Enquête instituée par la Commission internationale de l'enseignement mathématique (C.I.E.M.), a l'occasion du Congrès d'Amsterdam (1954), sur le thème suivant:

LE RÔLE DES MATHÉMATIQUES ET DU MATHÉMATICIEN A L'ÉPOQUE CONTEMPORAINE

Rapport présenté le 8 septembre 1954 à Amsterdam au Congrès international des mathématiciens [1]

G. Kurepa, Zagreb

---

1. *Origine de l'enquête.* — Partant de l'idée que l'enseignement des mathématiques à une époque donnée est intimement lié avec le rôle que les mathématiques et les mathématiciens jouent à l'époque en question, la C.I.E.M. avait décidé le 20 octobre 1952 à la réunion de Genève, et le 21 février 1953 à la réunion de Paris, d'entreprendre une enquête internationale portant sur le thème: « Le rôle des mathématiques et du mathématicien à l'époque actuelle », sachant qu'une enquête pareille fournirait des résultats précieux contribuant aussi à examiner de plus près le problème de l'éducation mathématique prise comme un tout [2]. Bien entendu, une enquête pareille peut être faite à n'importe quelle époque et concernant n'importe quelle science ou art. Les raisons pour lesquelles la C.I.E.M. avait proposé l'enquête en question consistent dans le fait qu'on assiste à l'heure actuelle à des acquisitions vraiment révolution-

---

[1] Le rapport est paru en anglais dans les *Actes du Congrès international des mathématiciens*, Amsterdam, 1954, t. I.

[2] La seconde enquête de la C.I.E.M. concerna la problématique de l'enseignement mathématique dans la région critique de jonction entre le degré moyen et le degré supérieur, âges: 16-21 ans.

naires au sein des mathématiques et des sciences en général (cf. n° 7 ci-après).

2. *Lettre-circulaire et questionnaire concernant l'enquête.* — Au début de 1954, le Comité exécutif de la C.I.E.M. a fait connaître son projet par une lettre-circulaire [1] (voir l'annexe I ci-après). De plus, pour détailler un peu l'enquête, on avait établi un questionnaire (cf. l'annexe II ci-après) comportant une vingtaine de questions et touchant presque tous les problèmes des rapports des mathématiques avec d'autres activités humaines.

Le questionnaire fut diffusé d'une façon restreinte, mais il sera porté à la connaissance de tous, en demandant la collaboration d'organisations et de spécialistes variés; nous pouvons bien espérer que dans les années qui sont devant nous on aura des contributions très importantes et très suggestives, qui pourront être réunies en un livre.

3. *Rapporteur général. Rapporteurs nationaux. Contributions futures.* — En qualité de rapporteur de la C.I.E.M. sur le sujet en question, je suis heureux de déclarer que l'enquête fut accueillie très favorablement par beaucoup de personnalités et d'organisations. Au nom de la C.I.E.M. nous exprimons nos remerciements à tous ceux qui ont contribué ou qui contribueront encore à l'étude en question. Les sous-comités nationaux de la C.I.E.M. qui prirent une part active dans l'enquête sont les suivants:

Pays	Rapporteur	Titre de rapport [2]
1. Allemagne	E. Kamke	*Die Rolle der Mathematik im heutigen Leben*, 22 pages.
2. Autriche	O. Weinberger	*Ueber die Anwendung der Mathematik auf Staatswissenschaften*, 39 p. écrites à la main + 13 p. de remarques [3], en tout 13 pages imprimées.

[1] Voir *Nouvelles mathématiques internationales*, n°s 27/8, p. 8 (1953); n°s 31/2, pp. 3-4 (1954); *L'Enseignement mathématique*, XL, 75 (1955).

[2] A propos de ces petits changements concernant la dénomination du thème, on peut remarquer que le titre bien approprié pourrait être « Le rôle des mathématiques et du mathématicien au début de l'ère atomique ».

[3] Un sujet pareil nous fut transmis par Wassily Leontieff, Mathematics in Economics (voir *Bull. Amer. Math. Soc.*, 60, 215-233 (1954).

3. France	G. Darmois	*Le rôle du mathématicien dans la vie contemporaine*, 10 p.
4. Hollande	D. van Dantzig	*The function of mathematics in modern society and its consequences for the teaching of mathematics*, 9 p.
5. Italie	G. Ascoli	*Le rôle de la mathématique et du mathématicien dans la vie contemporaine*, 8 p.
6. U.S.A.	A. M. Gleason	*The expanding role of mathematics*, 4 p.

4. *Définition des mathématiques.* — Lorsqu'on parle de mathématiques, on est tenté de les définir. A l'époque actuelle et pour nous qui sommes situés au sommet des mathématiques, il paraît *illusoire* de vouloir donner une *définition explicite* des mathématiques. D'une façon analogue, il est impossible de donner une définition explicite de: logique, nombre, matière, force, électricité, arts, beauté, justice, etc.

A ce propos, nous tenons à dire ceci:

Depuis l'époque hellénique, nous apprécions la méthode déductive comme l'une des principales en mathématiques. Sur ce point *on exagère* sans doute. Les déductions pures et complètes sont très rares dans la nature et la vie. C'est plutôt un enchevêtrement entre l'inductif et le déductif qui se présente. En jurisprudence, on a affaire à une certaine déduction rétrograde. Les déductions poussées à l'extrême peuvent donner naissance à des résultats presque paradoxaux. C'est pourquoi en mathématiques et dans l'enseignement de mathématiques, il faut faire des tentatives pour donner une place correcte et non exagérée à la méthode déductive pure et simple.

Peut-être serait-il mieux de demander

Ne pas faire trop illogiquement

que de demander

Faire (agir) strictement logiquement.

Dans la vie on rencontre peu de logique stricte.

D'autre part, en faisant des mathématiques on les définit (définitions implicite et inachevée).

Personnellement, je considère que les mathématiques embrassent: 1° la logique, 2° l'arithmétique (au sens large englobant l'analyse, l'algèbre, etc.), 3° la géométrie, 4° la mécanique et la physique mathématique.

La théorie des ensembles et la logique constituent deux accès à la mathématique. En particulier, la notion d'ensemble et celle de transformation (processus) sont à la base de la mathématique actuelle; la notion d'organisations ou structures variées d'ensembles se rencontre partout en mathématiques (structures algébriques, topologiques, relations, etc.) reflétant ce qu'on rencontre dans la nature et dans la société. Une variété énorme de disciplines mathématiques existe d'ores et déjà.

5. *Définition du mathématicien.* — Disons approximativement que les mathématiciens sont les gens s'occupant de mathématiques (recherches mathématiques théoriques, applications, enseignement, etc.). Actuellement, au milieu du vingtième siècle, officiellement on devient mathématicien après avoir fréquenté durant seize-vingt ans des écoles variées et après y avoir subi des examens variés mathématiques. On devient ainsi: mathématicien, statisticien, professeur, maître, ingénieur, docteur (en sciences mathématiques); sans doute, encore d'autres dénominations sont en usage dans différents pays.

Un petit aspect de la manière dont on devient mathématicien peut être vu dans les panneaux synoptiques présentés à l'Exposition pédagogique du Congrès actuel. Il faut noter en particulier que de hautes écoles, collèges, facultés, universités, académies, instituts mathématiques, etc. délivrent différents diplômes de qualifications mathématiques.

6. *L'essor des mathématiques.* — Le nombre des mathématiciens et des institutions mathématiques et d'institutions où l'on enseigne les mathématiques a considérablement augmenté depuis une vingtaine d'années, et cela aussi bien absolument que relativement. On peut dire que plus de cinq mille mathématiciens écrivent dans mille périodiques de mathématiques.

Pour le moment nous ne disposons pas de chiffres exacts mais il serait bien intéressant d'effectuer une enquête pour connaître le nombre de mathématiciens et le nombre d'heures d'enseignement des mathématiques dans divers pays. Le nombre des mathématiciens au sens large — y compris les mathématiciens pratiques que sont les ingénieurs — est extrêmement élevé. A ce propos, il est bien instructif de mentionner au moins les sociétés suivantes dans le but de se rendre compte de la diversité des matières traitées par des mathématiciens:

a) The International Association for Symbolic Logic, éditant *The Journal of Symbolic Logic*; cette année le volume 19 est en publication;

b) The International Econometric Society (1932) avec 2500 membres, publiant *Econometrica.*

De plus, des sociétés sont fondées dont l'existence n'était guère à prévoir autrefois; ainsi, par exemple aux U.S.A., on a:

c) 1. Industrial Mathematical Society (1949, « to bring together persons who use Mathematics in engineering in order to *learn* more about and to *extend* the field of mathematics as well as to *develop* new procedures for the solution of problems that arise in modern industrial research »);

c) 2. The Biometric Society (1947);

c) 3. Psychometric Society (by 1930);

c) 4. Society for Quality Control (1946) avec 6000 membres en 1953, etc.

Tout cela sans parler des sociétés bien connues: The American Statistical Association, The American Mathematical Society et The Mathematical Association of America.

6.2. *Publications.* — La dissémination du savoir mathématique s'effectue par des livres et des périodiques dont le nombre est toujours croissant; ainsi, par exemple dans les *Mathematical Reviews* ou dans le *Zentralblatt für Mathematik*, on compte environ neuf cents périodiques. Presque chaque pays possède une académie des sciences, société scientifique faisant des mathématiques et publiant des résultats mathématiques (originaux ou d'information). De plus, le nombre des périodiques destinés aux mathématiques élémentaires et moyennes est aussi considérable. On a actuellement les cinq périodiques que voici donnant un aperçu de l'activité globale en mathématique:

Bulletin analytique (fondé en 1939);
Zentralblatt für Mathematik (fondé en 1931);
Mathematical Reviews (fondés en 1939);
Boletin del Centro de documentación científica y técnica (fondé en 1952), México;
Referativni Žurnal Matematika, Moscou (fondé en 1954).

6.3. *Laboratoires mathématiques.* — Dans de grandes entreprises économiques, industrielles, commerciales, etc., on a créé des *laboratoires mathématiques. C'est un fait sans précédent dans l'histoire de l'humanité.* En particulier, auprès de grandes machines à calculer il y a toujours des ingénieurs, des mathématiciens et des techniciens. Le principal rôle du mathématicien est parmi d'autres celui du « programmeur »: préparer les éléments susceptibles d'être « digérés » par la machine pour qu'elle puisse fournir le résultat palpable: le nombre ou la courbe, englobant une certaine loi ou certaines données, que le savant, l'ingénieur, l'entrepreneur, le législateur désire.

Pour illustrer la chose, indiquons ceci: c'est vers 1935 que la Bell Company a pour la première fois introduit le *quality control.* Pendant la guerre, cet emploi s'est répandu dans d'autres industries. En U.S.A., en 1952, on a employé cinquante fois plus de statisticiens pour le quality control qu'en 1945. En 1946, on y a fondé *American Society for Quality control* comptant en 1953 déjà six mille membres.

6.4. *Instituts mathématiques.* — Dans plusieurs Etats (ou villes) on a déjà fondé des instituts (d'Etat) de mathématiques ou des centres mathématiques et cela indépendamment (Autriche, U.S.A.) ou au sein d'autres établissements d'Etat: Académies (U.S.S.R., Allemagne, Pologne, Yougoslavie,...) centres de recherches (Italie, France, Hollande), instituts de physique (Angleterre, Suède), etc. A ce propos, rappelons que la première institution internationale projetée par l'UNESCO fut l'idée conçue en 1946 de créer un Centre mathématique international; le Centre serait situé à Rome; la convention concernant sa fondation n'est pas encore ratifiée par le nombre nécessaire de pays.

6.5. *Emplois de mathématiciens.* — Encore vers 1930, c'était bien rare qu'un mathématicien fut employé comme tel en dehors de l'enseignement, ou de recherches scientifiques, ou de l'assurance. Actuellement, il en est bien autrement. Les données exactes pour un pays fortement industrialisé seraient extrêmement intéressantes. En nous reportant au rapport de E. Kamke, nous reproduisons ici la distribution d'emploi de trente et un « mathématiciens diplômés » (parmi quarante-deux en tout) qui en 1946-1953 ont terminé leurs études à la *Technische Hochschule* de Stuttgart[1]:

1. Enseignement secondaire	7
2. Assistant	3
3. Mathématicien (entreprise électrique) . .	6
4. Assurance	2
5. Construction en acier	2

Dans les spécialités suivantes figurait l'un d'eux:

Professeur dans une école de machines;
Industrie optique;
Bureau d'ingénieur d'électricité;
Constructions civiles;
Industrie automobile
Propriétaire d'un bureau de construction;
Industrie des gommes;
Direction des impôts;
Statistique;
Société fiduciaire
Institut d'astronautique.

[1] Dans le même rapport, on apprend que c'est en 1942 qu'en Allemagne, alors que la guerre battait son plein, on a introduit les « Diplomprüfung », à côté des « promotions » et « Lehramtsprüfung ». « Die Ausbildung der Diplom-Mathematiker hat das Ziel, die Studierenden mit dem mathematischen Rüstzeug zu versehen, das zur Lösung der in den Anwendungsgebieten vorkommenden Aufgaben entwickelt worden ist. Die Studierenden sollen ferner so weit mit einigen dieser Anwendungsgebieten selbst vertraut werden, dass sie im Stande sind, deren Probleme mathematisch zu fassen und zu behandeln. » (Aus der Diplomprüfungsordnung der mathem.-naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität Tübingen.)

7. *Nouvelles acquisitions fondamentales:* 7.1. *Ensembles. Correspondance (fonction). Logique.* — De la vie quotidienne s'est dégagée la notion fondamentale d'ensemble. Les notions fondamentales de: fonction, correspondances, relations sont basées sur celles d'ensemble [1] et d'organisation d'ensembles (structures variées). La vie sociale est devenue une source d'inspiration pour les mathématiciens (ordre, groupe, classe, etc.). La théorie des ensembles et la *logique* présentent deux voies d'accès aux mathématiques.

Le concept ensembliste dans le domaine de l'énergie et des radiations donne naissance aux quanta et photons. Là, on en est arrivé à l'exigence d'une révision totale de nos conceptions acquises, concernant le problème de la connaissance elle-même; on connaît bien la problématique de la mécanique quantique dont un grand nombre de notions ont un caractère purement mathématique.

7.2. *Optimum à côté de maximum. Dépendance stochastique.* — La dépendance stochastique s'est cristallisée et en généralisant la relation fonctionnelle classique, elle vient de devenir un moyen extrêmement puissant pour l'explication des phénomènes naturels, économiques, sociaux et humains. Au cheminement extrémal de la macrophysique vient de s'ajouter la notion de cheminement optimum de la microphysique, de la biologie et des sciences économico-sociales. La vérité statistique ou probabiliste, l'indéterminisme, les logiques multivalentes se sont ajoutées à la causalité stricte et à la logique d'Aristote.

7.3. *Nouvelles machines à calculer.* — Grâce aux nouvelles manières de représenter les chiffres par des effets physiques variés (impulsions électriques, charges électriques, magnétiques, etc.), la réalisation physique des nombres et des calculs ordinaires par des moyens *impondérables*, sans inertie mécanique, est devenue possible. Cela a commencé après 1930 et là on doit citer les noms de Aiken, Couffignal, Eckert, Williams, etc. Cela entraînera l'une des plus grandes révolutions dans le domaine de la pensée humaine. Les mathématiques se sont rapprochées

---

[1] Remarquons que, d'après J. von Neumann, la notion d'ensemble peut inversement être déduite de celle de fonction (cf. *Mathematische Zeitschrift*, 27, 669-752 (1928)).

de la physique et de la psychologie et on est en train d'examiner le mécanisme du «penser», du «calculer» et d'autres fonctions psychiques et intellectuelles. Les machines calculatrices et les machines sensibles aux formes et aux dimensions ont apparu. Comme corollaire, l'*analyse numérique* est en plein essor avec ses propres problèmes et ses propres règles (par exemple si l'on opère à un nombre déterminé de décimales, les lois d'association ordinaires ne sont plus strictement valables). La durée d'opérations arithmétiques est de l'ordre de quelques microsecondes.

Voici un tableau nous disant combien dure la multiplication de deux nombres décimaux à huit chiffres:

Crayon et papier	5 minutes (si l'on exige que la réponse soit correcte)
Machine de table	10 secondes
Machines ordinaires à cartes perforées	2 secondes
Machines électroniques . .	100 m sec-200 μ sec.

7.4. *Individuel- collectif. Concret- général.* — Dans la mathématique contemporaine, ce problème est étudié surtout de deux points de vue bien distincts: statistiquement et topologiquement. Dans l'étude statistique, chaque individu joue un rôle théorique, mais, concrètement, en ce qui concerne la prévision, on ne peut rien dire puisque le *hasard n'a ni mémoire ni conscience.* La statistique est devenue une science mathématique immense ayant des applications partout: à partir de la physique jusqu'à la médecine clinique, sciences humaines et aux arts. Dans l'étude de l'homme, son rôle est considérable encore pour la raison que l'expérimentation sur l'homme ne se pratique pas. Dans l'enquête, la plupart mettaient l'accent surtout sur le rôle de la statistique à côté de celui des équations différentielles (ordinaires et partielles) et des systèmes linéaires.

L'individuel-collectif au point de vue topologique donne naissance surtout aux différentes questions d'existence (*Fixpunktsätze* variés avec beaucoup d'applications; remarquons qu'en 1952 on a pu déduire le théorème fondamental d'algèbre du *Fixpunktsatz* de Brouwer concernant le cercle). La topologie est en pleine floraison et s'infiltre même dans la statistique. La notion de l'individuel dans l'atomistique moderne est l'une des plus complexes et, par exemple, dans la théorie des quanta, elle demande une profonde révision de notre manière de penser. L'interconnexion des « quantificateurs » logiques est aussi un phénomène de haute importance et appartient à la problématique individuel-collectif, particulier et concret-général.

7.5. *L'atomistique générale.* — La mécanique quantique et la quantification de notre savoir, l'atomistique générale sont des plus hautes acquisitions de l'homme. Une réorganisation de notre savoir y est exigée.

7.6. *La cybernétique*[1]. — La théorie des communications et des commandes a pris naissance, englobant parmi d'autres l'immense domaine de la théorie des robots, servo-mécanismes les plus variés d'une part, et la théorie du système nerveux et du cerveau humain et du mécanisme d'actions psychiques, d'autre part. *La notion de processus feedback y est essentielle*; l'existence à un moment donné de la différence entre le but et l'état acquis sert comme une donnée à diminuer cette différence existante.

Le processus de l'activité humaine, scientifique, artistique, économique, etc. est un processus *feed-back* colossal.

Eh bien ! les acquisitions précédentes et l'enchevêtrement des mathématiques avec d'autres activités dans tous les domaines doit nécessairement se refléter sur notre manière *de travailler et d'enseigner* les mathématiques: le contenu de la notion de mathématiques et du mathématicien est en *corrélation avec l'ensemble de nos autres activités.*

Dès lors une nécessité se présente: il faut que le mathématicien et les mathématiques *collaborent* avec d'autres spécialistes et d'autres sciences (fécondation interscientifique).

8. *Collaborations mixtes. Exemples.* — Comme exemple de bonne réussite de l'activité d'un organisme mixte, nous pouvons mentionner:

---

1 N. WIENER, *Cybernetics or Control and Communication in the Animal and the Machine*, Paris, 1948 (Ed. Hermann), pp. 194; L. COUFFIGNAL, *Les machines à penser*, Paris, 1952, Ed. de Minuit, p. 159; cf. v. aussi: *Les machines à calculer et la pensée humaine* (Colloque international, C.N.R.S., Paris, 8-13.1.1951), Paris, 1953 (20+570)

8.1. *I.B.M.* — Le développement de la I.B.M. à New-York (fondée en 1914 et 1924 respectivement). La machine Mark 1 de Aiken, d'une part, et *Watson Computing Laboratory*, d'autre part, en sont sortis.

8.2. *Cowles Commission.* — Fondée en 1932, en même temps que le périodique *Econometrica* et *Econometrical Society* [1]. Cette Commission pouvant servir d'exemple contemporain, voici un extrait de ses statuts:

« La Cowles Commission for Research in Economics est un groupe de savants qui essaye d'augmenter les connaissances fondamentales sur les structures économiques de la société au moyen de recherches théoriques et de tests destinés à éprouver la théorie. Elle a développé ses mesures et appliqué ses résultats dans différents domaines. Cette commission réunit des économistes voués à des recherches théoriques ou empiriques, des mathématiciens et des statisticiens, dans un effort de recherche commun. »

Voici une description d'une situation caractéristique de travail au sein d'un organisme pareil:

« Au cours de ses recherches, Koopman tomba sur les principes d'une méthode analytique connue d'abord sous le nom de « Linear Programming », appelée maintenant avec plus d'exactitude « Activity Analysis of Production ». Cette théorie s'est développée en s'appuyant sur plusieurs sources convergentes telles que: l'analyse de Wald et de von Neumann, la théorie générale de l'équilibre de Walras, les discussions sur l'économie, l'analyse interindustrielle de Léontief, les programmes gouvernementaux étudiés dans l'aviation des U.S.A. par G. B. Dantzig et M. K. Wood. Cette théorie est similaire à la théorie classique de l'économie de production en ce qu'elle établit d'abord les rapports technologiques entre les matières premières et les produits de consommation; c'est-à-dire à répondre à des questions telles que: Tous les biens de consommation et tous les biens de production sauf un, étant maintenus à un niveau donné, quelle est la production maximale ? Alterna-

---

[1] Cf. *Economy Theory and Measurement* (A twenty year Research Report, 1932-1952), Chicago, 1952, p. 180.

tivement, si tous les biens de consommation et tous les biens de production sont maintenus à un niveau donné, quelle est la quantité minimum du bien de production requise ? » (*Loc. cit.*, p. 51.)

8.3. *Cybernétique.* — La genèse de la cybernétique apparaît comme résultat de discussion libre entre spécialistes de diverses branches: en particulier entre mathématiciens, ingénieurs et biologistes (cf. N. Wiener, *Cybernetics or Control and communication in the animal and the machine*, Paris, Herman, 1948, 194 p.).

