$\int_{x_1}^{x} f(\Psi(x))\,\Psi'(x)\,dx = \int_{\Psi(x_1)}^{\Psi(x)} f(x)\,dx \geqq \int_{x_1}^{x} f(\psi(x))\,\psi'(x)\,dx = \int_{\psi(x_1)}^{\psi(x)} f(x)\,dx\,,$$

donc

$$\int_{\psi(x)}^{\Psi(x)} f(x)\,dx \geqq \int_{\psi(x_1)}^{\Psi(x_1)} f(x)\,dx\,.$$

Mais alors l'intégrale de gauche serait pour tout $x > x_1$ supérieure à la constante positive

$$\int_{\psi(x_1)}^{\Psi(x_1)} f(x)\,dx$$

et l'intégrale (XI, 2) ne pourrait converger d'après le critère de Bolzano-Cauchy.