Tout à l'heure M. G. Darmois présentera, entre autres, l'historique de l'Institut de statistique de l'Université de Paris — une belle expérience d'enseignement et de formation; M. G. van Dantzig décrira le *Mathematisch Centrum* d'Amsterdam, l'activité déployée par celui-ci et en particulier son rôle en liaison avec des inondations en Hollande en 1952. Les deux institutions peuvent servir de modèles pour bien des pays. Je renvoie également à l'exposé de M. Walther[1] concernant l'*Institut der praktischen Mathematik*, à Darmstadt, pour se rendre compte de l'avantage de synthèse entre: calcul, diagramme et machine.

8.4. *Industrie (production).* — Nous assistons à un changement profond dans l'industrie. A côté de sections bien connues: administrative, technique et commerciale, une nouvelle section surgit: *section scientifique* où en particulier la mathématique et le mathématicien jouent un rôle bien actif. Le mathématicien y est actif pour plusieurs raisons: il participe au projet de construction et de fabrication, vente et achat et distribution. La recherche opérationnelle *(sampling method and quality control)* est d'une portée pratique considérable. La productivité et le rendement de l'industrie, l'efficacité d'une loi ou d'une opération militaire, les recherches d'optimum d'un travail, de l'éducation, etc., tout cela est l'objet de l'étude mathématique en général, de l'étude statistique en particulier.

---

[1] pp. 260-274 dans l'ouvrage: H. Behnke, *Der mathematische Unterricht für 16—21-jährige Jugend in der B.R. Deutschland*, Glottingen, 1954, p. 332.

Il est extrêmement intéressant d'avoir sous les yeux ce qui se passe dans une grande entreprise industrielle, commerciale ou culturelle, par exemple dans une fabrique d'automobiles, d'avions, de bateaux, d'appareils de mécanique précise ou d'optique, de gomme, etc. Par exemple [1] dans la fabrication d'un avion on peut noter les divisions que voici:

1. Groupe pour déterminer les lignes de soupente, après quoi on choisira le matériel;
2. Groupe aérodynamique déterminant en détail la configuration et les formes;
3. Groupe dynamique;
4. Groupe examinant la stabilité et la portabilité de l'appareil *(Stress group)*;
5. Groupe d'équipement pour examiner les conditions optima d'emplacement de radars, etc.

Dans chacune de ces divisions on opère d'une façon bien prononcée avec des moyens mathématiques et, là comme dans d'autres activités, on rencontre bien des problèmes mathématiques non encore résolus.

En construisant actuellement une ville entière aux Indes (conditions particulières relatives au Soleil, etc.) l'architecte Le Corbusier pourrait composer un livre mathématique par excellence, surtout si on l'assistait d'un mathématicien professionnel.

L'individu et la personne d'autrefois sont remplacés actuellement par la personne collective s'appelant: équipe, laboratoire, école, etc.; la partie mathématique dans un tel « collectif » est dûment représentée par un ou plusieurs mathématiciens, au sens restreint ou au sens large. Il faut souligner que les mathématiciens y sont recherchés et dûment appréciés.

9. *Proposition fondamentale.* — Les interconnexions des mathématiques avec d'autres sciences: astronomie, physique, géophysique, météorologie (je rappelle par exemple la climatologie mathématique de Milanković), chimie, biologie, etc. sont bien

---

[1] Voir Viall, J., Mathematics in the Aircraft Industry (*The mathematical Teacher*, 46, 145-151 (1953).

connues et bien nombreuses. On sait, par exemple, comment on rattache la naissance des disciplines mathématiques aux actions et aux phénomènes variés, par exemple:

a) Géométrie — Mesures des terrains dans la région du Nil;

b) Calcul différentiel — Considérations concernant: vitesse, tangente, tonneaux, extrêma, etc.;

c) Topologie — Les ponts de Königsberg;

d) Probabilités — Théorie de jeux simples;

e) Calcul des variations — L'anecdote de Didon, la brachystochrone;

f) Notion d'ensembles — Activités macroscopiques quotidiennes.

Or, les relations des mathématiques avec d'autres activités humaines sont moins connues. Ces relations existent et les mathématiques sont liées aux arts, à la linguistique, à l'art militaire, à toute sorte de jeux, etc. Ceci étant et sachant non seulement le haut degré acquis d'ores et déjà par diverses activités humaines mais surtout le rythme du développement de notre connaissance, la proposition fondamentale que voici se dégage: *L'activité dans chaque domaine se reflète en mathématiques aussi, et réciproquement.* Dès lors, il est nécessaire que le mathématicien soit en contact et en collaboration avec des spécialistes dans divers domaines, d'une part, pour trouver de nouvelles impulsions et, d'autre part, pour transmettre quelques acquisitions mathématiques. Dans l'enchevêtrement actuel des phénomènes naturels, artistiques, sociaux et humains, certains peuvent servir *d'origine à de véritables nouvelles disciplines mathématiques.* Les résultats de celles-ci serviront alors d'outils non seulement dans le domaine originel mais encore dans d'autres domaines: *Un même phénomène mathématique peut se présenter sous des formes très variées et bien disparates*[1] (diversité de réalisation d'un modèle mathématique — grande énigme et résultant peut-être de l'immense complexité de la totalité qu'on explore, d'une part, et de la simplicité anatomo-physiologique des organes explorants, d'autre part).

---

[1] Cf. M. PETROVITCH, *Mécanismes communs aux phénomènes disparates*, Paris, 1921, p. 279.

10. *Les mathématiques comme un carrefour d'activités humaines.* — L'activité dans chaque domaine se reflétant aussi en mathématiques, on en déduit, indirectement, l'existence de corrélations entre différentes sciences, arts et autres activités. Le moment viendra sans doute où l'on pourra dire bien davantage de ces relations, lorsqu'on aura exploré de plus près le fonctionnement de nos sens, du cerveau et le mécanisme d'autres activités d'êtres vivants. Mais, d'ores et déjà, on peut demander ceci: A chaque phénomène (théorie) d'un champ d'activité faire correspondre l'ensemble (vide ou non) de ses analogues dans chaque autre champ d'activité (Problème de la hiérarchie d'un phénomène ou d'une théorie). Le transfert d'une théorie dans un autre milieu peut donner de précieux résultats (fertilisations hybrides, dualité, etc.). La mathématique peut bien contribuer à ce transfert et cette possibilité relève de l'apparition de mêmes ou de semblables régularités dans des circonstances apparemment différentes. Pour préciser, il faut dire ceci: il y a certainement des objets dont les relations mutuelles ne dépendent pas de l'homme — examinateur et chercheur. Il y en a d'autres dont l'interconnexion est changée par l'examinateur et par la chaîne plus ou moins longue des transformations subies sur la voie qui mène à leur conception par le cerveau humain. C'est une espèce de *feed-back* ayant pour conséquence le changement du processus examiné du moment qu'on l'examine. La physique atomique en donne des exemples instructifs; les phénomènes anthropologiques, sociaux et économiques sont encore d'une espèce pareille. La capacité d'une association d'homme est une grande machine *feed-back*, surtout quand l'association est dirigée soit directement (économie dirigée) soit indirectement (économie industrialisée libre; là la ligne de conduite est régie par l'exigence de « maximalité » de: gain, confort, efficacité de travail, etc.). Entre ces deux cas, psychologiquement extrêmes, se placent d'autres cas.

11. *Un devoir moral du mathématicien.* — Le mathématicien s'occupe des relations essentielles, sans préjugés de pays, de religion, de race, de nationalité, d'éducation, etc. Cela ne veut nullement dire qu'un mathématicien ne possède rien de tout cela.

Au contraire ! Mais son rôle, c'est d'accentuer ce qui est essentiel dans une situation et de contribuer à une compréhension mutuelle entre des individus, des collectivités, dans le domaine des sciences, des arts, etc.

A l'époque présente où les robots tout-puissants sont en train d'agir, cet esprit de compréhension mutuelle doit devenir un *leitmotiv* de l'éducation et de *Weltanschauung*.

Pour terminer, la mathématique (μάθημα = science), est comme une espèce de la conscience créative de l'homme. La mathématique est coextensive avec l'activité de l'homme. Sans mathématique, l'humanité et notre connaissance seraient comme un organisme souffrant d'ataxie [1]. C'est par la mathématique que l'homme obtient une certaine vue d'ensemble organisée dans le chaos créateur de la nature infiniment variée. La mathématique constitue un reflet plus ou moins approximatif de la réalité.

12. *Conséquences pour la C.I.E.M.* — De ce qui précède, on se rend compte du rôle essentiel des mathématiques dans l'ensemble de l'activité humaine. De nouvelles acquisitions primordiales sont atteintes. Des méthodes variées de travail se sont établies en s'imbriquant. L'humanité attend une aide efficace du côté des mathématiques et des mathématiciens. De nouveaux points de vue, plus directs, se sont ouverts, permettant de traiter les mathématiques d'une manière plus directe, plus efficace et plus courte qu'autrefois. A l'époque actuelle où l'éducation et l'effort scientifique et culturel deviennent massifs, nous devrions procéder à un remaniement considérable des méthodes de travail, de l'enseignement et à une sélection appropriée des matières à enseigner. La question de l'enseignement en général et de l'enseignement des mathématiques en particulier doit être examinée par des moyens mathématiques, eux aussi.

Pour ces raisons et vu l'importance capitale de la Science et de la Technique, la C.I.E.M., en tant qu'organisme international de l'éducation scientifique, se trouve devant de très grands devoirs et de très grandes responsabilités. Le moment est venu d'aborder la question d'une façon active.

---

[1] Qu'on se figure bien quel effort mathématique fut déployé pour organiser un congrès comme celui-ci. Et que dire en ce sens de l'organisation de l'humanité hautement industrialisée !

Bibliographie.

La bibliographie relative au sujet de l'enquête est vaste. Une partie en est indiquée dans *The Mathematics Teacher* dans les numéros qui ont paru en 1953-1954.

The Annals of the Computation Laboratory of Harvard University, vol. 1 (1946). Jusqu'à présent ont paru plus de vingt volumes.

Annexe I.

ENQUÊTE INTERNATIONALE SUR LE ROLE DES MATHÉMATIQUES ET DU MATHÉMATICIEN DANS LA VIE CONTEMPORAINE

Le rôle que jouent les sciences et, en particulier, les mathématiques dans les différents domaines de la vie, à une époque donnée, peut être considéré comme l'un des éléments caractéristiques du degré de civilisation et de culture de cette époque. Au fur et à mesure du développement de l'humanité, l'importance des mathématiques et, par conséquent, celle du mathématicien — au sens large, devient de plus en plus grande; de nouvelles possibilités, de nouvelles applications des mathématiques apparaissent. Les extraordinaires progrès réalisés dans l'exploration de la nature inerte et vivante, de l'infiniment petit à l'infiniment grand, les découvertes théoriques et techniques, avec leurs applications immenses, les nouvelles perspectives ouvertes dans les sciences humaines et sociales, n'ont cessé et ne cessent d'enrichir et d'accroître considérablement le domaine des mathématiques pures et des mathématiques appliquées (citons, parmi les extensions les plus récentes: la biométrie, l'économétrie, la cybernétique...) ainsi que les possibilités de travail et d'action du mathématicien.

La Commission internationale de l'enseignement mathématique (C.I.E.M.) a décidé d'entreprendre une enquête sur cette importante question, pour essayer de faire le point, et de présenter un rapport au Congrès international des mathématiciens qui aura lieu à Amsterdam du 2 au 9 septembre 1954.

Chacune des sous-commissions nationales de la C.I.E.M. est invitée instamment à participer à cette enquête. Afin que le rapport général donne une idée aussi exacte et aussi complète que possible de la situation actuelle, il est extrêmement désirable que les rapporteurs désignés par les sous-commissions nationales s'efforcent de consulter des personnalités qualifiées, dans tous les secteurs de la vie contemporaine, et fassent état des opinions qu'ils auront recueillies, ainsi que des faits qui leur paraîtront marquants et des renseignements précis qu'ils pourront rassembler, en y joignant, si possible, quelques documents caractéristiques. Il est bien entendu que l'enquête ne doit négliger aucun des aspects du problème, dans l'ordre social, dans l'ordre intellectuel, dans l'ordre scientifique, dans l'ordre des applications pratiques.

Les rapports préparés par les sous-commissions nationales devront être envoyés *avant le 30 mai 1954*, à

M. G. Kurepa, vice-président de la C.I.E.M.
Institut des Mathématiques, Zagreb (Yougoslavie).

MM. les présidents des sous-commissions nationales sont invités à faire connaître *le plus tôt possible* à M. Kurepa les noms et adresses des rapporteurs désignés.

Annexe II.

ENQUÊTE INTERNATIONALE SUR LE ROLE DES MATHÉMATIQUES ET DU MATHÉMATICIEN DANS LA VIE CONTEMPORAINE

Questionnaire.

1. Vos nom et adresse.
2. Quel est votre champ d'activité principal ?
3. Dans quelle direction voyez-vous surtout l'importance des mathématiques: direction scientifique, logique, esthétique ? dans les applications, les graphiques, les modèles, les projections ? dans l'éducation, la sociologie, l'économie, les finances ? comme moyen, comme langue, etc. ?
4. Si vous êtes — n'êtes pas — mathématicien, consultez-vous jamais des non-mathématiciens — des mathématiciens — dans votre activité ?
5. Indiquez au moins un cas où vous ou quelqu'un que vous connaissez — personnellement —, avez appliqué avec succès les mathématiques, ou encore un cas dont les recherches mathématiques ont été impliquées par les applications.
6. Quel aspect des mathématiques considérez-vous comme le plus approprié au domaine de votre activité: les fonctions, les graphiques, les tables, les modèles, les modèles cinétiques, les projections, les méthodes nomographiques, les méthodes statistiques, les probabilités, les méthodes infinitésimales, les déductions, les calculs mécaniques, etc. ?

7. Que pensez-vous des machines à calculer électroniques et des robots en général ?
8. Quelles sont, selon vous, les mesures — mesures méthodiques, éducation, etc. — les plus propres à assurer aux mathématiques et aux mathématiciens une égale importance sociale ?
9. Indiquez au moins un problème relevant du domaine de votre activité qui vaille la peine d'être examiné mathématiquement, respectivement par des mathématiciens.
10. Quels sont les devoirs et les travaux liés à votre activité qui, pour être bien menés à leur fin, demandent une éducation mathématique prononcée et qu'il vaudrait par conséquent mieux confier à des mathématiciens qu'à des non-mathématiciens ?
11. Que pensez-vous de la connexité du domaine de votre activité — et d'autres domaines — et des mathématiques ? A quelle branche des mathématiques êtes-vous particulièrement intéressé ? activement ou passivement ?
12. Que pensez-vous des connections entre les mathématiques et les sciences exactes, en particulier l'astronomie, la physique, la chimie, la géophysique, la minéralogie, etc. ?
13. Même question concernant les sciences biologiques pures et appliquées, par exemple la médecine, l'agriculture, etc.
14. Même question concernant les sciences techniques.
15. Même question concernant les sciences sociales.
16. Même question concernant les sciences économiques.
17. Même question concernant les sciences philosophiques.
18. Même question concernant l'industrie.
19. Même question concernant les arts en général et en particulier la musique, la peinture, la sculpture, l'architecture, etc.
20. Même question concernant la linguistique.
21. Même question concernant la science et l'art de la guerre.
22. Même question concernant les sports, les jeux, les échecs, etc.
23. Autres problèmes que vous pourriez ajouter et suggérer concernant le rôle des mathématiques et des mathématiciens.

Veuillez, s'il vous plaît, répondre aux questions auxquelles vous êtes le plus intéressé et adresser les réponses concrètes et comportant références, citations, etc., à

G. KUREPA, vice-président
de la Commission internationale d'enseignement mathématique
Institut de Mathématiques
Zagreb, Yougoslavie.

Veuillez diffuser ce questionnaires, s.v.p.

DIE ROLLE DER MATHEMATIK IM HEUTIGEN LEBEN

VON

E. Kamke in Tübingen

INHALT

Vorbemerkung

Die „Mathematik im heutigen Leben“ kann sich, wenn man kurze Schlagwörter benutzen will, in dreifacher Hinsicht auswirken:

personell, in der Verwendung von Mathematikern mit einem „abgeschlossenen Studium“ der Mathematik;

sachlich, in der Bearbeitung spezieller Aufgaben in verschiedenen Gebieten des heutigen Lebens, in der Verwendung der Mathematik für die Lösung von Problemen in anderen wissenschaftlichen Disziplinen und in der Ausstrahlung allgemeiner Einsichten und Erkenntnisse;

immanent, durch das Auftreten und die Verwendung mathematischen Gedankenguts (bis hinunter zu blossen mathematischen Redewendungen), durch den Einfluss der geistigen Haltung von Einzelpersonen, die ein Ausfluss der Beschäftigung mit der Mathematik ist, und anderes mehr.

Diese Gesichtspunkte sollen auch bei diesem Bericht im Auge behalten werden, ohne dass er jedoch genau nach ihnen gegliedert ist. Der Bericht bezicht sich in erster Linie auf die Verhältnisse in Deutschland.

1. Mathematische Ausbildung

1. *Die Spezialausbildung in Mathematik und die Abschlussprüfungen*

Das Studium der Mathematik kann an einer Universität oder einer Technischen Hochschule betrieben und nach mindestens vierjährigem Studium abgeschlossen werden durch

(a) Promotion (Erwerb des Doktorgrades);

(b) Lehramtsprüfung (Nachweis der wissenschaftlichen Befähigung zum Unterricht an höheren Schulen, d.h. an Schulen für Zehn- bis Neunzehnjährige);

(c) Diplomprüfung (nach Ablegung der Prüfung können die Bewerber sich Diplom-Mathematiker nennen).

Zu *(a)*: Die Promotion ist (im allgemeinen) die Voraussetzung für die wissenschaftlichen Laufbahn, insbesondere die des Hochschullehrers [1]. Der Kandidat hat in einer schriftlichen Arbeit (Doktorarbeit) zu zeigen, dass er zur selbständigen Lösung wissenschaftlicher Probleme befähigt ist. Auch andere

[1] Unter der Bezeichnung "Hochschulen" werden Universitäten und Technische Hochschulen zusammengefasst.

Mathematiker, die sich nicht der wissenschaftlichen Laufbahn widmen wollen, erwerben häufig den Doktorgrad.

Zu *(b)*: In der Lehramtsprüfung soll der Kandidat zeigen, dass er in die wesentlichen Teile der klassischen und der modernen Mathematik eingedrungen ist. Die Anforderungen in dieser Prüfung gehen weit über das hinaus, was unmittelbar im Unterricht gebraucht wird. Diese Ansprüche werden deshalb gestellt, weil nur ien Lehrer mit einer solchen Ausbildung in der Lage ist, auf längere Zeit hinaus einen wissenschaftlich fundierten und fortschrittlichen Unterricht zu erteilen.

Bis vor etwa zehn Jahren bildete die Lehramtsprüfung — neben der Promotion, durch die allein aber noch keine Lehrberechtigung erworben wird — die einzige Abschlussprüfung für ein Studium der Mathematik. Auch heute noch haben die höheren Schulen den grössten Bedarf an Mathematikern, und daher schliesst auch heute noch der weitaus grösste Teil aller Mathematiker (schätzungsweise 80-90%) sein Studium mit der Lehramtsprüfung ab.

Zu *(c)*: Im Jahre 1942 wurde als neue Abschlussprüfung die Diplomprüfung eingeführt, die an allen Hochschulen (d.h. Universitäten und Technischen Hochschulen) abgelegt werden kann [1]. „Die Ausbildung der Diplom-Mathematiker hat das Ziel, die Studierenden mit dem mathematischen Rüstzeug zu versehen, das zur Lösung der in den Anwendungsgebieten vorkommenden Aufgaben entwickelt worden ist. Die Studierenden sollen ferner so weit mit einigen dieser Anwendungsgebiete selbst vertraut werden, dass sie im Stande sind, deren Probleme mathematisch zu fassen und zu behandeln“ [2].

Für Einzelheiten der Ausbildung, die zu den genannten Abschlussprüfungen führen, ist auf die Abschnitte „Universitäten“ und „Technische Hochschulen“ in Behnke [3] zu verweisen.

---

1 Eine Ausnahme besteht für die Versicherungsmathematik. Die Abschlussprüfung in dieser kann nur an denjenigen Hochschulen abgelegt werden, die mit den speziellen Ausbildungseinrichtungen für dieses Fach versehen sind (Göttingen, Hamburg, Köln, München).

2 Aus der Diplomprüfungsordnung der mathem.-naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität Tübingen.

3 H. Behnke, Der Mathematische Unterricht für die sechzehn- bis einundzwanzigjährige Jugend in der *Bundesrepublik Deutschland*, Göttingen 1954. Später kurz als (B) zitiert.

Für die Ausbildung zum Hochschullehrer gibt es keine feste Norm. Findet ein Hochschullehrer unter seinen Studenten einen besonders begabten, so wird er ihn ermuntern, auch nach der Promotion sein Studium fortzusetzten, und sich mit einer grösseren wissenschaftlichen Arbeit (Habilitationsschrift) um die Zulassung als (unbezahlter) Dozent (Habilitation) an einer Hochschule zu bewerben. Berufungen auf eine Professur können jedoch auch ausserhalb dieses Werdegangs stattfinden. So wurde z.B. Weierstrass auf Grund der Arbeiten, die er als Lehrer einer höheren Schule geschrieben hatte, an die Universität Berlin berufen.

2. *Die mathematische Ausbildung von Physikern, Technikern und anderen Spezialisten*

In einer sehr grossen Anzahl von Fachgebieten ist die Mathematik ein unentbehrliches Hilfsmittel. So seien etwa genannt die Astronomie, die Physik (ganz besonders die theoretische Physik), das grosse Gebiet der Technik in weitestem Umfange, die Chemie (insbesondere die physikalische Chemie), manche Teile der Biologie, die Statistik und Versicherungsmathematik.

Die Vertreter dieser Disziplinen verfügen über eine je nach den Bedürfnissen abgestufte mathematische Ausbildung. Ist für ein Fachgebiet eine besonders eindringende mathematische Ausbildung nötig, so erfolgt diese gewöhnlich (mit entsprechender Auswahl der Vorlesungen) gemeinsam mit der der Mathematiker. In anderen Fällen werden Sondervorlesungen mit Berücksichtigung der verschiedenen fachlichen Bedürfnisse gehalten. Dieses gilt insbesondere für die grosse Zahl der Techniker und Ingenieure, die an den Technischen Hochschulen ausgebildet werden. Für die Einzelheiten sei auf die Abschnitte „Universitäten" und „Technische Hochschulen" in (B) verwiesen.

3. *Mathematische Volksbildung*

Für eine „mathematische Allgemeinbildung des Volkes" ist von grösster Bedeutung, dass gerade auch diejenigen, die durch ihren späteren Beruf nicht auf besondere mathematische Kenntnisse angewiesen sind, also z.B. Ärzte, Juristen, Philologen, Theologen, aber auch die ganze breite Masse des Volkes in die Mathematik eingeführt werden. Für die Berufe, die eine gehobene Schulbildung verlangen, leistet das die höhere Schule (für Zehn- bis Neunzehnjährige), für die breite Masse die Volksschule (für Sechs- bis Vierzehnjährige), in der die Schüler wenigstens mit einigen geometrischen Grundtatsachen und mit dem praktischen Rechnen vertraut gemacht werden.

Für die Vertiefung und Ergänzung der durch die Volksschule, die Mittelschule und die unteren und mittleren Klassen der höheren Schule vermittelten Ausbildung gibt es mannigfache Einrichtungen: solche einer lockeren Form wie Abendkurse und Volkshochschulen, sowie solche, die mit der Berufsausbildung verbunden sind: Berufsschulen, kaufmännische Fachschulen, technische Fachschulen, insbesondere Ingenieurschulen, und viele andere.

Auch hier ist für die Einzelheiten auf die entsprechenden Berichte in (B) zu verweisen.

2. Aufgabe und Verwendung der Mathematiker

1. *Der Hochschulmathematiker*

Die Aufgabe des Hochschulmathematikers ist eine doppelte: die mathematische Forschung und die Ausbildung (einschl. Prüfung) der Studierenden. Die Fortschritte der Forschung können in der Gewinnung von neuen Einzelergebnissen liegen. Als Beispiel sei die von *Goldbach* 1742 ausgesprochene Vermutung genannt, dass jede gerade Zahl > 2 sich als Summe von zwei Primzahlen darstellen lässt. Nachdem man lange Zeit nur wusste, dass bei den untersuchten Beispielen die Vermutung zutraf, war es ein erster wesentlicher Fortschritt, als *Schnirelmann* 1930 beweisen konnte, dass alle hinreichend grossen Zahlen sich als Summe einer festen (allerdings noch unbekannten) Anzahl k von Primzahlen darstellen lassen. Ein weiterer wesentlicher Fortschritt war es, als *Winogradoff* 1937 zeigen konnte, dasss diese Behauptung für ungerade Zahlen mit $k = 3$ richtig ist, und es wird ein neuer Fortschritt sein, wenn es gelingt, die Vermutung von *Goldbach* in vollem Umfange zu beweisen [1].

Neben Einzelfortschritten dieser Art und dem Aufbau und Ausbau neuer Theorien gibt es aber auch — ich möchte sagen — säkulare Umgestaltungen der Mathematik, von denen wir gerade eine miterleben. Während lange Zeit die Mathematik als eine Lehre von den „Grössen“ (Zahlen, Funktionen u. dgl.) galt, hat man sich in neuerer Zeit der Untersuchung der Relationen, der Strukturen (z.B. algebraischer [2], topologischer [3], logischer [4]) zugewendet. Das sei wiederum an einem sehr einfachen Beispiel angedeutet. Bei jedem Dreieck ist die Länge jeder Seite höchstens gleich der Summe der Länge der beiden anderen Seiten. Das ist, in der Sprache der Vektoren ausgedrückt $|x+y| \leqslant |x+y|$, wenn $|x|$ die Länge oder der absolute Betrag eines Vektors x ist. Man kann nun in irgendeinem „abstrakten Raum“, d.h. in irgendeiner Menge X von Elementen x, jedem dieser Elemente x eine reelle Zahl als seine „Norm“ $\|x\|$ so zuordnen, dass stets $\|x\| \geqslant 0$ und $\|x\| = 0$ nur dann ist, wenn x ein als „Nullelement“ ausgezeichnetes Element ist, und dass weiter stets die „Dreiecksungleichung“ $\|x\| + \|y\| \leqslant \|x+y\|$ gilt. Alles, was sich auf Grund dieser und ev. weiterer Definitionen und Relationen [5] herleiten lässt, gilt insbesondere auch für Vektoren eines Euklidischen Raumes von beliebiger endlicher Dimensionszahl, aber auch z.B. für Räume, deren Elemente Funktionen sind. Es werden dann manche Existenzsätze, wie z.B. für die Lösungen von Gleihcungen, von Differentialgleichungen, von Integralgleichungen nichts anderes als Fixpunktsätze für abstrakte Räume, d.h. Sätze, die aussagen, dass es bei einer stetigen Abbildung A

---

[1] Zu der Vermutung von Goldbach vgl. etwa E. Trost, *Primzahlen*. Basel und Stuttgart 1953, Kap. 10.

[2] Vgl. etwa N. Bourbaki, *Algèbre* (Actualités scientifiques et industrielles 934). Paris 1942. G. Pickert, *Einführung in die höhere Algebra*, Göttingen 1951.

[3] Vgl. etwa P. Alexandroff und H. Hopf, *Topologie*, Berlin 1935; N. Bourbaki, *Topologie générale* (Actualités scientifiques et industrielles 848, 916, 1084), Paris 1940-1949; C. Kuratowski, *Topologie*, Warszawa-Wrocław, 2. Aufl., 1948-1950; E. Hille, *Functional analysis and semi-groups*, New York 1948.

[4] Vgl. etwa H. Hermes und H. Scholz, *Mathematische Logik*. A. Schmidt, *Mathematische Grundlagenforschung*. Enzyklopädie der Mathematischen Wissenschaften I, 1 Heft 1, Leipzig 1953 und 1950.

[5] Es wird hier darauf verzichtet, die Axiome eines linearen normierten Raumes vollständig anzugeben.

des Raumes in sich, $x^* = \mathrm{A}\,x$, stets ein Element x gibt, das in sich übergeht: $x = \mathrm{A}\,x$.

Die Forschung erhält ihre Probleme teils aus sich selbst, aber auch, was ebenso wichtig ist, aus den Anwendungen der Mathematik in den verschiedensten Gebieten.

Zwischen der Forschung und dem Unterricht in der Form von Vorlesungen liegt das weite Feld der Verarbeitung der Forschungsergebnisse für die Weitergabe an die Studierenden. Über die Vorlesungen selbst kann wieder auf die Abschnitte „Universitäten“ und „Technische Hochschulen“ in (B) verwiesen werden.

2. *Der Schulmathematiker*

Jeder wissenschaftliche Lehrer einer höheren Schule hat neben seinem Unterricht und seiner erzieherischen Tätigkeit auch wichtige allgemein-kulturelle Aufgaben zu erfüllen, besonders in kleinen Städten, in denen er neben Arzt, Richter und Pfarrer der wichtigste Kulturträger ist.

Für den Mathematiker kommt noch etwas anderes hinzu. Die Mathematik ist eine Wissenschaft, die für ein sicheres Urteil eines eindringenden Studiums bedarf. Der Laie — auch der sich gebildet nennende — steht daher den garnicht so selten unsinnigen Mitteilungen mit mathematischem Einschlag in der Tages- und Wochenpresse oft urteils- und hilfslos gegenüber. Hier kann der ausreichend vorgebildete Fachmathematiker viel Gutes wirken.

Weiter beruht jeder Fortschritt im mathematischen Unterricht auf dem Verständnis und einer guten Ausbildung der Schulmathematiker. Schliesslich sei hingewiesen auf ihre literarische Betätigung [1], die sich an einen grossen Leserkreis wendet und durch die (z.B. in der von Lietzmann und Witting herausgegebenen mathematisch-physikalischen Bibliothek) auch dem mathematisch Ungeübten ein anziehendes Bild von Teilgebieten der Mathematik vermittelt wird, die ausserhalb des eigentlichen Unterrichtsstoffes liegen. Diese Tätigkeit der

---

[1] H. Behnke, *Universität und höhere Schulen*, Frankfurter Hefte 1948, Heft 1.

Schulmathematiker kann garnicht hoch genug eingeschätzt werden.

3. *Der Mathematiker ausserhalb des Lehrberufs*

Bis vor etwa 25 Jahren fanden Mathematiker ausserhalb des Lehrberufs eine Beschäftigung fast nur im Versicherungswesen. Mit weiterer Verfeinerung der industriellen Konstruktions- und Forschungsmethoden ergab sich die Notwendigkeit, auch feinere mathematische Hilfsmittel heranzuziehen. Diese natürliche Entwicklung war ein Grund für eine stärkere Verwendung von Mathematikern in der industriellen Forschung. Ein weiterer Grund war der, dass nach 1933 und insbesondere nach Kriegsbeginn in manchen Sektoren ein Mangel an hinreichend vorgebildeten Ingenieuren und Physikern eintrat. Es zeigte sich, dass Mathematiker, auch wenn sie vorher ganz andere Dinge (z.B. abstrakte Algebra oder Gruppentheorie) getrieben hatten, sich häufig schnell und gut in Anwendungsgebiete einarbeiteten und sich bewährten. Da die Zahl der Studierenden sehr zurückgegangen war und man schnell eine grössere Zahl von Mathematikern (und Physikern) brauchte, kam es 1942 zu der Einführung der Diplomprüfung mit Ausbildungsvorschriften, die von vornherein stärker auf die Praxis zugeschnitten waren als diejenigen für die Promotion und die Lehramtsprüfung.

Bevor die Diplomprüfungsordnung sich auswirken konnte, kam der Zusammenbruch Deutschlands. In den ersten Jahren nach dem Kriege musste die Industrie erst wieder die zerstörten Arbeitsstätten aufbauen und sich auf die Fabrikation der einfachsten Wirtschaftsgüter beschränken. Für feinere Untersuchungen, für die Mathematiker nötig gewesen wären, bestand zunächst kein Bedürfnis. Gleichwohl hat eine Reihe von Mathematikern seit 1946 die Diplomprüfung abgelegt, und zwar an den Technischen Hochschulen im Durchschnitt wohl eine grössere Zahl als an den Universitäten, z.B. an der Technischen Hochschule Stuttgart 42 und an der Universität Bonn 22.

Die spätere Verwendung von Diplom-Mathematikern weist eine ausserordentlich grosse Streuung auf. Z.B. konnte bei 31 (von 42) Mathematikern, die an der Technischen Hochschule Stuttgart die Diplom-Prüfung abgelegt haben, folgendes über ihren Verbleib ermittelt werden:

7 haben zusätzlich die Lehramtsprüfung abgelegt und sind zum Teil schon im Schuldienst,
3 Assistent an der Technischen Hochschule,
1 Lehrer an einer Maschinenbauschule,
6 Mathematiker bei Elektrizitätsfirmen,
1 in der optischen Industrie,
1 in einem Ingenieurbüro für Elektrotechnik,
1 Statiker in einer Baufirma,
1 in der Auto-Industrie,
1 bei einer Stahlbaufirma,
1 Statiker bei einer Stahlbaufirma,
1 Teilhaber eines Bauingenieurbüros,
1 in einer Gummiwarenfabrik,
1 bei einer Oberfinanzdirektion,
1 bei einem Statistischen Landesamt,
2 bei Versicherungsgesellschaften,
1 bei einer Treuhandgesellschaft,
1 bei einem astronautischen Forschungsinstitut.

Von anderen Stellen wird noch berichtet über Verwendungen (nicht nur von Diplommathematikern, sondern von Mathematikern überhaupt) bei Bibliotheken, im Verlagswesen, im Vermessungswesen, bei Erdölgesellschaften, in der Fernmeldetechnik, in statistischen Ämtern, im Chiffrierdienst, neuerdings bei grossen (insbes. elektronischen) Rechenanlagen [1].

Deutliche Schwerpunkte liegen in der Verwendung als Statistiker, bei Versicherungsgesellschaften und in der Industrieforschung. Bei weiterem Ausbau der Industrieforschung kann damit gerechnet werden, dass bei dieser ein vermehrter Bedarf an Mathematikern auftritt.

Im Ganzen dürfte für die Verwendung von Mathematikern ausserhalb des Schuldienstes noch das gelten, was in vier Refe-

---

[1] Vgl. GÖRTLER, *Ausbildung und Stellenvermittlung der Diplom-Mathematiker.* (Herausgegeben im Auftrag der *Gamm* 1954).

raten enthalten ist, die 1937 bei der Tagung der Deutschen Mathematiker-Vereinigung in Kreuznach erstattet worden sind [1].

Zu den damals von Boehm genannten Einzelgebieten können noch hinzugefügt werden die Wirtschaftswissenschaften und einzelne Zweige der Soziologie, in welchen der Nutzen mathematischer Methoden und Hilfsmittel noch nicht immer genügend gewürdigt wird [2].

Hinzu kommen alle diejenigen vielen und umfangreichen Forschungs- und Industriezweige, in denen schon seit langem mit mathematischem Methoden gearbeitet wird, weil ohne diese die anfallenden Aufgaben ganz offensichtlich nicht gelöst werden können.

In jedem Fall ist es notwendig, dass der Mathematiker, der seinen Beruf auf einem dieser Gebiete sucht, eine gewisse Wendigkeit mitbringt, wie sie jeder freie Beruf voraussetzt. Er muss sich darüber klar sein, dass er eine Pionierarbeit zu leisten hat, die mit einem Risiko verbunden ist, aber bei einer Veranlagung hierfür sowohl für ihn als auch für seine Auftraggeber sehr befriedigend sein kann.

Bei allen diesen Verwendungen von Mathematikern werden in erster Linie die fachlichen Kenntnisse und Fähigkeiten ausgenutzt, die sie sich erworben haben.

Tatsächlich werden die meisten Mathematiker auch wohl unter dem Gesichtspunkt eingestellt, ob sie für den gewünschten Zweck schon eine gewisse Spezialausbildung aufweisen können. Für gehobene Stellen werden jedoch von weitblickenden Unternehmungen solche speziellen Anforderungen häufig nicht gestellt. So wurde dem Verfasser kürzlich gesagt: „Zwar ist unser normaler Bedarf an Mathematikern z.Zt. gedeckt; aber wenn

---

[1] Jahresbericht der *Deutschen Mathematiker-Vereinigung* 47 (1937) 232-251: W. SCHWEER, *Wirtschaftsmathematik und Hochschule*; C. BŒHM, *Mathematische Statistik in Wissenschaft und Technik*; H.-J. LUCKERT, *Der Mathematiker in Technik in Industrie*; E. KAMKE, *In welche Berufe gehen die Mathematiker ausser dem Schuldienst über?*

[2] H. PETER, *Aufgaben und Grenzen der mathematischen Nationalökonomie* (Archiv für mathematische Wirtschafts- und Sozialforschung 1 (1935) 1-16). J. SCHUMPETER, *Zur Einführung der folgenden Arbeit Knut Wicksells* (Archiv fûr Sozialwissenschaften und Sozialpolitik 58 (1927) 238-251). KNUT WICKSELL, *Mathematische Nationalökonomie* (Ebenda 252-281). J. SCHUMPETER, *Aufsätze zur ökonomischen Theorie* (Tübingen 1952, 529-548). J. v. NEUMANN and O. MORGENSTERN, *Theory of games and economic behavior*, 2. Aufl. Princeton 1942. H. KNESER, *Soziologie und Wirtschaftswissenschaft in heutiger mathematischer Behandlung* (Studium Generale, 6 Jahrg. (1953) 666-678).

Sie einen besonders tüchtigen jungen Mathematiker haben, der zu uns kommen will, so werden wir ihn unabhängig von seiner speziellen Vorbildung bevorzugt einstellen “.

Im allgemeinen wird die geistige Schulung, die ein guter Mathematiker mitbringt, bei uns noch viel zu wenig beachtet. Diese Schulung befähigt ihn, z.B. auch organisatorischen und Verwaltungsaufgaben nach kurzer Einarbeitungszeit wohl ebenso gerecht zu werden wie etwa ein Verwaltungsjurist.

3. Mathematik und andere Wissenschaftsgebiete

1. *Mathematik als Hilfswissenschaft in andern Disziplinen*

In den vorangehenden Abschnitten haben die Person und die besonderen Fähigkeiten des Mathematikers im Vordergrund gestanden. Es war dabei allerdings nicht zu vermeiden, dass auch die Bedeutung der Mathematik für andere Disziplinen gestreift wurde, vor allem in 2.3. Wir wollen über diese Bedeutung jetzt etwas mehr sagen, müssen uns jedoch angesichts der Fülle solcher Beziehungen zu anderen Disziplinen auf eine Auswahl und kurze Andeutungen beschränken.

Man kann wohl zwei Arten des Eingreifens der Mathematik in andere Gebiete unterscheiden:

(a) In Gebieten mit gesicherter Theorie und mathematisch formulierten Gesetzmässigkeiten wird die Mathematik zu einer quantitativen Beherrschung von Vorgängen und Gewinnung von Einzelergebnissen benutzt.

(b) Ausgehend von bestimmten Grundvorstellungen in einem Wissensgebiet werden Zusammenhänge, Gesetzmässigkeiten mathematisch dargestellt (durch Gleichungen, Differential- und Integralgleichungen, durch Hilfsmittel der mathematischen Statistik u.a.). Aus der mathematischen Darstellung werden mathematische Schlussfolgerungen (manchmal sehr weitgehender Art) gezogen und es wird geprüft, wie weit sie in der Wirklichkeit sich bestätigt finden. Ist eine Bestätigung möglich, so gewinnt man dadurch Vertrauen zu den Grundvorstellungen, von denen man ausgegangen ist, und zu der mathematischen Be-

schreibung der Zusammenhänge. Es besteht bei dieser Art des Vorgehens also eine enge, sich wechselseitig stützende und kontrollierende Verbindung, eine „Verzahnung" zwischen Experiment und mathematischer Theorie, wofür die theoretische Physik wohl das bekannteste Beispiel ist.

Wenn z.B. der Seemann astronomische Beobachtungen macht und aus ihnen den Schiffsort rechnerisch bestimmt so fällt das unter *(a)*. Ebenso, wenn Versicherungsgesellschaften auf Grund vorliegender Statistiken Versicherungsprämien berechnen.

Ein klassisches Beispiel für *(b)* bildet das Lebenswerk *Keplers*, der, fussend auf dem umfangreichen Beobachtungsmaterial von *Tycho de Brahe* über den Planeten Mars, durch umfangreiche Rechnungen zu der Formulierung seiner bekannten Gesetze über die Planetenbewegung gelangte und damit zu der Verwerfung seiner ursprünglichen Hypothese, zu der ihn Überlegungen mehr theologisch-philosophischer Art geführt hatten [1].

Die beiden Arten der Beziehungen *(a)* und *(b)* lassen sich nicht immer scharf trennen. Das hängt mit dem Grad der Sicherheit der Grundvorstellungen und der mathematisch-theoretischen Durchdringung des Gebiets zusammen. Unerlässlich wird der Versuch einer mathematischen Behandlung bei schnellen Vorgängen. Z.B. kann man zwar einfache Vorgänge bei der Kreiselbewegung sich wohl noch qualitativ anschaulich näherbringen. Alle feineren und komplizierteren Vorgänge sind jedoch nur mathematisch erfassbar. Ebenso ist es häufig bei Schwingungs- und Resonanzerscheinungen.

Im Bereich der Wasserwirtschaft können schwierige Probleme auftreten, für deren Lösung man angesichts der Folgen einer falschen Planung auch mathematische Methoden heranzieht. Das ist z.B. geschehen bei der Trockenlegung der Zuidersee (Strömungsvorgänge während der Eindämmung) und bei der Wasserversorgung von Amsterdam (Austausch Süsswasser — Salzwasser in unterirdischen Wassersäcken).

Die heute erreichte Schnelligkeit des Fernsprechverkehrs beruht wesentlich auf der gleichzeitigen Führung mehrerer

---

[1] Vgl. H. CASPAR, *Johannes Kepler*, Stuttgart 1948. S. 66-72, 146-155 .

Gespräche auf derselben Leitung, wofür geeignete Siebketten zu berechnen sind. Bei vielen Gelegenheiten hat man eine grosse Anzahl von gekoppelten linearen Gleichungen zu lösen [1], eine Aufgabe, die auch heute noch, trotz der modernen Rechenanlagen, unangenehm ist [2].

Bei der Herstellung von Massengütern vorgeschriebener Qualität ist man in der Industrie interessiert an dem Stichprobenverfahren, d.h. an einem statistischen Verfahren, das auf Grund von wenigen Stichproben einen hinreichend sicheren Rückschluss darauf zulässt, ob die Maschinen das Fabrikat noch mit der erforderlichen Qualität liefern oder ob die Maschinen überholt oder ausgewechselt werden müssen.

Probleme ähnlicher Art treten in der Medizin auf [3]: „Der Arzt habe ehedem eine bestimmte Form des Erkrankens, die er nicht nennenswert behandeln konnte, in 14 Fällen erlebt, von denen 4 sich „spontan", jedenfalls ohne sein Zutun besserten. Bei den weiteren 17 Fällen dieser „Krankheit" versuchte er nun eine bestimmte, ihm aus gewissen Überlegungen erfolgreich erscheinende Behandlung, wobei er 7 Besserungen erlebte. Nun verdoppelte er die Dosis seines Mittels, und als er bei weiteren 12 Fällen schon in 8 Fällen eine Besserung sah, ist er von der Wirksamkeit seiner Methode völlig überzeugt. Ist dieser Schluss berechtigt?"

Die heutige Vererbungslehre ist ohne Mitwirkung der Mathematik nicht denkbar, die Chromosomenkarten von T. H. *Morgan* und seinen Schülern wurden wesentlich mit durch Heranziehung der Wahrscheinlichkeitsrechnung entwickelt. Es sind bereits besondere neue Disziplinen Erbmathematik [4] und Biometrik [5] entstanden.

---

[1] Z. B. 42 Gleichungen für die Kuppel des 1942 geplanten Hauptbahnhofs in München. Vgl. A. Walther, Wechselwirkung zwischen Mathematik und Technik in *Die Welt des Ingenieurs*; Heidelberg 1946, S. 13.

[2] Auf Veranlassung des National Research Council Survey of Industrial Research hat Thornton C. Fry einen eingehenden Bericht über die *Rolle der Mathematik in der Technik der Gegenwart und Zukunft verfasst.* Bell-System T. J. July 1941, Bd. 20, Nr. 3 (1).

[3] B. de Rudder, *Studium Generale,* Jahrg. 6 (1953), 647-651; dort auch weitere Literaturangaben.

[4] Vgl. z. B. H. Geppert und S. Koller, *Erbmathematik,* Leipzig 1938. *Just's Handbuch der Erbbiologie des Menschen,* Bd. 2, Berlin 1940.

[5] Für diese existiert eine eigene Zeitschrift Biometrika (Cambridge). Vgl. auch F. Dessauer, *Quantenbiologie,* Heidelberg 1954.

Ein interessantes Beispiel dafür, wie eine mathematische Behandlung zum Verständnis von wenig geklärten Vorgängen führen kann, ist der Vogelflug. Erst durch die Einführung des Begriffes der Zirkulation sind die Vorgänge des Fliegens (im Unterschallbereich) dem Verständnis näher gebracht und rechnerisch erfassbar gemacht worden. Auf Grund der mathematisch gefassten Strömungslehre konnten Formen der Tragflächengestaltung von Flugzeugen unter Verminderung kostspieliger Versuche untersucht werden. Durch die dabei gewonnenen Erkenntnisse konnten auch manche Vorgänge bei dem Flug der Vögel aufgeklärt werden [1].

Die Verbindung der Mathematik mit der Physik ist eine so enge und so bekannte, dass hier die Angabe der Stichworte Maxwell-Gleichungen, Relativitätstheorie, Quantentheorie genügen möge. In einer Reihe von Fällen ist es so, dass sich erst auf Grund abstrakt mathematisch formulierter Gesetzmässig keiten langsam wieder „anschauliche" Vorstellungen herausgebildet haben.

Die Mathematik hat vielerlei an Theorien und praktischen Rechenverfahren für andere Wissensgebiete bereit gestellt. Von diesen wird aber häufig auch mehr von der Mathematik verlangt, als sie z.Z. leisten kann. Manche theoretischen Ansätze waren für eine mathematische Behandlung „linearisiert" (z.B. nichtlineare Differentialgleichungen durch lineare approximiert) worden. Das gibt oft nicht mehr eine genügende Genauigkeit. Hier kann die Mathematik häufig noch nicht die Ansprüche der Anwendungsgebiete erfüllen.

In dem Bereich der numerischen Rechnungen sind in der letzten Zeit grosse Fortschritte durch die elektronischen Rechenanlagen erreicht und dadurch viele Probleme zugänglich geworden, die man bis dahin wegen zu grossen Zeit- und Personalaufwands nicht in Angriff nehmen konnte [2].

---

[1] Über die Probleme, die in den letzten Jahren in Göttingen mit der verhältnismässig kleinen und langsamen G 1 bewältigt werden konnten, vgl. man die Berichte von L. BIERMANN und A. SCHLÜTER in Vorträge über Rechenanlagen, gehalten in Göttingen 19.-21. März 1953. *Max-Planck-Institut für Physik*, Göttingen 1953.

[2] Vgl. M. STOLPE und K. ZIMMER, *Der Vogelflug*, Leipzig 1939.

2. *Mathematik und Philosophie*

Im griechischen Altertum hat bei Philosophen — so bei Plato — ein reges Interesse für die Mathematik bestanden, und auch in neuerer Zeit haben Philosophen sich immer wieder mit der Mathematik auseinander zu setzen versucht, allerdings mit sehr verschiedener Einsicht. Als Beispiele seien aus der Vergangenheit *Hegel*, *Schelling*, *Schopenhauer* und *Kant* genannt.

Die beiden ersten, die auch heute noch in manchen Kreisen sehr angesehen sind, hatten offenbar kein Verständnis für Mathematik. Z. B. heisst es bei Hegel [1].

„Die erste oder unmittelbare Bestimmung der Natur ist die abstracte *Allgemeinheit ihres Aussersichseyns*, deren vermittlungslose Gleichgültigkeit *der Raum*. Er ist das ganz ideelle *Nebeneinander*, weil er das Aussersichseyn ist; und schlechthin continuirlich, weil dieses Aussereinander noch ganz abstract ist und keinen bestimmten Unterschied in sich hat".

Und bei Schelling [2]:

„Der Raum ist die blosse Form der Nichtigkeit der Dinge. Die Zeit im Gegenteil ist die Form des Beseeltseyns der Dinge".

Von *Schopenhauer* werden gewöhnlich einige recht abfällige Äusserungen über die Mathematik oder die Mathematiker zitiert [3]. Aber in den Parerga und Paralipomena, Kap. 28, Über die Erziehung, § 387, heisst es andererseits:

„Eben weil früh eingesogene Irrthümer meistens unauslöschlich sind und die Urteilskraft am spätesten zur Reife kommt, soll man die Kinder, bis zum sechzehnten Jahre, von allen Lehren, worin grosse Irrthümer sein können, frei erhalten, also von aller Art Philosophie, Religion and allgemeinen Ansichten jeder Art, und sie bloss solche Dinge treiben lassen, worin entweder keine Irrthümer möglich sind, wie Mathematik, oder keiner sehr gefährlich ist, wie Sprachen, Naturkunde, Geschichte usw."

---

[1] HEGEL, *Vorlesungen über die Naturphilosophie aus der Encyklopädie der philosophischen Wissenschaften im Grundriss*, 2 Teil, § 254.

[2] F. W. J. VON SCHELLINGS *Sämtliche Werke*, Abt. 1, Stuttgart und Augsburg (Cotta), Band 6 (1860), S. 221 Vgl. auch ebenda S. 304 sowie Band 4 (1859), s. 533.

[3] Vgl. PRINGSHEIM, Über den Wert und angeblichen Unwert der Mathematik. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereiningung* 13 (1904).

Sehr gewissenhaft und verständnisvoll hat sich *Kant* mit der Mathematik seiner Zeit auseinandergesetzt. Aber man darf seinen Äusserungen doch auch nicht ein zu grosses Gewicht beilegen. Man muss bedenken, dass seit dem Erscheinen seiner Hauptschriften die Mathematik, gerade auch in allgemeinen Erkenntnissen, die für einen Philosophen wesentlich sind, sehr grosse Fortschritte gemacht hat, es seien nur die Stichworte genannt: Nichteuklidische Geometrie, Mengenlehre, Logistik, Beweistheorie [1].

Auch in den letzten fünfzig Jahren ist die Haltung der Philosophen gegenüber der Mathematik uneinheitlich geblieben. Neben Philosophen, die kein Verständnis für Mathematik und Naturwissenschaften haben, gibt es auch solche, die sich sehr um ein Verständnis bemüht haben und den grossen Bildungswert dieser Disziplinen ausdrücklich hervorheben [2].

Es muss anerkannt werden, dass für einen Philosophen, der nicht zuerst Mathematik studiert hat, eine grosse Schwierigkeit darin liegt, dass für einen Überblick von hoher Warte aus ein vieljähriges eindringendes Studium der Mathematik Voraussetzung ist und eine solche Leistung z.Z. selten äussere Anerkennung findet [3].

Bei dieser Lage sahen sich die Mathematiker in Fragen der Erkenntnistheorie und Logik meistens auf sich selbst gestellt, blieben dabei jedoch mit ihren Gedanken gewöhnlich im engeren oder weiteren Bereich ihres Faches. Einen darüber hinausgehenden Vorstoss hat L. E. J. *Brouwer* [4] unternommen durch seine Kritik an einer formalistischen Mathematik, die Entwicklung einer intuitionistischen Mathematik und weiter durch seine Kritik an einem so grundlegenden Prinzip jeder Erkenntnis wie dem „Tertium non datur“ [5].

---

[1] Vgl. hierzu z.B. R. BALDUS, *Nichteuklidische Geometrie* (Sammlung Göschen). Berlin 2. Aufl. 1944. E. KAMKE, Allgemeine Mengenlehre. *Enzyklopädie der Mathematischen Wissenschaften I*, 1 Heft 2, Leipzig 1934. Ferner S. 6, Fuss-note 4.

[2] Z. B. sei genannt: H. WENKE, Der Bildungswert der Naturwissenschaften und ihre Stellung in der Schule. Verhandlungen der *Gesellschaft deutscher Naturforscher und Ärzte*, Springer 1953, S. 3 ff.

[3] Für die Logistik besteht allerdings an der Universität Münster (West.) ein besonderer Lehrstuhl, den lange Zeit H. SCHOLZ innehatte, und der seit dem vorigen Jahr von H. HERMES besetzt ist.

[4] Over de grodlagen der wiskunde. Diss. Amsterdam 1907.

[5] Vgl. hierzu R. BALDUS, Formalismus und Intuitionismus in der Mathematik *(Sammlung Wissen und Wirken)*. Karlsruhe 1924.

Was immer wieder Verwunderung hervorruft und zum Nachdenken anreizt, ist die sprichwörtlich gewordene Sicherheit der mathematischen Erkenntnis. Sie wird dem streng logischen Schliessen zugeschrieben. Man sollte daher meinen, dass jeder Mathematiker zuerst einmal sich eingehend mit dem Teil der Philosophie beschäftigt haben müsse, den man Logik nennt. Es besteht aber die estaunliche Tatsache, dass es Mathematiker gibt, die kaum jemals eine Vorlesung über Logik gehört haben und doch ausgezeichnete Mathematiker geworden sind. Der Schlüssel zu dem Rätsel liegt darin, dass die gewöhnliche Logik der Philosophie ein nicht genügend scharfes Instrument für die Mathematik ist.

Die Sicherheit des mathematischen Schliessens bestand schon, bevor Aristoteles sein System der Syllogismen aufgestellt hatte. Auch die neueren Entwicklungen in der Mathematik lehren, dass eine genauere Zergliederung der Begriffe und Schlüsse häufig erst geraume Zeit nach ihrer ausgedehnten Verwendung erfolgt. Die Sicherheit des mathematischen Schliessens ist dadurch zu erklären, dass in der Mathematik ständig eine Fülle logischer Operationen vorgenommen wird, Fehlentwicklungen daher leicht sichtbar werden müssten und dass die Tragweite der Operationen einer ständigen unerbittlichen Kontrolle unterliegt. So hat sich im Laufe einer langen Entwicklung ein System herausgebildet, das sich als im höchsten Masse zuverlässig erwiesen hat [1]. Drastische Beispiele für die Zuverlässigkeit sind kühne Prophezeiungen wie die Berechnung der Standorte der Planeten Neptun (1846) und Pluto (1930), die vorher kein menschliches Auge gesehen hatte und die auf Grund der Vorausberechnungen tatsächlich aufgefunden wurden.

4. *Die Mathematik im täglichen Leben*

In den vorhangehenden Abschnitten haben wir uns damit beschäftigt, welche Bedeutung die Mathematiker und die Mathematik für die höher und feiner organisierten Teile des heutigen Lebens haben. Wir wollen uns jetzt mit der Frage befassen,

[1] Vgl. KAMKE, *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* 57 (1954) 6-20.

was die Mathematik für andere Lebensbezirke und insbesondere für die breite Masse der Menschen bedeutet. Die Frage ist leichter gestellt als beantwortet, weil die Antwort von dem Bildungsstand und den Interessen der Menschen abhängt, und weil beides sehr stark streut. Die Bedeutung der Mathematik, selbst in ihren einfachsten Vorstufen, liegt für den Durchschnittsmenschen gewöhnlich in der Meisterung anderer Aufgaben und der Gewinnung von Erkenntnissen auf anderen Gebieten mit mathematischen Hilfsmitteln und Methoden.

Aber der Mathematiker sieht in dieser mehr technischen Seite seiner Wissenschaft nicht das Wesentliche. Überlegungen mathematischer Art sind es z.B. auch, die zu der Erkenntnis führen, dass bei dem bekannten Kinderspiel Wolf und Schaf die Schafe stets gewinnen können. Oder ein anderes Beispiel [1]: „Three ladies A, B, C, in a railway carriage all have dirty faces and are all laughing. It suddenly flashes on A: Why doesn't B realize C is laughing at her? — Heavens! I must be laughable. (Formally: if I, A, am not laughable, B will be arguing: If I, B, am not laughable, C has nothing to laugh at. Since B does not so argue, I, A, must be laughable.)... This is genuine mathematical reasoning and surely with minimum material".

Ganz zweifellos sind mathematische (ebenso wie technische) Kenntnisse und Fertigkeiten in stetem (wenn auch langsamem und oft behindertem) Vordringen. Hierfür zwei drastische Beispiele:

Seit der Erfindung der Differential- und Integralrechnung sind, wenn man sie seit *Newton* (1643-1727) und *Leibniz* (1646-1716) datiert, rund 250 Jahre verflossen. Was damals an der Front der Forschung lag, gehört seit rund 30 Jahren zum vorgeschriebenen Lehrstoff der oberen Klassen der höheren Schulen.

Im Jahre 1790 wurde ein zum Rektor eines Gymnasiums vorgesehener Lehrer u. a. in Mathematik geprüft. Über die mündliche Prüfung heisst es [2]: „Während er in der Arithmetik eine

[1] J. E. Littlewood, *A mathematician's miscellany*, London 1953, S. 3. Durch mündliche Überlieferung schon lange bekannt.

[2] Conrad Rethwisch, *Der Staatsminister Freiherr von Zedlitz und Preussens höheres Schulwesen im Zeitalter Friedrichs des Grossen*, 2 Ausg., Berlin 1886, S. 15-21.

genügende Sicherheit zeigte, befand er sich in der Geometrie nur im Besitz der allerersten Anfangsgründe. Der Unterschied zwischen einem Zentri- und Peripheriewinkel wusste er wohl anzugeben, nicht aber den Beweis dafür zu liefern, dass einer der ersteren auf gleichen Bogen doppelt so gross als einer der letzteren ist, und bedurfte er der Einhilfe beim pythagoräischen Lehrsatz". „Aus der Arithmetik wurden ihm (in der schriftlichen Prüfung) die Aufgaben gestellt: 1. Welches ist die Summe von $4^2/_3$, $2^1/_2$, $6^3/_5$, $8^5/_6$ und $3^2/_7$? 2. Es stirbt ein Schuldner, dem vier Kreditoren Geld geliehen haben, nämlich der erste 1000, der zweite 800, der dritte 600 und der vierte 450 Taler. Er hinterliess aber nur 1596 Taler. Wieviel wird ein jeder von dem geliehenen Gelde wiederbekommen?"

Die Lösung von Rechenaufgaben dieser Art wird jetzt seit langem von den Schülern der Volksschule und in der zweiten Klasse der höheren Schulen verlangt.

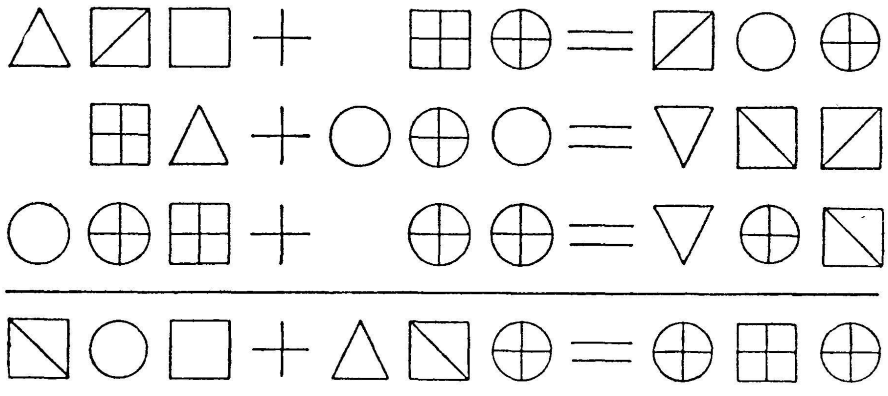
Überhaupt bildet das sichere Umgehen mit Zahlen einen nicht mehr fortzudenkenden Bestandteil des heutigen Lebens für jedermann. Man denke etwa nur an das Geld- und Kreditwesen, Steuern, die Zeitrechnung, Fahrpläne, und man male sich einmal aus, wie die Festlegung des Zeitpunktes einer Tagung und die Reisen zu ihr ohne Benutzung von Zahlen sich vollzögen.

Ebenfalls eine wichtige Rolle spielen die geometrischen Abbildungen jeder Art: Landkarten und sonstige Pläne im Verkehr, Werkzeichnungen in verschiedenen Projektionsarten. Man beobachte z.B. einmal einen Bau-Vorarbeiter (Polier) bei seinen vielfachen Arbeiten: Lesen von Bauzeichnungen, Vermessen, Nivellieren, Gestaltung der Wasserführung; und man male sich aus, wie ohne Entwürfe, Detailzeichnungen und Kalkulation auch nur das einfachste Haus gebaut werden sollte. Die Kenntnisse und Fertigkeiten mathematischen Einschlags, die von Handwerkern und Facharbeitern heute verlangt werden, sind sehr beachtlich, wenn man bedenkt, dass sie nur die allgemeine Volksschulbildung haben.

Einige Anhaltspunkte für die Verbreitung mathematischer Interessen und Kenntnisse bieten die populären mathematischen

Schriften [1]. Da solche Schriften immer wieder gedruckt werden und z.T. auch höhere Auflagen erreichen, muss ein Leserkreis für sie vorhanden sein.

Schlüsse über die Verbreitung mathematischer Vorstellungen und Kenntnisse (sehr einfacher Art) lassen sich auch aus den Zeitungen, Wochen- und Werbeschriften entnehmen. Denn alle diese Erzeugnisse der Druckpresse wollen einen grossen Leserkreis interessieren. Sie werden daher nur solche Dinge bringen, die Verständnis und Resonanz finden. Je breiter diese sein soll, um so einfacher sind auch die Mittel, die benutzt werden. So verwendet ein Finanzminister auf Plakaten etwa Kreissektoren zur quantitativen Darstellung des Ertrages der verschiedenen Steuerarten und ihrer Verwendung. Im Wirtschaftsteil der Zeitungen werden dagegen schon Darstellungen benutzt, die bereits grössere Aufmerksamkeit und ein stärkeres Sich-hineindenken verlangen. Die Unterhaltungs- und Rätselecken in Zeitungen und Zeitschriften enthalten ausser sog. „Zahlenwundern", deren mathematische Hintergründe allerdings zumeist nicht aufgedeckt werden, immer wieder Zahlenaufgaben (die bekannten über das Erraten von Zahlen, Lebensaltern und dergl.), magische Quadrate, aber auch manchmal etwas anspruchsvollere wie z.B.



[1] Die nachstehende Auswahl erhebt keinen Anspruch auf Vollständigkeit. Angaben über die Verbreitung sind nur in solchen Fällen gemacht, wo sie mir zufällig bekannt waren. E. Colerus, *Von Einmaleins zum Integral.* 101-110. Tausend, Wien 1953. — *Id., Vom Punkt zur vierten Dimension.* 48-52. Tausend, Wien 1953. — *Id., Von Pythagoras bis Hilbert.* 38-44. Tausend, Wien 1951. — H. Dörrie, *Triumph der Mathematik,* Breslau 1933. — F. v. Krbek, *Eingefangenes Unendlich.* Leipzig 1952. — A. Niklitschek, *Im Zaubergarten der Mathematik.* 61-70. Tausend, Wien 1948. — G. Polya, *How to solve it.* Princeton 1948. Deutsche Ausgabe: Schule des Denkens (*Sammlung Dalp,* Bd. 36). Bern 1949. — H. Schubert, *Mathematische Mussestunden* 11 Aufl. Berlin 1953. Mit scherzhaftem Einschlag: U. Graf, *Kabarett der Mathematik,* Breslau 1942. — W. Lietzmann, *Lustiges und Merkwürdiges von Zahlen und Formen,* 7. Aufl., Göt-tingen 1950.

Daneben findet man jedoch auch immer wieder unsinnige Fabeleien, wie über die Pyramidenmystik, die Periodenzahlen von *Fliess*, die vierte Dimension.

In der sog. schönen Literatur trifft man an vielen Stellen auf gelegentliche Ausserungen über Mathematik und Mathematiker, so z.B. *O. J. Biermann*, Prinz Kuckuck, *H. Hesse*, Glasperlenspiel, *D. v. Liliencron*, Der Richtungspunkt; *Thomas Mann*, Doktor Faustus; *E. A. Poe*, Der entwendete Brief; *Emil Strauss*, Freund Hein. In der (ungekürzten) Ausgabe von *Swift*, Gullivers Reisen, tritt ein possenhafter Mathematiker-Staat auf. Das Leben von Mathematikern haben zum Gegenstand die Romane Klara *Hofer*, Sonja Kowalewsky; Leopold *Infeld*, Wen die Götter lieben (Galois). Schliesslich sei erwähnt das berühmteste englische Kinderbuch Alice in Wonderland, das von einem Mathematiker verfasst ist.

Die persönliche Stellung der Dichter selbst ist weniger aus ihren künstlerischen Schriften als sonstigen Äusserungen zu entnehmen. Eine ganz überschwengliche Begeisterung für die Mathematik findet man bei *Novalis*, während *Strindberg* (der offenbar einen sehr schlechter Lehren gehabt hat) sich in seinen „Blaubüchern“ sehr abfällig über die Mathematiker äussert. *Goethe* hat zwar noch als gereifter Mann Privatunterricht in Mathematik genommen, ist aber trotzdem wohl nicht zu einem echten Verständnis gelangt. Sein Urteil ist getrübt durch die Verstimmung darüber, dass seine Farbenlehrs in den Kreisen der Mathematiker und Physiker keinen Anklang fand. Er erkennt aber trotzdem in verschiedenen Äusserungen die grosse Bedeutung der Mathematik an.

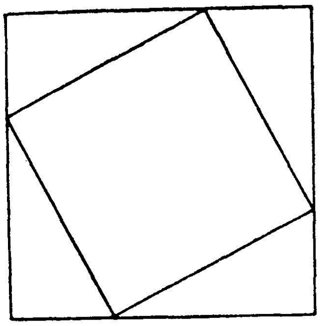
In der abstrakten Malerei [1] spielen geometrische Figuren eine beträchtliche Rolle. Z.B. hängt im Museum of Modern Arts in New York ein Gemälde „Weiss in Weiss“ von Paul *Klee*, das [2] ein Quadrat in einem anderen zeigt, beide fast weiss, jedoch verschiedenen getönt. Dagegen ist in der modernen Malerei die Kunst der Perspektive häufig wieder verloren ge-

---

1 Für weitere Beziehungen zur Bildenden Kunst sei verwiesen auf
W. Lietzmann, *Mathematik und Bildende Kunst*, Breslau 1931.
—, *Frügeschichte der Geometrie auf germanischen Boden*. Breslau 1940.
K. Bartel, *Malerische Perspektive*, Bd. 1, Leipzig 1934.

2 Wiedergabe nach dem Gedächtnis.

gangen, obwohl das Auge gegen perspektivisch falsche Darstellung sehr empfindlich ist. Die Bilder wirken dadurch oft wie solche von Kinderhand.



Trotz der nicht zu leugnenden Durchdringung des modenen Lebens mit Mathematik und der grossen Leistungen dieser Disziplin besteht auch heute noch bei vielen sog. Gebildeten eine Abneigung gegen Mathematik, Naturwissenschaften und Technik. Unwissenheit auf diesen Gebieten gilt bei ihnen nicht als beschämend, die Beschäftigung mit Philosophie, Kunst, Literatur als eine höhere Geisteshaltung.

Man sollte dabei aber auch einmal an folgendes denken. Bei primitiven Völkern war der Eintritt einer Sonnenfinsternis ein unheimliches Ereignis, das mit Furcht und Schrecken aufgenommen wurde. Mathematik und Astronomie haben uns durch die Vorausberechnung der Finsternisse davon befreit. Ist das nicht eine Leistung von höchster kultureller Bedeutung?

LE ROLE DES MATHÉMATIQUES DANS LA VIE CONTEMPORAINE

E. Kamke, Tubingue

Sommaire.

2. La mission et l'utilité du mathématicien.
    1. Le mathématicien de l'enseignement universitaire.
    2. Le mathématicien de l'enseignement secondaire.
    3. Le mathématicien qui n'est pas du corps enseignant.
3. Les mathématiques et les autres domaines scientifiques.
    1. Les mathématiques comme science auxiliaire des autres disciplines.
    2. Les mathématiques et la philosophie.
4. Les mathématiques dans la vie quotidienne.

ÜBER DIE ANWENDUNG DER MATHEMATIK AUF STAATSWISSENSCHAFTEN[1]

VON

Otto WEINBERGER, Wien

INHALTSÜBERSICHT.

Vorbemerkung.

Der Zweck der folgenden Skizze — und nur um eine solche kann es sich im gegenwärtigen Falle handeln, — besteht in dem Nachweise, dass die Mathematik auch in den *Staatswissenschaften* eine hervorragende Rolle spielt und aus dem Bereiche dieser Wissenschaften überhaupt nicht mehr fortzudenken ist. Mit Rücksicht auf die Fülle des Stoffes und die dabei bestehenden Schwierigkeiten werde ich mich auf *drei* Wissensgebiete im weitesten Sinne des Wortes beschränken, und zwar auf die *Nationalökonomie*, die *Statistik* und die übrigen *Gesellschafts-* und *politischen Wissenschaften*.

I. NATIONALÖKONOMIE.

Einer der ersten Schriftsteller, welcher die Mathematik auf Nationalökonomie angewendet hat, war der berühmte Schweizer

[1] Bericht erstattet dem Internationalen Mathematikerkongresse in Amsterdam, im September 1954.

Mathematiker Daniel BERNOUILLI (1700-1782), aus der bekannten Mathematikerfamilie der Bernouillis, Professor in Petersburg (1725) und später in Basel (1733), in seiner 1738 von der Petersburger Akademie der Wissenschaften herausgegebenen Abhandlung: *Specimen novae theoriae de mensura sortis* [1]. Bernoulli ist in dieser Schrift von der grundlegenden Erwägung ausgegangen, dass der Wert einer Sache nicht bloss von *objektiven* Momenten abhängt, wie z. B. ihrer Tauglichkeit zum Gebrauche, ihrer Seltenheit oder den zu ihrer Herstellung erforderlichen Kosten, sondern auch von den subjektiven, persönlichen Vorteilen, die die betreffende Sache ihrem Besitzer gewährt. Unter diesen subjektiven Momenten spielt das *bereits vorhandene Vermögen* desjenigen, der einen Vermögenszuwachs, z. B. einen Gewinn erzielt, eine entscheidende Rolle, da der gleiche Gewinn verschiedenen Vermögensbesitzern in verschiedenen Vermögensverhältnissen auch verschiedene *Vorteile* gewährt. Bezeichnet man daher das vor Erlangung des Vorteils vorhandene Vermögen mit α, das Vermögen plus Gewinn mit x, den Gewinn mit α—x, so ist der durch diesen Gewinn entstehende Vorteil y offenbar unter der Annahme eines kontinuierlich verlaufenden Vorteils durch die Gleichung

$$dy = b \cdot \frac{dx}{x},$$

d. h. durch die Gleichung

$$y = b \cdot \lg \frac{x}{\alpha}$$

gegeben, wobei b eine nach den Verhältnissen verschiedene Konstante bedeutet [2].

Mit diesem Begriffe der *moralischen* Hoffnung (espérance morale, bien moral), im Gegensatze zu der lediglich den Regeln der Wahrscheinlichkeitsrechnung folgenden Grösse der *ma-*

[1] Neu herausgegeben von Alfred PRINGSHEIM unter dem Tital: *Versuch einer neuen Theorie der Wertbestimmung von Glücksfällen.* Leipzig, 1890. Dazu eingehend Otto WEINBERGER, *Die Grenznutzenschule.* Halberstadt, 1926, S. 7 ff.

[2] Vgl. zur Erläuterung PRINGSHEIM, S. 34-36, Anm. 4, und WEINBERGER, S. 11, Anm. 1.

thematischen Hoffnung (espérance mathématique) hat sich später eine Reihe hervorragender Gelehrter wie LAPLACE [1], BUFFON [2] und QUETELET [3] befasst. Wichtig ist, dass bei Quetelet auch die Frage der *Spielverluste* nach den gleichen, die Vermögenslage der Spieler betreffenden Bedingungen behandelt wird, da Einsätze und Verluste bei Spielen durch diesen Umstand entscheidend beeinflusst sind. Und da schliesslich *Lust- und Unlustgefühle* für die Entstehung des wirtschaftlichen Güterwerts von massgebender Bedeutung sind, so muss an dieser Stelle auch der Versuche HERBART's über die Anwendung der Mathematik auf die Psychologie [4] und des FECHNER'schen Gesetzes über die logarithmischen Beziehungen zwischen Reiz und Empfindung [5] gedacht werden.

Im Jahre 1854 veröffentlichte der preussische Regierungsassessor Hermann Heinrich GOSSEN ein Buch über mathematische Nationalökomomie [6]. Es blieb zunächst ganz unbeachtet. In dieser Schrift entwickelt er die nach ihm benannten Gossen'schen Gesetze, laut welchen die einzelnen Genüsse bei *zunehmender* Bedürfnisbefriedigung *abnehmen* und bei *verschiedenen* Genüssen die Verteilung auf die einzelnen Bedürfnisbefriedigungsmittel in der Weise erfolgt, dass die letzten Teilmengen dieser Befriedigungsmittel *gleich grosse* Befriedigungen dem Wirtschaftssubjekte gewähren. Zu erwähnen ist in diesem Zusammenhange, dass Gossen bereits den Versuch unternommen

---

[1] *Théorie analytique des probabilités*, 2. Aufl., Paris, 1821, S. 432-445.

[2] *Essai d'arithmétique morale*, abgedruckt im 13. Bande, S. 7-101, der in Venedig im Jahre 1820 erschienenen italienischen Gesamtausgabe: *Le opere di Buffon*, unter dem Titel: *Saggio d'aritmetica morale.*

[3] *Lettres à S.A.R. le duc régnant de Saxe-Cobourg et Gotha sur la théorie des probabilités, appliquée aux sciences morales et politiques.* Brüssel, 1846, S. 40-47, S. 48-53.

[4] Vgl. Johann Friedrich HERBART, *Über die Möglichkeit und Notwendigkeit, Mathematik auf Psychologie anzuwenden.* Sämtliche Werke, 7. Bd., Leipzig, 1851, S. 129-72, und dazu Otto WEINBERGER, *Economia matematica.* Memoria presentata all'-Accademia di Scienze Morali e Politiche della Società Reale di Napoli, Neapel, 1937, S. 18-21, mit weiteren Literaturangaben.

[5] Zum Texte Gustav Theodor FECHNER, *Elemente der Psychophysik.* Leipzig, 1860, 2 Bände, und dazu WEINBERGER, *Grenznutzenschule*, S. 19-30. Das Fechner'sche Gesetz hat die Form

$$\gamma = k \cdot \log \beta + C$$

wobei β den Reiz, γ die Empfindung, k und C aber Konstanten bedeuten (C die sog. Integrationskonstante). Über Fechner's „experimentelle Psychophysik" vgl. jetzt auch Hubert ROHRACHER, *Einführung in die Psychologie*, Wien, 1946, S. 109-112.

[6] *Entwicklung der Gesetze des menschlichen Verkehrs und der daraus fliessenden Regeln für menschliches Handeln.* Die umfangreiche Literatur ist verzeichnet bei Otto WEINBERGER, *Mathematische Volkswirtschaftslehre.* Leipzig, 1930, S. 67, Anm. 4.

hat, das Problem der *Bodenverstaatlichung* auf mathematischem Wege zu lösen [1].

Zwischen den Gelehrten, die sich mit mathematisch-volkswirtschaftlichen Problemen befassten, hat anscheinend keine wie immer geartete Fühlungnahme bestanden. Es war Gossen ganz unbekannt geblieben, dass ungefähr zwei Jahrzehnte vor dem Erscheinen seines denkwürdigen Buchs bereits zwei französische Gelehrte mit ähnlichen Fragen beschäftigt waren. So hatte schon in den vierziger Jahren des verflossenen Jahrhunderts der französische Ingenieur Jules DUPUIT die Messung von Nutzensgrössen, sowie die Begriffe des *Grenznutzens* und der sg. *Konsumentenrente* studiert. Er hat dabei gezeigt, wie einerseits der subjektive Nutzen durch das grösste Opfer bestimmt wird, das jemand für den Erwerb eines Guts zu bringen bereit ist, dass aber andererseits die Käufer mit Rücksicht auf die objektiv vorliegenden Kaufpreise, beim Erwerbe von Gütern wegen der verschiedenen persönlichen Bewertungen auch verschiedene Vorteile erzielen, die sich in Renten ausdrücken und (nach einem vom Engländer Alfred MARSHALL später in die Wissenschaft eingeführten Sprachgebrauche) als Konsumentenrenten bezeichnet werden [2]. Auch dem Werke des bekannten französischen Philosophen und Mathematikers Antoine Augustin COURNOT: *Recherches sur les principes mathématiques de la théorie des richesses* [3], aus dem Jahre 1838 war kein Erfolg beschieden. Er hatte seine Aufmerksamkeit vorzüglich dem Gewinne des *Monopolisten* zugewendet und gezeigt, dass die Nachfrage D (demande) eine Funktion des Güterpreises p ist, daher wir für die Nachfrage

$$D = f(p) \tag{1}$$

und für die beim Verkaufe des Monopolguts zu erzielende Geldsumme die Gleichung

$$D \cdot p = p \cdot f(p) \tag{2}$$

[1] Zum Texte GOSSEN, *l. c.*, S. 250-273.

[2] Vgl. Jules DUPUIT, *De l'utilité et de sa mesure*, Turin, 1933, eine Sammlung seiner verschiedenen Abhandlungen, mit einer Vorrede von Luigi EINAUDI und einer Einleitung von Mario DE BERNARDI.

[3] Deutsche Ausgabe unter dem Titel: *Untersuchungen über die mathematischen Grundlagen der Theorie des Reichtums*, besorgt von W. G. WAFFENSCHMIDT, Jena, 1924. Hervorragend F. MENTRÉ: *Cournot et la renaissance du probabilisme au XIX[e] siècle*,

aufschreiben dürfen. Wenn man daher feststellen will, *bei welchem Preise* der Monopolist den grössten *Geldgewinn* erzielen wird, so braucht man die soeben erwähnte Gleichung (2) nur zu differenzieren, und erhält dann die nach den Regeln der Maximal- und Minimalrechnung gleich Null zu setzende Gleichung

$$f(p) + pf'(p) = 0 \,, \tag{3}$$

daher

$$p = -\frac{f(p)}{f'(p)} \,.$$

Dass dieses p einen Maximalwert darstellt, lässt sich ohne Schwierigkeit zeigen, wenn man die zweite Ableitung

$$f'(p) + f'(p) + pf''(p) = 0 \tag{4}$$

bildet, worauf man den negativen Wert

$$p = -\frac{2f'(p)}{f''(p)}$$

erhält. Aber COURNOT ist bei Monopolproblemen nicht stehen geblieben. Er hat unter anderem auch die Theorie der *zwischenstaatlichen Wechselkurse* und der *Zollprobleme* mathematischen Betrachtungen zugeführt.

Einen weiteren Fortschritt bedeuteten die Untersuchungen von Léon WALRAS (1834-1910) [1], die sich die mathematische Darstellung des *allgemeinen wirtschaftlichen Gleichgewichts* zur Aufgabe gesetzt hatten. Ohne auf die schwierigen Einzelheiten einzugehen, möchte ich nur hervorheben, dass Walras das Problem des wirtschaftlichen Gleichgewichts bei m Waren aus

$m\,(m - 1)$ Nachfragegleichungen
und $m\,(m - 1)$ Tauschgleichungen,

zusammen $2m\,(m - 1)$ Bestimmungsgleichungen zu lösen versucht, welchen die

$m\,(m - 1)$ Gleichgewichtspreise
und die $m\,(m - 1)$ Gütermengen nach vollzogenem Tausche

Paris, 1908. Weitere Literatur bei Otto WEINBERGER, *Mathematische Volkswirtschaftslehre*, S. 43, Anm. 1. Vgl. auch A. A. COURNOT: *Die Grundlehren der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, deutsch herausgegeben von C. H. SCHNUSE. Braunschweig, 1849.

[1] HAUPTWERK: *Eléments d'économie politique pure*, letzte Auflage, Paris, 1926. Literatur bei WEINBERGER, *Mathem. Volkswirtschaftslehre*, zit. S. 94, Anm. 1. Über sein Leben und seine politischen Ansichten berichtet jetzt ausführlich: Marcel BOSON: *Léon Walras*. Paris-Lausanne, 1951.

als Unbekannte gegenüberstehen. Walras hat sich auch als *Geldtheoretiker* sehr verdient gemacht. Auch hat er die Ansichten der englischen klassischen Nationalökonomen einer scharfsinnigen Kritik unterzogen. Seine schwerfällige Darstellung steht im Gegensatze zu den leicht fasslichen mathematischen Formeln des Engländers W. S. JEVONS (1835-1882) [1], aus denen ich nur die nach ihm benannte *Verkehrsgleichung* als Beispiel herausgreifen möchte: Wenn das Wirtschaftssubjekt A die Menge a an Korn und das Wirtschaftssubjekt B die Menge b an Fleisch besitzt, so wird der Tausch zwischen diesen beiden Wirtschaftssubjekten so lange fortgesetzt werden, bis auf Seiten des A der Genznutzensgrad der ihm verbleibenden Kornmenge $(a - x)$ und jener der von B erhaltenen Fleischmenge y, und auf Seiten des B der Grenznutzensgrad der ihm verbliebenen Fleischmenge $(b - y)$ dem Grenznutzensgrade der von A erhaltenen Kornmenge x gleichgeworden sind. Dabei versteht Jevons unter dem Grenznutzensgrade das Verhältnis des Zuwachses an Nutzen (u), das durch einen kleinen Zuwachs an Gut (x) entsteht, d. h.

$$\frac{du}{dx}\,.$$

Bezeichnen wir schliesslich die Grenznutzensgrade für Korn mit

$\varphi_1 (a - x)$ für A,

mit $\varphi_2 (x)$ für B;

für Fleisch mit

$\psi_1 (y)$ für A,

mit $\psi_2 (b - y)$ für B,

so gilt die Gleichung

$$\frac{\varphi_1 (a - x)}{\psi_1 (y)} = \frac{\varphi_2 (x)}{\psi_2 (b - y)}\,.$$

---

[1] HAUPTWERK: *Theory of political economy*, 4. Auflage, London, 1911. Deutsche Ausgabe, übersetzt und mit einer Einleitung von Otto WEINBERGER, Jena, 1924.

Da schliesslich der vorliegende Bericht nur eine kurze Übersicht über das Wichtigste geben kann, so muss er sich begnügen, eine Reihe weiterer, aber hochverdienter Gelehrter wie F. Y. EDGEWORTH [1], Vilfredo PARETO [2], Rudolf AUSPITZ und Richard LIEBEN [3] lediglich zu erwähnen.

II. STATISTIK.

Der Bericht über die Fortschritte der Statistik ist viel schwieriger, weil es sich in der Nationalökonomie um eine begrenzte Reihe von Problemen handelt, die bereits in allen wichtigen Belangen durchforscht sind, während in der Statistik gerade in den letzten Jahrzehnten durch das Studium einer ganzen Reihe neuer Probleme eine erst im *Werden begriffene Wissenschaft* vor uns steht. Dazu kommt noch der Umstand, dass ein Grossteil der Probleme in das Bereich der sogenannten *Betriebswissenschaften*, fällt, die sich schon nach den Sprachbegriffen nicht unter die *Staatswissenschaften* einreihen lassen. Aber diese Betriebswissenschaften stehen andererseits mit der Nationalökonomie im herkömmlichen Sinne in solch engem Zusammenhange, dass eine Trennung beider ohne eine abträgliche Verengung des wissenschaftlichen Blickfeldes nicht möglich ist. Während es aber die Nationalökonomie nach der traditionellen Auffassung mit den sg. *makroökonomischen* Gebilden zu tun hat, d. h. mit den Wirtschaften der Gebietskörperschaften (Staat, Land, Gemeinden) und die Individualwirtschaften lediglich den methodischen Ausgangspunkt bildeten, um überhaupt wirtschaftliches Handeln analysieren zu können, hat es die Betriebswirtschaft mit den Einzelzellen der Wirtschaft zu tun, d. h. mit *mikroökonomischen* Gebilden, ihrer Organisation, ihren Handlungen und Zielen. Aber die Grenzen lassen sich

---

1 Vgl. über ihn Otto WEINBERGER, Francis Ysidro EDGEWORTH, *Jahrbücher für Nationalökonomie und Statistik*, 124. Band, III. Folge, 69. Band, 1926, S. 205-217.

2 Vgl. über ihn G. H. BOUSQUET, *Vilfredo Pareto. Sa vie et son œuvre*, Paris, 1928. Ferner Otto WEINBERGER: *Vilfredo Pareto*. Zeitschrift für die gesamte Staatswissenschaft 85. Bd., 1928, S. 521-543, und jetzt das von der Università Commerciale Luigi Bocconi herausgegebene Sammelwerk: *Vilfredo Pareto*, Mailand, 1949.

3 Über die zuletzt genannten Gelehrten vgl. Otto WEINBERGER: Rudolf AUSPITZ und Richard LIEBEN, *Ein Beitrag zur Geschichte der mathematischen Methode in der Volkswirtschaftslehre*. Zeitschrift für die gesamte Staatswissenschaft, 91. Band, Tübingen, 1931, S. 457-492.

überhaupt nicht scharf ziehen, weil sich die Individualwirtschaften zu grösseren Verbänden zusammenzuschliessen pflegen und auf diese Weise zu makroökonomischen Gebilden werden, andererseits aber bestimmte individuelle Wirtschaften, z. B. Kraftwerke, Verkehrswirtschaften, in zunehmendem Masse durch die öffentlichrechtlichen Gebietskörperschaften betrieben werden. Auch darf nicht übersehen werden, dass durch die wachsende Bedeutung betriebswirtschaftlicher Probleme auch die *technischen* Belange der Wirtschaftsführung die Aufmerksamkeit des Nationalökonomen in zunehmender Weise beanspruchen. Dass die mathematische Statistik eine Wissenschaft ist, die in gleich entscheidender Weise Gesellschafts- und Naturwissenschaften durchdringt und durch die zahlenmässige Behandlung des Untersuchungsmaterials *exakte* Schlussfolgerungen erst möglich macht, braucht an dieser Stelle nicht besonders erörtert zu werden [1].

Vor allem wird es für diesen Bericht von besonderem Interesse sein, dass sich die 25. Tagung des *Internationalen Statistischen Instituts* in Washington vom 6. bis 18. September 1947 auch mit den Fragen des *statistischen Unterrichts* befasst hat. Eine ganze Reihe von Referenten, M. F. L. CLOSON, Milton DA SILVA RODRIGUES, C. E. DIEULEFAIT, R. GUYE und G. JARDIM haben zu diesem Thema Stellung genommen [2]. Gleichzeitig hat das *Interamerikanische Statistische Institut (Interamerican Statistical Institute)* eine Entschliessung angenommen, worin die verantwortlichen Erziehungsbehörden aufgefordert werden, die Studienordnungen zu überprüfen und dem statistischen Unterrichte mit Rücksicht auf seine Bedeutung in Handelsschulen, Lehrerbil-

---

1 Vgl. über das Verhältnis der Betriebswirtschaftslehre zur Volkswirtschaftslehre, über Makro- und Mikroökonomik, sowie über die betriebswirtschaftliche Markterkundung die Ausführungen und die Literatur bei Adolf WEBER, *Allgemeine Volkswirtschaftslehre*, 6. Auflage, Berlin, 1953, S. 31-32, S. 256-259. Vgl. über den Gegenstand auch Erich SCHNEIDER, *Einleitung in die Wirtschaftstheorie*, 4. Aufl., Tübingen, 1953, und Richard RUGGLES, *Volkseinkommen und volkswirtschaftliche Gesamtrechnungen*. (Amerikanischer Titel: „An introduction to national income and income analysis".) Deutsche Ausgabe, Wien, 1952. Vgl. auch Otto WEINBERGER: Die Arbeitnehmer und die volkswirtschaftliche Gesamtrechnung, in der Wiener Zeitschrift *Arbeit und Wirtschaft*, VII. Jahrg., Nr. 5 vom 1. Dezember 1953, der auch die Lehre vom volkswirtschaftlichen „Kreislaufe" behandelt.

2 Die Titel der einzelnen Berichte sind angeführt bei Wilhelm WINKLER. Der statistische Weltkongress in Washington. *Statistische Vierteljahresschrift*, Bd. I/1 (Wien, 1948), S. 40-50, insbesondere S. 49.

dungsanstalten, sonstigen Mittelschulen, sowie auf Universitäten den ihm gebührenden Platz einzuräumen. Während, was die Einzelheiten anlangt, auf die Entschliessung selbst verwiesen wird, soll nur hervorgehoben werden, dass empfohlen wurde, beim Unterrichte in den mathematischen Lehrgegenständen an Mittelschulen auch die Anwendungen in der Statistik zu berücksichtigen, auf den Universitäten aber in den Wirtschafts- und Sozialwissenschaften, in der Medizin, Agronomie, Technik, Psychologie und den sonstigen in Betracht kommenden Wissenschaften, auch die höhere angewandte Statistik, die Ökonometrie, die Biometrie, die Psychometrie usf. zu lehren und schliesslich dafür Sorge zu tragen, dass besondere Lehrkurse für Berufsstatistiker abgehalten werden [1]. Gleichzeitig hat das erwähnte Interamerikanische Statistische Institut "Mindeststudienpläne für die Heranbildung leitender statistischer Beamter" entworfen und dabei drei verschiedene Typen, nämlich den *mathematischen* Statistiker, den für bestimmte Stoffgebiete spezialisierten statistischen *Analytiker* und den vorzüglich mit Leitungsaufgaben betrauten statistischen *Verwalter* unterschieden [2]. Abschliessend möchte ich zu diesem Punkte noch erwähnen, dass dem 26. Kongresse des Internationalen Statistischen Instituts in Bern vom 4. bis 10. September 1949 auch eine Reihe von Schriften über den statistischen Unterricht aus den Federn von C. TAEUBER, P. FLASKÄMPER, P. DENEFFE, H. HOTELLING und L. MAROI vorgelegt wurden [3].

Was nun die *statistische Sachbearbeitung* selbst angeht, so möchte ich zunächst betonen, dass die in den letzten Jahrzehnten unter einer besonderen wissenschaftlichen Rubrik eingeführte *Ökonometrie* meines Erachtens nicht als eine besondere Wissenschaft angesehen werden darf. Es handelt sich dabei lediglich um die Bearbeitung des aus verschiedenen wirtschaftlichen Quellen stammenden wirtschaftsstatistischen Materials mit den Hilfsmitteln der neueren mathematischen Statistik. So bespricht, um nur *ein* Beispiel zu geben, ein vor wenigen Jahren erschienenes

[1] Vgl. den Wortlaut der Entschliessung in der *Statistischen Vierteljahrsschrift*, Bd. I/2, 1948, S. 100-102.

[2] Vgl. Das Nähere in der *Statistischen Vierteljahresschrift*, I. Bd., 1948, S. 166-173.

[3] Vgl. Wilhelm WINKLER, Bericht über den 26. Kongress des Internationalen Statistischen Instituts in Bern. *Statistische Vierteljahrsschrift*, Bd. II, 1949, S. 167-172.

Buch über Ökonometrie Probleme der Messung des Grenznutzens, Einkommenverteilungsfragen, Angebot- und Nachfragekurven, Kosten- und Ertragsfragen, Bevölkerungsprobleme, Preisschwankungen und Konjunkturwellen [1]. Es braucht nicht betont zu werden, dass alle diese Gegenstände auch in einem Lehrbuche der Nationalökonomie abgehandelt werden. Viel wichtiger als diese lediglich terminologischen Kontroversen ist der Umstand, dass die sogenannte *quantitative Betriebsforschung* mit ihren formalmathematischen Werkzeugen, wie dem Prüfen von Durchschnitten und Streuungen, Korrelationen und Regressionen, dem Stichprobenverfahren, den Äquivalenz- und Indexmethoden, einen Aufgabenkreis geschaffen hat, dessen praktische Bedeutung nicht unterschätzt werden darf. Dazu gehören das Planversuchswesen, die Arbeitsforschung, die statistische Qualitätskontrolle, die Produktionsanalyse einschliesslich der Produktivitätsmessungen, Kostenstrukturanalysen, Personalstatistik, sowie die Markt- und Meinungsforschung [2]. Auf weitere Einzelheiten muss im Rahmen dieses kurzen Berichts, der nur Fingerzeige geben will, verzichtet werden.

III. Gesellschafts- und politischen Wissenschaften.

Welch bedeutendes Arbeitsfeld die Mathematik auf dem Gebiete der politischen Wissenschaften besitzt, beweist ein amerikanisches, ausschliesslich diesem Gegenstande gewidmetes

---

1 Vgl. zum Texte Wilhelm Winkler, *Grundfragen der Ökonometrie.* Wien, 1951. Leicht fasslich und besonders empfehlenswert Jan Tinbergen, *Einführung in Ökonometrie.* Wien-Stuttgart, 1952. Er bezeichnet die Ökonometrie als eine Wissenschaft, in der "mathematisch-ökonomische und mathematisch-statistische Forschung kombiniert angewendet werden". Das Buch enthält reichhaltige Literaturangaben. Vgl. noch Gerhard Tintner, *Econometrics,* New York, 1952; Hermann Wold, *Demand analysis,* New York, 1952; *Studies in econometric methods,* ed. by Wm. C. Hood and Tjalling C. Koopmans, New York, 1953.

2 Zum Texte Adolf Adam, Quantitative Betriebsforschung, *Statistische Viertelsjahrsschrift,* Bd. V (1952), S. 102-115, mit Literaturangaben. Vgl. auch seinen Aufsatz: Das Betriebsspektrum, *Vierteljahrsschrift* zit., Bd. VI, 1953, S. 37-57. — Über das an das Buch *Abraham Wald's Sequential analysis,* New York, 1947, anknüpfende Stichprobenverfahren vgl. Leopold Schmetterer, Einführung in die Sequential Analysis, *Vierteljahrsschrift* zit., II, Bd. Heft 3/4, S. 101-105; ferner Wilhelm Winkler, Das Stichprobenverfahren im Dienste von Volkszählungen, *Vierteljahrsschrift* zit., III. Bd. Heft 3/4, 1950, S. 111-114; Heinrich Wagner, *Das Stichprobenverfahren bei Bevölkerungserhebungen,* daselbst S. 114-117, und Adolf Adam, *Zur bayerischen Volks- und Berufszählung,* daselbst S. 117-122. — Aus der Literatur über mathematisch-statistische Methoden vorzüglich Arthur Linder, *Statistische Methoden,* 2. Aufl., Basel, 1951; derslebe: *Planen und Auswerten von Versuchen,* Basel-Stuttgart, 1953, und Maurice G. Kendall, *The advanced theory of statistics,* London, 1945.

Buch [1]. Prof. RICE beginnt seine Ausführungen mit einer sehr interessanten Untersuchung über das Verhältnis der *Geschichte* (history) zu den *Naturwissenschaften* (science). Beide wollen wirkliche (real) Erscheinungen beschreiben, gleichgültig, ob sie der Vergangenheit oder der Gegenwart angehören. Man hat aber den Unterschied beider Wissenschaften darin erblickt, dass die Geschichte mit *Ereignungen* (events), die Naturwissenschaften mit *sachlichen Gegenständen* (material entities) zu tun hätten. Die Ereignung sei ein Geschehen in der Zeit (occurrence in time), der sachliche Gegenstand, die "Entität" eine Erscheinung im Raume in einem bestimmten Zeitmomente. Diese Unterscheidung ist nach Rice unhaltbar, weil *beide* Phänomene *Veränderungen* unterliegen, Ereignungen ohne Veränderungen materieller Gegenstände nicht möglich sind und daher auch ohne die Schilderung dieser Veränderungen nicht beschrieben werden können, und die sachlichen Gegenstände (things, entities) gleichfalls nur in ihren veränderlichen Erscheinungen auftreten. Ebenso unhaltbar ist es nach Rice, den Unterschied darin zu sehen, dass geschichtliche Ereignungen (events) den Charakter der *Einmaligkeit* tragen, während die Ereignungen, die die Naturwissenschaften beobachten, sich wiederholen und unter Umständen auch *willkürlich* wiederholt werden können. Es kommt nämlich nach Rice auf den Zweck der Beobachtung an, ob man ein Individuum als Einzelnes, oder als Gegenstand einer ganzen Klasse, eines Aggregats, betrachten will. Das einzelne "Individuum" kann beispielsweise für den Physiologen als ein Aggregat von Zellen betrachtet werden, deren Aufbau und Leistungen er studieren will; es kann für den Psychiater nur ein "Fall" unter vielen anderen sein, um an ihm die Gesetzmässigkeit bestimmter seelischer Komplexe festzustellen. Daher können auch "geschichtliche" Ereignungen, z. B. finanzielle Depressionserscheinungen, klassifiziert und im Wege von Trend-Gleichungen, Indexen von saisonmässigen Veränderungen oder zyklischen Schaubildern den Methoden der mathematischen Statistik unterworfen werden [2].

---

[1] Stuart A. RICE, *Quantitative methods in politics*. New York, 1928.

[2] Vgl. über das Problem im Texte auch Wilhelm WINKLER, Statistik und Geschichte, *Statistische Vierteljahrsschrift* cit., IV Bd., 1951, S. 135-138, der meint, dass sich "der Geschichtsschreiber mit statistischem Wissen, der Statistiker mit geschichtlichem Wissen wappnen müsse, um seiner Aufgabe voll gerecht zu werden".

Einen besonderen Nachdruck legt Rice auf den Begriff des *Verhaltens* (attitude) der Individuen gegenüber dem Zeitgeschehen. Es kommt darin die Neigung (disposition) des Individuums in der Richtung eines bestimmten Betragens (behavior) zum Ausdrucke, ohne Rücksicht auf die Vernünftigkeit (rationality) dieses Betragens in Beziehung zum Gegenstande. Die *Politik* als Wissenschaft befasst sich unter anderem mit der Natur, dem Inhalte und der Verteilung dieses individuellen Verhaltens und mit dem Einflusse, den es dadurch auf die Regierung ausübt. Dieses Verhalten kann ferner *zahlenmässig ausgewertet* und bildet auf diese Weise die Grundlage für seine mathematisch-statistische Behandlung. Bei dieser Behandlung ist die Frage zu prüfen, ob diese Verhaltungsweisen der Aggregate dem *normalen* Verteilungsgesetze unterliegen oder nicht. Bei der Bildung von Gruppen zum Zwecke der Prüfung (test) ihrer Verhaltungsweisen ist aber Vorsicht am Platze. Man darf nur Gruppen bilden, deren Interessen konform gehen, und nicht solche, bei welchen eine Untergruppe an der Frage überhaupt nicht interessiert ist oder sich in einer gegensätzlichen Haltung zu übrigen Gliedern der Gruppe befindet (z. B. die Deutschamerikaner im Falle einer beabsichtigten Kriegserklärung der USA. an Deutschland). Solche politische Verhaltungsweisen sind bereits Gegenstand von Versuchen gewesen, z. B. Verhaltungsweisen in Beziehung auf Zolltarife, Prohibitionsgesetze, Vertaatlichungsbestrebungen oder Völkerbundpolitik, um nur Weniges aus dem ausgedehnten Arbeitsfelde herauszugreifen. Wenn die Ergebnisse, zu denen Rice im Laufe seiner Untersuchungen gekommen ist, nicht nachträglich eine Richtigstellung erfahren sollten, dann würde die Annahme, dass sich politische Verhaltungsweisen normal verteilen, bei experimenteller Überprüfung nicht gut abschneiden. Wenn aber die politischen Meinungen, die diese Verhaltungsweisen bestimmen, tatsächlich normal verteilt sein sollten, dann spricht die Wahrscheinlichkeit dafür, dass radikale Veränderungen dieser Meinungen weniger häufig stattfinden als man gewöhnlich anzunehmen pflegt.

Abschliessend möchte ich noch darauf hinweisen, dass die Grenze zwischen *Statistik* und *Soziologie* nur mit Schwierigkeiten zu ziehen ist. Nach Franz Zizek sind nur jene statistischen

Tatsachen auch von soziologischem Interesse, die sich auf die Struktur der Gesellschaft, die zeitliche Konstanz gesellschaftlicher Zustände und Ereignungen, ihre ursächlichen Beziehungen und endlich die Erbmassen beziehen. Demgegenüber will Wilhelm WINKLER den Unterschied zwischen statistischen Massen und soziologischen Beziehungen (Prozessen und Gebilden) darin erblicken, dass statistische Massen nur Konglomerate darstellen, die durch ein *begriffliches Merkmal*, z. B. Alter, Geschlecht, Familienstand, zusammengefasst werden, während soziologische Gebilde durch einen *inneren sinnvollen Zusammenhang*, *durch gemeinsames Denken oder Handeln* eine Gemeinschaft bilden [1]. Aber man dürfte wohl einwenden können, dass der Ausdruck ''sinnvoller Zusammenhang" sehr weitmaschig ist und die Zuzammenfassung unter Begriffsmerkmale eben deshalb geschieht, weil ein bedeutungsvoller Zusammenhang, z. B. bei Gleichalterigen, Verheirateten usf. tatsächlich besteht. Andererseits müssen die soziologisch gewiss interessanten Schicksalsgemeinschaften, z. B. der Flüchtlinge bestimmter Kategorien, nicht durch ''gemeinsames Denken oder Handeln" bestimmt sein, es ist nicht nur leicht möglich, sondern auch wahrscheinlich, dass sie in zahlreichen Belangen, z. B. über die zur Verbesserung ihrer Lage zu treffenden Massnahmen, weder eines Sinns sind, noch in derselben Richtung handeln wollen.

Man hat die Anwendung der Mathematik und der exakten Forschung auf dem Gebiete der *Sozialwissenschaften* mit dem Hinweise bekämpft, dass die Ergebnisse den aufgewendeten Apparat nicht gelohnt haben. Aber auch abgesehen davon, dass dieser Einwand sehr anfechtbar ist, wird dabei vergessen, dass es sich um eine verhältnismässig junge Wissenschaft handelt und die trockenen, aber zahlenmässigen Ergebnisse mathematischer Forschung die vielfach unklaren und verschwommenen Ausführungen der Gegner dieser Forschungsmethode bei weitem übertreffen [2].

---

[1] Vgl. zum Texte Wilhelm WINKLER, Gesellschaftsstatistik und Soziologie, *Statistische Vierteljahrsschridt* zit., IV. Band, 1951, S. 104-113.

[2] Vgl. zum Texte Karl MENGER junior: *Einige neuere Fortschritte in der exakten Behandlung sozialwissenschaftlicher Probleme*, in ''Neuere Fortschritte in den exakten Wissenschaften". Dritter Zyklus. Wien, 1936, S. 103-132. — Aus der neuesten Literatur vornehmlich Wassily LEONTIEF: Mathematics in Economics, *Bulletin of the American Mathematical Society*, vol. 60 (Mai 1954), S. 215-233, der aber die Ergebnisse der mathematisch-ökonomischen Forschung für sehr dürftig hält.

DE L'APPLICATION DES MATHÉMATIQUES AUX SCIENCES SOCIALES

Otto Weinberger, Vienne

Résumé.

La première partie de l'article se rapporte à l'économie politique et décrit les premières tentatives d'appliquer les mathématiques à cette science, et particulièrement les théories de Daniel Bernouilli sur l'espérance morale et l'espérance mathématique, de Jules Dupuit et de H.-H. Gossen sur l'utilité marginale, les recherches de A.-A. Cournot sur les monopoles et le commerce international, de Léon Walras sur l'équilibre économique et de St. Jevons sur l'équation d'échange. — La deuxième partie concerne la statistique, et particulièrement le développement de la statistique mathématique et l'importance de ces études pour toutes les sciences naturelles et sociales. L'auteur s'occupe ensuite des propositions des derniers congrès de statistique visant à la réforme de l'enseignement de la statistique et à l'introduction de la statistique dans le programme des écoles normales et commerciales, des lycées et des universités, afin de pourvoir à la formation d'un corps qualifié de statisticiens pour les administrations publiques et privées. — La dernière partie concerne les méthodes quantitatives en matière de politique, les distributions statistiques relatives à des événements sociaux et enfin les rapports entre la statistique et la sociologie en général. L'auteur a joint à son exposé des renseignements bibliographiques étendus.

ROLE DU MATHÉMATICIEN DANS LA VIE CONTEMPORAINE [1]

PAR

Georges DARMOIS, Paris

Il existe un rôle normal et qu'on pourrait dire séculaire, des mathématiques et des mathématiciens, dans l'intelligence du monde et la construction des modèles efficaces de son activité.

Mais c'est surtout au développement actuel que sera consacré ce rapport.

Il semble bien que ce n'est pas une erreur d'optique de juger ce développement exceptionnel dans son accélération. Entendons par là que jamais les disciplines mathématiques n'ont été aussi vivantes, aussi actives et aussi fécondes dans l'art de l'ingénieur pris au sens le plus large, et dans la recherche technique sous toutes ses formes.

Le rôle des mathématiques, dans l'expansion générale de l'univers scientifique, dépasse la moyenne, elle même très élevée. Ce phénomène doit être à la fois encouragé et contrôlé. Il devrait avoir des conséquences sur la structure et le développement de l'enseignement et de la formation, et doit permettre d'envisager, avec une sécurité nouvelle, la préparation de la jeunesse et

---

[1] La Sous-Commission française de la Commission internationale de l'enseignement mathématique, présidée par M. CHATELET, a confié à M. Georges DARMOIS la tâche de recueillir auprès de divers mathématiciens les éléments de ce rapport. Il faut citer tout particulièrement MM. COUFFIGNAL, inspecteur général de l'Instruction publique; HOCQUENGHEM, professeur au Conservatoire national des arts et métiers; PARODI, professeur au Conservatoire national des arts et métiers; POIVILLERS, directeur de l'Ecole centrale des arts et manufactures; SUCHET, directeur de l'Ecole national des télécommunications; VIGNAL, directeur des études à l'Ecole polytechnique; Jean VILLE, agrégé des sciences mathématiques, docteur ès sciences, ingénieur à la Compagnie alsacienne de constructions mécaniques. qui, soit dans leurs rapports, soit dans leurs remarques et suggestions ont contribué à l'élaboration du rapport d'ensemble.

l'adaptation des adultes à des fonctions et à des carrières nouvelles.

Je veux dire tout de suite que, dans ce développement nécessaire, doivent être développées tout d'abord les mathématiques dans leurs fonctions permanentes, qui sont d'être la source vive de la formation du goût et de l'esprit mathématique, de l'attachement à la recherche fondamentale. Dans un rapport particulier, M. Jean VILLE exprime des pensées qu'il faut citer longuement:

« Si on met à part les difficultés de démonstration, les théories mathématiques modernes, tout au moins depuis le milieu du XIXe siècle, ont une tendance à la synthèse et à l'unification qui permet de rattacher leur exposition à des idées simples et naturelles.

» Cet aspect des mathématiques pures est d'autant plus marqué que le niveau est plus élevé, de sorte que l'on pourrait dire, avec une apparence de paradoxe que le niveau d'un enseignement de mathématiques pures à l'usage de techniciens, *n'est jamais trop élevé*; il y a naturellement confusion possible entre *niveau* et *difficulté*; cette confusion ne sera faite par aucun mathématicien averti, bien que pour l'écarter, c'est-à-dire pour trouver une forme d'exposition simple et attrayante à des théories élevées, il faille résoudre des problèmes pédagogiques qui, eux, sont difficiles et demanderont au corps enseignant de nos Facultés un très lourd effort. »

Nous voyons paraître ici, au sommet de l'enseignement, ce problème pédagogique de l'exposition efficace qui se présente à tous les échelons, et qui exige, avec une longue méditation préalable, une constante modestie, un esprit toujours ouvert à la modification de ses méthodes.

C'est ce permanent effort de travail et de modestie qui seul peut donner à l'enseignement son effet véritable.

Il y a bien des aspects de l'intelligence; il faut nous efforcer de les atteindre, et de ne rebuter par notre faute aucune des très nombreuses possibilités de l'esprit.

Une forme d'exposition qui nous paraît être arrivée à un point de perfection, parce qu'elle est complète, élégante et brève, peut dans la réalité n'être qu'un raccourci, impraticable au plus grand nombre, et que nous devons remplacer par un cheminement plus long sans doute, mais assez aisé et plus riche d'enseignements.

On ne saurait trop insister sur ce point. Si l'Université veut faire son devoir, être présente comme elle le doit, être efficace dans cet immense travail de formation, il faut, non seulement qu'elle apporte l'appui de sa force, de la solidité et de la profondeur de ses connaissances, mais il faut aussi qu'elle soit accueillante aux changements nécessaires de forme. Il faut qu'elle ait toujours en vue, avec la hauteur de l'enseignement qu'elle donne, la puissance de pénétration de cet enseignement et la qualité de la formation qui doit en rester.

Je voudrais maintenant tenter de justifier ce que j'ai dit et ce que je pense. Nous avons de plus en plus besoin d'hommes d'un type nouveau, soit qu'ils aient à traiter des extensions de problèmes anciens, soit qu'ils voient apparaître d'autres problèmes très différents.

Tout cela exige de véritables conseillers mathématiques, distincts ou non des hommes qui pratiquent la recherche et l'art de l'ingénieur, destinés en tout cas à travailler avec eux dans une totale communion d'intérêts scientifiques.

Je citerai ici la fin du rapport de M. SUCHET:

« Il ne faut pas conclure (des exemples précédents) que les ingénieurs des télécommunications d'aujourd'hui doivent seulement savoir utiliser des procédés mathématiques dont leurs prédécesseurs n'avaient pas besoin. Ce n'est pas seulement cela.

» Il faut, et c'est là un souci essentiel pour la formation des jeunes qui seront les techniciens de demain, qu'une proportion non négligeable d'entre eux soient vraiment au courant des mathématiques modernes pour pouvoir faire profiter les télécommunications des progrès de la science. Aux Etats-Unis, où l'on regarde souvent avec envie le développement de la technique, le recrutement traditionnel des ingénieurs en considération surtout des possibilités immédiates des individus fait place de plus en plus à un recrutement fondé sur les connaissances scientifiques générales et notamment le bagage mathématique des jeunes débutants. »

Des questions analogues se posent, comme le fait remarquer M. COUFFIGNAL, dans l'exécution des calculs numériques:

« Le développement de la recherche scientifique et la finesse atteinte par certaines techniques, ont nécessité, depuis quelques années, des calculs de plus en plus complexes. Le matériel de calcul constitué par les machines universelles, qui sont généralement électroniques, est né de cette nécessité. Et, comme il arrive toujours, la présence de moyens de calcul puissants conduit à reprendre des problèmes qui avaient été abandonnés dans l'impossibilité d'effectuer les calculs numériques nécessaires.

» Mais la question s'est trouvée posée presque aussitôt du mode d'utilisation correct de ces engins nouveaux; précision des résultats, réduction du nombre d'opérations élémentaires nécessaires à la solution d'un problème, et plus généralement méthodes de résolution des problèmes. Une discipline nouvelle se constitue, sous le nom d'Analyse numérique, qu'adoptent généralement les ouvrages de toutes langues où sont rassemblés les premiers résultats acquis.»

Après ces citations, on comprendra sans doute, plus facilement et plus complètement ce que j'entends par les conseillers mathématiques des laboratoires et entreprises. Je voudrais donner ici une courte liste, qui pourrait être allongée, des organismes qui, dès maintenant, les utilisent:

Laboratoires de physique nucléaire
Laboratoires de calculs numériques et calculs mécaniques
Laboratoires de balistique — Laboratoires des Hautes températures
Grandes entreprises privées ou nationalisées (Electricité — Gaz — Sidérurgie)
Grands services de l'Etat (Comptabilité nationale — Revenu national)
Services nationaux et internationaux d'économie et Statistique.

Un point pratique très important.

Il est absolument nécessaire que la jeunesse de grande valeur qui s'engage dans cette voie soit assurée que ce n'est pas une impasse, et qu'elle comporte, d'abord un présent attrayant, ensuite un développement et un avenir; cet avenir devant être à la fois scientifique et matériel.

Le lien à maintenir entre les différents domaines de la recherche et les organismes d'enseignement et de formation n'est pas sans rapport avec ce problème, qui est difficile.

Mais on ne saurait, sans risque grave, le méconnaître. Il faut que les chercheurs, qui sont le moteur du progrès, scientifique et technique, ne soient pas laissés en arrière dans cette marche.

Formations nouvelles.

Il me semble particulièrement important de noter les progrès récents faits dans les divers domaines suivants:

Méthodes mathématiques de la Physique
Probabilités et Statistique mathématique
Méthodes mathématiques de l'économétrie
Méthodes mathématiques de la biométrie
Applications des méthodes statistiques à l'industrie, aux entreprises.

Il est bien évident que ces différents domaines présentent bien des zones de recouvrement et qu'en donnant aux mots un sens un peu élastique, les méthodes mathématiques de la Physique comprendraient à peu près tout. Mais il vaut mieux sans doute, pour des applications efficaces, conserver dans l'enseignement et la formation un morcellement analogue au précédent.

Je ne dirai que quelques mots des Méthodes mathématiques de la Physique, qui, du moins en France, ont pris une existence autonome depuis quelques années, et sont sans doute appelées à un large développement. Elles répondent au double désir de montrer aux mathématiciens la richesse et la vie des problèmes posés par la physique et aux physiciens et ingénieurs l'étendue des ressources intellectuelles et concrètes, que leur apportent les théories mathématiques, avec l'espoir qui se réalise, de voir se faire la soudure, ou pour le moins, se constituer des articulations harmonieuses.

Je voudrais traiter un peu plus longuement des autres champs d'application des méthodes mathématiques probabilistes et statistiques, à cause de leur importance, sans doute, mais aussi pour les éléments nouveaux qu'elles apportent à la formation de l'esprit du chercheur.

L'esprit probabiliste et statistique.

On sait bien qu'une très grande partie de nos connaissances, de nos jugements, de nos mesures proviennent d'échantillons aléatoires et d'une ressemblance escomptée de l'échantillon et de l'ensemble dont il est extrait. Cet « Ars conjectandi » qui précise et rassemble les méthodes par lesquelles nous pouvons progresser dans la connaissance a enrichi l'esprit humain de notions très neuves, et qu'il aurait difficilement acquises autrement.

L'indépendance stochastique, et la dépendance ou liaison stochastique ne se sont bien précisées qu'assez tardivement. Mais cette liaison, très générale, qui comprend la liaison fonctionnelle, est un élément essentiel de la pensée et de l'art de l'ingénieur moderne.

Une acquisition très importante.

Au fond de la pensée de Jacques Bernouilli, et comme le but de la quatrième partie de son ouvrage se trouvait évidemment l'idée du cheminement aléatoire vers la connaissance, c'est dans cette voie, dans l'organisation du cheminement le meilleur qu'ont été réalisés récemment de grands progrès. On peut, si l'on veut, garder à cette démarche le nom de plan d'expérience (experimental design) qui sert à dénommer tout un ensemble de cas particuliers importants.

La Statistique moderne s'est trouvée transformée, renouvelée par cette notion dont la fécondité ne cesse de grandir.

Autrefois, le statisticien était volontiers considéré comme un être perfectionné sans doute mais un peu passif, et destiné à la transformation en lois (dites statistiques) d'une information encombrante et confuse, dont on n'arrivait à tirer rien de simple et clair, et que pour cette raison, on lui confiait après essai infructueux. On n'avait généralement pas idée de l'appeler avant de commencer une recherche.

Maintenant, le statisticien est associé étroitement aux *préparatifs* de la recherche, à la confection du plan suivant lequel elle sera menée. Le but, dont on aperçoit bien le caractère général, est d'obtenir, dans certaines limites de possibilités, l'information la plus étendue sur un sujet donné.

C'est bien, évidemment, cette question du cheminement optimum vers la connaissance. Cette modification fondamentale de la position du statisticien provient surtout de l'impulsion, originale et puissante, donnée par Sir Ronald FISHER. Un des outils mathématiques, qui permet de diriger ce cheminement est ce qui a été développé dans la théorie de l'information. En vérité, cette théorie a introduit diverses cotes numériques de la valeur de la position atteinte en un point du cheminement. Chacune de ces cotes ou information, peut avoir une forme mathématique variable suivant le but qu'on a cherché à atteindre.

Il faut bien remarquer qu'un tel cheminement n'est pas nécessairement fixé d'avance, et qu'un pas ultérieur peut être orienté d'après le résultat de la portion du cheminement déjà faite. Dans un cas particulier, l'analyse dite séquentielle peut s'arrêter après un nombre de pas non fixé d'avance, dès qu'on a atteint le degré de connaissance qui paraît suffisant pour agir avec de bonnes chances de succès.

Sans insister sur ces points, et mentionnant seulement la recherche dite opérationnelle qui appartient à ce grand domaine, on voit à quel degré d'enrichissement mental et d'efficacité concrète amène l'exploration raisonnée de ces problèmes qui comprennent également la vaste théorie de l'estimation, de la théorie générale des erreurs, et des tests statistiques.

Je ne crois pas m'être trop avancé en parlant de chercheurs d'un type nouveau, et j'espère que la suite va le montrer plus encore.

L'Econométrie.

L'introduction des mathématiques dans la recherche économique ne date pas d'hier; si les discussions continuent, le développement se poursuit. Le traité d'économie pure de Maurice ALLAIS, qui comporte cinq volumes, en est un témoignage parmi bien d'autres.

Mais je veux insister en plus sur l'introduction de l'aléatoire dans les modèles économétriques. La possibilité de tels modèles apparut sans doute dès les premières recherches de YULE sur les taches solaires et la perturbation des mouvements cycliques par des impulsions aléatoires. SLUTSKY, a la même date (1927) examinait une autre face du problème; c'est en 1933 que Ragnar Frisch marque le profond intérêt des idées de Yule pour l'étude des mouvements économiques.

Un ouvrage comme celui de H. Wold, intitulé modestement *Demand analysis*, en même temps qu'il traite de la façon la plus concrète le sujet, contient un des développements les plus modernes sur les processus stochastiques.

La théorie du risque en économétrie, et ses applications, provoquent de nombreux travaux. Un colloque international lui a été consacré à Paris en mai 1952. L'ensemble est publié par le Centre d'Econométrie du Centre national de la Recherche scientifique.

Il est remarquable que des cours organisés par le Centre d'Econométrie sur les « Stratégies et décisions économiques — Etudes théoriques — Applications aux entreprises » et des cours et conférences sur les méthodes mathématiques de l'économétrie soient suivis fidèlement malgré leur niveau plutôt élevé et l'absence de sanctions universitaires. Sans insister sur d'autres détails, il me paraît que ce domaine de recherches donnera beaucoup de résultats théoriques et pratiques à la jeunesse d'une solide formation scientifique.

La Biométrie.

Il suffit de rappeler que la Société internationale de Biométrie « Biometric Society » qui groupe plusieurs sociétés nationales ou d'ensembles régionaux, publie un journal *Biometrics* largement alimenté d'applications (discussion d'expériences; plans d'expériences...).

Dans le problème général dont nous avons parlé, du cheminement optimum vers la connaissance, la biométrie offre certainement un des plus beaux champs où les récoltes théoriques et pratiques sont assurées.

Le cas particulier, déjà immense, de la génétique, suffirait seul, mais il en est d'autres.

Les applications de la Statistique (et de l'économétrie) à l'industrie (et aux entreprises).

Je voudrais signaler ici les premiers résultats d'une expérience d'enseignement et de formation.

L'Institut de Statistique de l'Université de Paris a été créé depuis une trentaine d'années par un groupe d'hommes convaincus de l'importance du « rôle du statisticien dans la vie contemporaine ». La création de nouveaux enseignements, pour favoriser la naissance ou encourager le développement de techniques nouvelles, impose une surveillance constante de l'horizon scientifique, technique et économique. Il faut en effet, n'être pas trop en avance en raison de l'extrême viscosité d'un milieu non préparé, ni en retard, car il faut alors redresser certains empirismes. De plus, quand on se décide, il faut avoir déjà une équipe, de formation scientifique solide, avec une bonne expérience du concret.

On sait bien que, depuis vingt ans environ, une vague nouvelle d'applications industrielles de la Statistique s'est formée et a passé sur les Etats-Unis d'abord, avant d'arriver en Europe. Nous avons essayé pour la France en 1937. La viscosité était trop forte. Les chefs d'entreprises, non préparés à ces méthodes par la formation reçue dans leurs écoles, n'y croyaient guère, en tout cas préféraient attendre.

La guerre, pour la France, a immobilisé très vite ce que nous avions mis en route, et qui, aux Etats-Unis et en Angleterre se développait à grande allure, Nous avons attendu la fin de la guerre. En 1945, j'ai créé des enseignements nouveaux à l'Institut de Statistique de l'Université de Paris, biologie et agriculture d'un côté, et de l'autre, techniques et recherches industrielles.

En 1950, pour les ingénieurs déjà engagés dans les entreprises, j'ai créé des enseignements spéciaux. Nous ne touchions que la région parisienne. Il fallait autre chose, pour la France entière et non seulement pour les ingénieurs, mais pour leurs collaborateurs.

En juillet 1952, le recteur de l'Université de Paris décidait le principe de la création à l'Institut de Statistique, d'un Centre de formation des ingénieurs et cadres aux applications industrielles de la Statistique. Il restait à accomplir ce travail de longue méditation préalable, suivi du permanent effort de travail et de modestie dont j'ai parlé tout au début de ce rapport.

La méditation a duré six mois; une équipe, formée pendant quinze à vingt ans, a réfléchi et discuté sur les programmes et méthodes adaptés à nos buts, sur la formation élémentaire et la formation élevée. Nous n'avons pas tout réussi du premier coup. Nous avons sollicité les critiques de nos stagiaires, et nous continuons. Nous disposions, au début, de l'expérience des autres pays, et nous étions assurés que, convenablement conduite, l'expérience devait réussir.

Nous avons, sans sacrifier les principes généraux, donné de tout ce que nous jugions essentiel, un enseignement aussi concret que possible, constamment nourri de travaux pratiques, de calculs sur des cas réels. Sans manquer à cette modestie nécessaire, je crois pouvoir dire que la méthode a réussi.

Nos stagiaires, revenus dans leurs entreprises après les stages de formation (deux ou trois semaines) sont au travail. Une revue de Statistique appliquée les tient en liaison avec les recherches et réalisations internationales. [1])

Une section des applications peut étudier les problèmes nouveaux.

J'ai voulu montrer par cet exemple que le problème pédagogique de l'exposition efficace a pu être résolu par un travail intense, continu, de collaboration et discussion.

Je crois qu'il peut être résolu à tous les échelons de l'enseignement mathématique, mais conformément à ce que pense M. Jean VILLE, il exige, nous l'avons bien vu, *un très lourd effort.*

J'arrêterai ici cet exposé. J'ai volontairement laissé divers points de côté. J'en ai sans doute, involontairement, oublié d'importants. Et je veux remercier, une fois de plus, tous les mathématiciens qui m'ont aidé de leur expérience et de leurs idées.

---

1 Soixante d'entre eux sont revenus, en Mai 1955, échanger leurs idées sur les travaux réalisés par eux dans leurs entreprises.

THE FUNCTION OF MATHEMATICS IN MODERN SOCIETY AND ITS CONSEQUENCE FOR THE TEACHING OF MATHEMATICS [1]

BY

D. VAN DANTZIG, Amsterdam

Professor in the Theory of Collective Phenomena at the University of Amsterdam.

CONTENTS

1. Society's growing demand for mathematics.

The degree to which mathematics are applied to other sciences and to non-scientific social activities is rapidly increasing, in particular during the last decades: any convenient mathematical model for it would have to have positive derivatives, at least of the first and second order.

Firstly the number of fields to which mathematics are applied increases. To the classical fields: astronomy and geodesy,

[1] Report presented by the author on bequest of the National Committee of the ICMJ in the Netherlands before section VII of the International Congress of Mathematicians, on September 8, 1954 in Amsterdam.

mechanics, physics, technical and actuarial sciences, later biology, economy and psychology have been added, at first in the form of biometry, econometry and psychometry, mostly using statistical methods. More recently such methods are more and more applied to industrial planning, to medicine, biochemistry, physiology and pharmacology, to sociology, cryptology, etc.

Also philosophy and even linguistics (mechanical translation), get slowly interested in applying mathematical and symbolic logical and semantical methods. It is a curious fact that, although often a first initiative was taken by mathematicians, it is on the whole not due to mathematical propaganda and advertising, but rather to genuine autonomous demand from the side of the workers in these different fields, which feel more and more helpless if they cannot handle the mathematical methods themselves. Only a few domains have abandoned the use of mathematics, in particular music and the pictorial arts (perspective). Whether to their advantage or not, more competent judges may decide. Among the fields which have hardly begun to make use of mathematical and logical methods occurs, surprisingly, the teaching of mathematics.

Also the number and the variety of applications of mathematics have greatly increased. Extensive new branches have been created which are wholly or mainly based on mathematical methods. As such we mention, leaving aside the classical fields of physics and astronomy [1]: Design of experiments, in particular the analysis of variance, at first mainly used in agriculture, later also in many other fields; Renewal theory in mathematical population theory; Theory of risk and net retain in insurance; Symbolic logic and semantics; Biomathematics; Factor analysis in psychology, etc.; Quality control; Mathematical theory of communication; Information theory and cybernetics; Econometric decision theory, based on the theory of strategic games, in particular linear programming; Periodogram-analysis and time series theory; Theory of statistical decision functions, etc.

---

[1] Neither this nor any other of the further lists has any pretention of completeness.

Although we might not claim that the new theories in all cases yield a practical output equivalent to their mathematical difficulty, the judgment of the workers in these fields considers them on the whole as beneficial to their particular domain.

All this requires a re-orientation of the teaching of mathematics, in particular in secondary schools, towards which the present enquiry of CIEM may be considered as a decisive step.

2. Pure and applied mathematics.

Until a few decades ago applied mathematics was considered by the majority of mathematicians as second rank mathematics, notwithstanding the fact that almost all mathematicians till Laplace and Gauss, and since that time e.g. Riemann and Poincaré derived some of their most important results from the applications. This opinion expresses itself already in the word " pure " which is a (positive) " appraisal " according to Charles Morris' terminology, and is probably related to the then preponderant idealistic philosophy, mostly from German origin. It overrates greatly some special features of socalled " pure " mathematics, which, apart from a few branches like number theory and topology, almost all originated humbly from old applications (e.g. the theory of—in particular partial—differential equations and integral equations; Bessel-, Legendre-, and most other special functions). Applied mathematics seems to be like wine: it becomes pure just in course of time. With regard to mathematical rigour and generality modern applied mathematics need not be a second to the pure brand. In fact, mathematical rigour is often overdone in modern applications. A scientific theory then becomes a counterpart to the king's palace in the story of Aladdin's lamp: if a problem belongs to a scientific theory containing many points of considerable doubt and rough approximations, then to give a perfectly rigorous proof of existence of its solution in the mathematical part, is like building up one window of the palace wholly out of diamonds and rubies, whilst leaving all other ones made from plain glass.

3. Postwar development in the Netherlands.

Before the last war the development of " pure " mathematics was mainly centered in the mathematical departments of the universities, the Technical University at Delft and the Royal Academy of Sciences, and in the " Wiskundig Genootschap " (Mathematical Society), whereas " applied " mathematics was mainly developed in some other departments of these institutions, in the agricultural school at Wageningen, in some governmental or semi-governmental institutions like the Central Bureau of Statistics (C.B.S.), the National Aeronautic Laboratory (N.L.L.) and the Royal Meteorological Institute (K.N.M.I.), and in the laboratories of some big industries like Philips (Eindhoven) and the Shell Laboratories. There were some links between " pure " and " applied ", but only a few.

Since the war the recent development in other countries sketched briefly above, has had a considerable response in the Netherlands also. Several initiatives were taken just after the liberation of our country (which occurred at the very last moment only, on May 5th, 1945), although some of them came only slowly into effect, partly because we had been cut off from almost all scientific activity during the latter part of the German occupation, and could not obtain foreign literature till about 1946-1947 or even later.

In the first place the number of professorships in mathematics was increased by roughly 50%, and they were made more effective by the appointment of lecturers, instructors and assistants. Also the universities created some (mostly minor) positions for the instruction in mathematical education for future teachers. All this, however, is not characteristic for mathematics alone.

Further, shortly after the war, a new chair in the " Theory of Collective Phenomena " (mathematical statistics), one for (mathematical) logic, two special professorships in the actuarial sciences and one in applied mathematics, were founded at the University of Amsterdam. Later also professorships for statistics at the University of Groningen, the " Free University " at Amsterdam and the Technical University at Delft, a chair for mathematical economy and econometry at the University of Amsterdam, and a second professorship in the same field at the Economic School at Rotterdam came into being, whereas the Technical University at Delft recently devoted one of its mathematical chairs completely to applied mathematics with the intention of creating a new kind of instruction, viz. of "mathematical engineers". Also some of the chairs of mathematics in the universities are partly devoted to applied mathematics and new ones are being or going to be created.

Moreover, we mention a few new institutions like the governmental Central Planning Office, the department for (computational and statistical) elaboration of observational results of the (governmental) Organization for Applied Scientific Research (T.N.O.), the Quality Service for the Industry and the Mathematical Centre.

Finally some societies were founded which are closely related to mathematics, like the Society for Statistics (which has a special section for mathematical statistics, and which amalgamated later with an older and less mathematically minded statistical society), the Society for Logic and Philosophy of Science and the Benelux Region of the Biometric Society.

Also several research—and discussiongroups came into being. We mention those on

Asymptotic expansions;
Computing methods and machines;
Communication and information theory;
Biophysics and Cybernetics;
Econometry;
Application of Statistics in Industry;
Standardization of statistical terms and symbols;
Statistical extreme value problems (in connection with the flood prevention);
Storm surges on the North Sea (ditto);
Teaching of mathematics;
Renewal of education.

The Mathematical Centre, mentioned above, was founded in February 1946, on the initiative and according to the plans of three " pure " mathematicians. Its purpose was: to further the development of applied as well as pure mathematics in the Netherlands, and, in particular to bridge the gulf between mathematics and its applications by, on the one hand, inducing mathematicians to bring forward their results in a form easily understandable by " appliers " with scanty mathematical training, and, on the other hand, teaching such " appliers " the special mathematical results and techniques they have need of. Its leading principle may be described as " multilateral cooperation ". From the very beginning the Mathematical Centre enjoyed enthusiastic support from many sides, in particular also from the government. It rapidly gained impetus, in particular since the computation department and the statistical consultation got leaders who in a few years became prominent in their fields. It is a foundation, independent of the universities, supported by the government (through its organizations for Pure and for Applied Scientific Research), the municipality of Amsterdam, and, to a small extent, by some big industries. At present it has a personnel of about 80, some of these half-time graduate students.

It has four departments, cooperating closely together, viz. for

Pure mathematics,
Applied mathematics,
Statistics,
Computation,

and a threefold task, namely:

Research,
Education,
Consultation.

The educational task is performed only in such fields and such cases which are not covered already by the universities. It is done by: *a)* organization, preferably in cooperation with other institutions, of colloquia, research and discussion groups, *b)* training mathematical students in consultative work, *c)* courses for non-mathematicians, *d)* methodological statistical instruction of non-mathematical workers by consultation and by methodological sections in statistical reports on concrete problems.

Consultation is done partly on a non-profit cost-price basis, partly (in particular for university laboratories all over the country) free of charge. It comprises often extensive elaboration of observational results, testing of observational evidence, design of experiments, computing, development in pure and applied mathematics, etc.

Research is done in everyone of the four departments, and comprises also design and construction of computing machines.

In order to give an impression of the variety of subjects treated, a list has been added in the appendix of subjects dealt with in consultation during 1953.

4. Flood prevention problems.

On February 1st 1953 the South Western part of the Netherlands, and, to a lesser extent, parts of England and Belgium, were struck by a flood disaster, which exceeded by far any one hitherto observed. It cost in our country over 1750 human lives and far over 10^9 guilders of material losses. On the other hand it gave rise to one of the finest examples of international helpfulness known in history.

In order to find out the best methods for preventing, in asfar as possible, a similar disaster in future, the government immediately appointed a committee, consisting of the most prominent hydraulic engineers, called the " Delta-committee ", because its realm is the delta, formed by the rivers Rhine, Meuse and Scheldt.

The reason why all this is mentioned in this report is the fact that it gave rise to a number of mathematical and physical problems. For solving them the Δ-committee appointed as advisory institutions: the meteorological institute K.N.M.I., the hydrological laboratory of the Technical University at Delft, the (governmental) Central Planning Bureau and the Mathematical Centre.

Parts of the mathematical problems are being solved in different sections of the Ministry of Public Works itself, in the K.N.M.I., the Central Planning Bureau and the Mathematical Centre. Results and plans for further research are exchanged and discussed in two of the working groups mentioned above. The problems fall into three groups:

1. Statistical problems concerning the frequencies of excessively high floods;
2. Econometric decision problems, concerning the optimal height to which dikes must be heightened, taking account of their cost and of the losses caused by breaks;
3. Mathematical physical problems concerning the question, which types of depressions moving over the North Sea are the most dangerous, and which heightening of the sealevel they may cause.

The third group of problems is of the classical type of applied mechanics (partial differential equations with boundary conditions, reducible to integral equations), though showing many complications. The first two groups of problems are not difficult from a purely mathematical point of view, but require a good deal of "practical logic" to avoid many pitfalls into which one might easily step. A survey of results obtained on the second group of problems has been given by the present author before the 8th European meeting of the Econometric Society at Uppsala; one about the first and third group was given before the International Congress of Mathematicians at Amsterdam.

Together they form one of the most important applications of mathematics to large scale government decisions, ranging over a few centuries in time and a few milliards ("billions") of guilders (or using the standardized physical terminology: giga-guilders), in the Netherlands.

They also form an example of the sometimes insufficiently stressed fact that modern society has a great need, not only of large scale computing, but also of "large scale mathematics".

5. The social status of mathematicians.

The social position of mathematicians has undergone some change. Before the war a student of mathematics, unless he was exceptionally brilliant, had practically no other professional choice than becoming a teacher in a secondary school, unless he was willing to become an actuarian. The latter prospect was not very attractive for most students—except from a purely remunerative point of view—as the mathematics to be used remained on a rather low level, whereas one had to absorb a good deal of practical economical knowledge, for which no educational base was present. This has been changed now, since the university instruction in actuarial science came into existence, which implies an education in the fundamentals of economics.

Moreover, more jobs in applied mathematics, and especially in statistics became available. At present, the study of statistics can be combined with the actuarial one, a combination which is rather attractive to some students.

The increased number of possibilities in industry, together with those in universities (from professorships to assistantships) and in other institutions has, like in other countries, lead to some shortage in manpower in mathematics, also with respect to teachers. This, of course, is also caused by the customary overburdening of teachers by too big classes and too many lessons, and by their payment which until recently was very bad, but has improved considerably since. A further considerable improvement would be obtained if a " sabbatical year " for teachers could be obtained, not, of course, for taking a " busman's holiday ", but with the special purpose that they may from time to time (while retaining, of course, their salaries) revisit a university, in order to renew their knowledge of modern mathematics, to get acquainted with modern applications of mathematics, and to do some scientific work. Such a large scale " teaching of teachers ", however, is still far out of sight, and, anyhow, diminution of classes and teaching-hours is primordial.

6. Traditional teaching of mathematics.

With regard to some critical remarks on the traditional teaching of mathematics in secondary schools, which will be made now, it must be remarked before that they apply to the situation in the Netherlands, but that the author has some strong misgivings that 1° the situation in many other countries is not essentially different, that 2° probably analogous remarks could be made about several other subjects of teaching, and 3° that the teachers in secondary schools are not to be blamed for it, as they usually have had no opportunity, at least since the time of their study, to become acquainted with the many uses of and needs for mathematics in modern life. [1]

The trend of the following remarks is to state that the teaching of mathematics (we shall further omit the words " in secondary schools ") must in several respects be considered as superannuated and badly adapted to modern needs.

This holds in particular for the choice of subjects. These belong in Dutch schools to: Euclidean geometry in the plane and in space, elementary algebra, plane trigonometry, descriptive geometry, and in some schools the elements of analytic geometry in the plane and/or of the calculus. With exception of the two last mentioned these fields are treated to such an extent that, with a few exceptions, neither a modern " producer " nor a " consumer " of mathematics ever meets the larger part of them. So e.g. in plane geometry some of the congruence theorems of triangles (and practically all of those added as exercises), the concurrence of perpendiculars in a triangle and of bisectors, the formulae for the lengths of perpendiculars and medians, the properties of quadrangles inscribed or circumscribed to a circle and of the regular pentagon and decagon are rarely met with in later life. Similar remarks hold for the other branches of mathematics. E.g. in trigonometry the only things one regularly meets later are: the periodicity and addition properties of the

[1] (Added in proof) Recently Dutch teachers' organizations have accepted a renewal plan for the teaching of mathematics, which by removing several superannuated superfluities and introducing elements of statistics, may be considered as an important step in the right direction.

trigonometric functions and their consequences (e.g. duplication and bisection formulae) and the cosine rule and, a few times, the sine law. Similar remarks hold for the other fields. There are, of course, exceptions, where one meets one of the other subjects, but, unless one works in very special fields like geodesics, nautics, astronomy, etc., these are rare. Moreover, most of the subjects which a professional mathematician meets in later life, he meets in a quite different context, in which it is far easier for him to understand them than by way of the elementary treatment (e.g. the formulae for the volume of a sphere, a spherical segment and a spherical sector, which belong to integral calculus rather than to geometry).

Considering on the other hand the needs of a modern " consumer " of mathematics, which vary, of course, over the several branches of sciences one can say that they contain: 1° a clear idea of the testability or non-testability of a statement, 2° a clear idea of the concept of a mathematical model for some part of empirical science, and of the uses which can and which can not be made of it; 3° a good working knowledge of using graphs and algebraic computing, to such a degree that it becomes a natural habit to translate a problem in symbols (this is often not obtained because of the " fear of mathematics ", often raised by the excessive amount of exercises made); 4° the fundamentals of statistics and probability theory; 5° a few elementary methods of testing the most frequently occurring hypotheses (e.g. sign test, rank correlation test, Student's test, Wilcoxon's test); 6° a working knowledge of elementary calculus, etc.

Teachers sometimes seem to believe that a subject should not be taught, unless it can be taught in relatively great completeness and in a rigorous way, containing proofs of all statements. The consequence of this opinion, however, is that many scientists are prevented from obtaining a good working knowledge of statistics and differential calculus, if they are not (or not thought to be) capable of grasping the socalled " exact " concept of a limit. It also disagrees with the attitude of all classical mathematicians up to Riemann, for whom it always was more important to find new results and new methods

(" rules ") than to prove them. This reminds of the English school-boy having to learn " Euclid ", and saying to his teacher " Bother the proofs. Tell me the results ! "

Another prevailing opinion holds that the secondary education should restrict itself to " pure " mathematics, without bothering much about the applications. This, however, disregards the fact, mentioned already before, that most of " pure " mathematics is old " applied " mathematics. In particular this holds for school mathematics, with the exception of geometry in its Euclidean form: logarithms were introduced purely as a computational method; the solution of algebraic equations by means of roots is due to the fact that roots (from positive numbers) were originally almost the only onevalued functions one could master (this same fact gave rise later to Galois' theory; from a modern computational point of view it is without the slightest importance whether an equation can be reduced to successive extractions of roots, whereas formerly this was highly relevant); trigonometry was introduced as an expedient for astronomical, nautical and geodesical problems; descriptive geometry was introduced by Monge as a method to avoid the at that time very clumsy computational methods. Descriptive geometry is, by the way, the only subject on the mathematics curriculum which is less than about 300 years old; it is even less than two centuries of age !

In this context the fact should be mentioned that the Educational Institute at the University of Utrecht has successfully initiated an experiment in teaching elementary probability theory and history of mathematics in the highest classes of literary gymnasia, and to abolish the teaching of solid geometry and of broken linear functions in these schools. The experiment will be continued with other school-types also.

7. Desirability of a new orientation of mathematical teaching.

The large extent of obligatory mathematical education for *all* pupils in most schools is usually justified, apart from its applications, by 1° stating that " instruction in mathematics furthers logical thinking ", 2° implying that this is a desirable aim for all pupils, and 3° accepting a hypothesis called the " principle of transfer ", which may be expressed by stating that the faculty of logical thinking, if exercised on special subjects like geometry and algebra only, is automatically " transferred " to applications to other subjects also.

For the sake of argument we shall take here the first statement for granted, by disregarding the vagueness of the term and the objections which could be made against it, but which would lead too far away from the main subject. The second statement undervalues the important difference between deductive and inductive logic, and misjudges the fact that purely deductive logic is only applicable within the context of a mathematical model, and that by purely deductive reasoning no non-trivial empirical statement about observable phenomena can ever be proved or disproved. As to the " principle of transfer ", much has been written about it, but the present author is not aware of serious efforts to test this hypothesis empirically in a way satisfying modern standards of research.

Such an investigation should in any case go into the following remarks, which are based on the personal experience of the author only, and therefore, of course, can not be considered as conclusive.

The attitude of mathematicians towards problems which are rather far from the ordinary mathematical sphere, and which can not be tackled by means of deductive logic, seems not to be very different from that taken by other intellectuals, except that the tendency to avoid them may be somewhat stronger among mathematicians. On the one hand it seems that the mathematician's attitude towards them on the whole is rather intelligent and often based on broad human feeling, and that the more extremistic and in particular the more irrational attitudes are not frequent among them. On the other hand a considerable degree of aloofness from political and philosophical questions can be observed among mathematicians, which might point to a feeling of helplessness towards problems where " logic of partial knowledge " is involved and where data are lacking for making treatment on a rigorous base possible. Among those, however, who do not avoid these questions, one finds, notwithstanding the positive qualities mentioned above, only very rarely that the main features of their mathematical work are maintained in this work also. In particular the main characteristic of mathematicians, viz. to take the utmost precautions against wishful thinking and other forms of self-deception can hardly be said to find its counterpart in the context of other activities of the same mathematicians. Thereby it becomes possible that so many political and religious creeds, each accepting a body of statements, which, if pooled, contains numerous contradictions, so that they certainly can not be true all, nevertheless have among their adherents mathematicians, even of the highest quality, or other scientists which have had an intensive mathematical training. Apparently whatever form of automatic transfer may exist, it is insufficient to break through the emotional and traditional background of such creeds, unless the individual is willing and has been trained (or trained himself) in reasoning as “ logically ” as possible in cases also where insufficient data together with strong emotions are present. Another instance, pointing in the same direction is the fact that most mathematicians, when discussing the value of mathematics, do not, or hardly, consider the possibility that this need not be always positive, or at least do not try to find all serious arguments which might be brought forward for the alternative possibility.

Moreover, although I might not underrate the importance of systematic study of mathematics, and of one of its main characteristics, viz. to separate difficulties and mastering these one after another, one wonders that mathematicians seem not to be able to transfer this characteristic to their educational problems. For, otherwise, how could one understand that mathematical courses do not contain separate parts and groups of exercises for training and testing *separately* the different objectives one has in mind, like acquiring mathematical techniques, theoretical insight, systematizing ability, inventiveness and ability of correct logical reasoning, but that all these elements are mixed up within almost *every* exercise ?

Resuming this argument, we might state that it is at least very doubtful whether training in mathematics, based on deductive logic, leads automatically to an increased capacity of arguing logically in cases where only inductive reasoning is possible, and where often only quite insufficient data, together with strong emotions and/or traditions are present. It seems rather that a special training in the latter direction is necessary. This, however, would make it necessary to revise the " epistemological " basis upon which obligatory mathematical training for *all* students, apart from their respective needs for applications, could be justified. On the other hand this, of course, does not exclude the possibility—which the present author considers as very probable—that deductive and inductive reasoning are sufficiently close in order that teaching of mathematics, provided it will be adapted to the revised needs, may be very useful for the purpose.

Regarding the form of re-orientation of mathematical teaching necessitated by the preceding arguments we might make the following remarks.

1. In the first place is needed: a precise and differentiated formulation of objectives of instruction, using operationally defined terms instead of rather vague terms like " furthering logical thinking ", etc., so that it is possible to test with respect to every pupil, *whether* and/or *in how far* the objective has been reached in his case. The differentiation of objectives should at least entail that *a)* ability to apply special mathematical techniques; *b)* correct ideas about particular theoretical considerations; *c)* systematizing data as well as purposes of an investigation, and following an appropriately chosen orderly line of thought; *d)* inventiveness in overcoming new difficulties, and *e)* correct logical reasoning, either according to the rules of deductive logic (proofs of mathematical statements), or to the less strict rules of inductive or " plausible " inference, can be taught *separately* and tested *separately*.

2. The differentiation of purpose should correspond with a differentiation according to the individual capacities, individual interest, and the professional future of the pupils. Evidently pupils going later to a household-school or getting a job in a

post office or police-HQ, those who go to the university to study law or languages, who go to an engineering school, who are going to study medicine, biology, pharmacology, economy, psychology or social sciences, and those who will become astronomers, physicists, or mathematicians, have quite different needs.

3. This differentiation should be reflected in a differentiation of requirements for the final high school examination, which at present, in the Netherlands, are identical for very large groups of students.

As a final summing up, I believe I may say that we as mathematicians should take care that the mass product we produce, viz. the results of our students, admit a satisfactory quality control, that the results we pretend we can obtain can be subjected to the requirements of testability which the statistician demands from every research worker in biology or medicine, that we are aware of the restricted reliability of our tests (examinations) and admit definite tolerance limits, but also that we know how to balance the "yield", differentiated according to different requirements, against the "cost" in the form of teaching- and learning-hours, and know to treat this as a decision problem.

This seems to me to be a duty of honour for us as mathematicians.

APPENDIX

Examples of modern problems in different fields where mathematics is applied [1]

A. *Statistical applications in medicine, biology and pharmacology.*

1. An epidemiological investigation of tuberculosis in Indonesia.
2. Biological standardization of insulin by experiments on rabbits.

[1] The examples are taken from problems treated in the Mathematical Centre at Amsterdam.

3. The number of leucocytes and eosinophil leucocytes in blood samples from women during pregnancy, delivery and childbed.
4. Errors in counting the number of eosinophils in blood.
5. Measurements on eggs of black-headed gulls.
6. The augmentation effect of hypophysis-extract and adrenal-extract on the preputial glands of rats.
7. Scheme for diagnosing rheumatism species based on serological tests.
8. Investigation of the nutritive value of food taken by pregnant women.
9. Regeneration of rat-livers.
10. A comparison of the vitamin B_1 content of blood in old and young men.
11. Investigation of the public health of two rural districts in Holland.
12. Medicines for yaws.
13. The thickness of the layer of blubber of whales.
14. The number of times bats awake during the hibernation. Capture and recapture of bats for determining the death rate.
15. The influence of light on the growth of tadpoles.

B. *Statistical application in other fields.*

1. Delays in the landing of aircraft.
2. Experiments on laundry cleaning methods.
3. A design of experiments in steel rolling.
4. The frequency of different types of monosyllabic words in the Dutch language.
5. Frequency of delays in a transport system.
6. Comparison of the performance of different types of instruments for repairing broken threads in a spinning mill.
7. Statistical analysis of psychological tests.

8. Comparison of practical work in elementary physics required for students in various Dutch universities.
9. Regression-analysis of the power absorbed by a ship's propellor.
10. Statistical analysis of an investigation of the so-called " earth rays " and dowsing rods.
11. Statistical work for the Flame Radiation Research Joint Committee.
12. A design for a quality control system for an electrotechnical factory.
13. Sociological research on the flood disaster in the south of the Netherlands in 1953.
14. Statistics of mixing solid particles.
15. The life-term of jet planes.
16. Research on a time-scheme for glassgrinders.

C. *Problems treated by the Computation Department.*

1. The investigation of the shape of a fresh-water body under the dunes near Amsterdam. The investigation was carried out for the benefit of the watersupply of the city.
2. Computation of zeros of polynomials in connection with vibrations in railwaycars.
3. The temperature of gasparticles in a hot-air engine.
4. Calculation of the tides on a river on behalf of the government.
5. Integrals of scattering factors occurring in crystallography.
6. The computation and the expansion of triple integrals originating from the theory of cosmic rays.
7. Design of ships-propellers to prevent cavitation of the propeller-blade.
8. Solution of Schrödinger equations.
9. Computation of the form of ships.
10. Radiation-functions occurring in astrophysics.

11. Wavefronts in connection with soundings for geological exploration.
12. Computation of coefficients in connection with vibrating airfoils.
13. Integrals in connection with temperaturedistribution in the human skin.
14. Redesigning a road-system to ensure easy transport of sugarbeets in a rural district that has been flooded.
15. The upheaval of Fenno Scandia.
16. Fluttercomputations for wings of aircraft.
17. Computation of the production of oil-wells.
18. Design and computation of filters for carrier-wave telephony.
19. Radiation of cobalt bomb in cancer-therapy.
20. Fields of radiotransmitters.
21. Forces occurring in certain molecules.
22. Inversion of matrices of a high rank.
23. Flow in homogeneous porous media in connection with watersupply.
24. Boundary-layer computation for aircraft.

LE ROLE DES MATHÉMATIQUES DANS LA SOCIÉTÉ MODERNE ET SES CONSÉQUENCES POUR L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

D. van Dantzig, Amsterdam

Résumé

L'auteur décrit le besoin accrû d'après-guerre de mathématiques et de mathématiciens dans le domaine social et industriel. Un exposé plus précis de la situation aux Pays-Bas contient une description des travaux mathématiques faits en vue d'éviter

l'inondation par grosse mer, travaux devenus nécessaires après une inondation survenue au sud des Pays-Bas en 1953.

Ce besoin accrû d'après-guerre et le fait qu'avant-guerre presque tous les mathématiciens étaient formés pour devenir des professeurs de lycée, nécessitent une réorganisation de l'enseignement secondaire adaptée à cette nouvelle situation.

L'auteur établit une comparaison entre les résultats de l'enseignement actuel aux Pays-Bas et l'aptitude des élèves à résoudre un problème pratique de leur future profession.

De même qu'avant 1850 les recherches mathématiques résultaient de problèmes pratiques, l'auteur juge qu'il serait dès maintenant nécessaire de choisir les sujets mathématiques à enseigner selon les exigences sociales de l'époque.

Plus spécialement, il sera nécessaire d'enseigner séparément et d'examiner séparément les principaux buts de l'enseignement, par exemple:

a) l'habileté d'appliquer correctement quelques techniques mathématiques élémentaires;

b) des idées correctes sur quelques considérations théoriques générales;

c) l'habileté de systématiser les aspects principaux d'un problème concret;

d) l'esprit inventif pour vaincre des difficultés nouvelles;

e) la faculté de raisonnement logique (soit déductif, soit inductif ou « plausible »).

D'ailleurs, il sera nécessaire de choisir les sujets de l'enseignement autant que possible selon l'aptitude et la profession future des élèves.

LA FUNZIONE DELLA MATEMATICA
E DEL MATEMATICO NELLA VITA CONTEMPORANEA

DI

Guido Ascoli, Torino

Il carattere della matematica in un dato periodo storico è certamente legato agli interessi materiali e spirituali che in quel periodo predominano; non si può dissociare, per esempío, il meraviglioso fiorire della matematica razionale nella Grecia antica dalla sua ricca atmosfera speculativa; lo sviluppo dell'Aritmetica e dell'Algebra presso gli Arabi e nel Rinascimento dall'intensa vita di traffici che seguì le Crociate; gli immensi progressi della Geometria e dell'Analisi nei secoli successivi dal progredire delle tecniche costruttive e dell'indagine sistematica dei fenomeni naturali.

Sarebbe tuttavia erroneo ritenere che lo sviluppo storico della matematica trovi tutte le sue ragioni in influenze esteriori: la matematica ha altresì una sua logica interna, cui presiedono esigenze di armonia, di generalità e completezza, e che ne traccia in buona parte il cammino. Far valere queste esigenze, che hanno dato in ogni tempo alla matematica tutto il suo fascino, difendere il diritto del matematico alla ricerca disinteressata, ci sembra superfluo, in un congresso di matematici. Al più si può ricordare che proprio da questa ricerca sono stati spesso illuminati i problemi filosofici e che immenso vantaggio ne traggono le applicazioni stesse, che possono scegliere, nella ricchezza degli schemi offerti, ciò che ad esse abbisogna. Onde dannoso e pericoloso stimiamo ogni tentativo di arginare entro i limiti angusti della immediata utilità il libero slancio del pensiero matematico.

Con queste riserve, possiamo ben riconoscere che un'analisi degli elementi che possono dare un particolare atteggiamento alla matematica e al matematico del nostro tempo è perfettamente giustificata. Da un mezzo secolo noi assistiamo infatti ad un fenomeno imponente: la penetrazione del metodo matematico in tutte le scienze e nelle loro applicazioni, anche in quelle che vi parevano più riluttanti. Segno indubbio di progresso, secondo il memorabile detto di Leonardo: « Nessuna ricerca può dirsi vera scienza, se essa non passi per le matematiche dimostrazioni ». Noi abbiamo visto così la Chimica, da scienza eminentemente empirica e descrittiva, trasformarsi a grado a grado in una scienza esatta, capace di prevedere il senso e le modalità delle reazioni, di dar ragione delle strutture cristalline, della valenza; la Biologia trattare audacemente, come fenomeni fisico-chimici, l'accrescimento e la divisione delle cellule, la corrente nervosa; la Scienza delle costruzioni, sbarazzandosi sempre più dell'empirismo, dominare i fenomeni di vibrazione e la plasticità; l'Aerodinamica elaborare per il moto dei fluidi schemi sempre più aderenti alla realtà e studiare i moti transsonici ed ipersonici; l'Elettronica costituirsi in scienza, dando luogo alla « Meccanica non lineare »; e perfino la tecnica organizzativa matematizzarsi, con la teoria, ultima venuta, della programmazione lineare. Di proposito, in questa esemplificazione, estremamente incompleta, abbiamo lasciato da parte la Fisica propriamente detta, la cui « simbiosi » con la matematica è fenomeno di tutti i tempi. E ci sia qui lecito notare l'importanza che in questo processo hanno preso gli schemi probabilistici, dall'Attuaria e della Statistica passati alla Meccanica e alla Termodinamica, a tutta la Fisica moderna, e poi alla Biologia e alla Genetica, sino ad entrare in problemi tipicamente industriali: minimo numero di selettori in una centrale telefonica, « rumore di fondo » negli impianti elettroacustici, controllo statistico della produzione in serie, ecc.

In ogni campo, dunque, la collaborazione tra matematica ed applicazioni è risultata per queste intensa e proficua; e non è a dirsi che non ne abbia tratto profitto anche la matematica, costretta della varietà dei problemi ad affinare i suoi metodi, a crearne dei nuovi. Ed è perciò da augurare che essa continui in avvenire, egualmente intensa e proficua.

Viene fatto ora di domandarsi se questa collaborazione sia stata opera di specialisti dotati di sufficiente cultura matematica, oppure risultato di una collaborazione anche di uomini: matematici e specialisti; e quale ne sia la forma più conveniente. Le condizioni sono probabilmente diverse da Paese a Paese; onde, per conto nostro, abbiamo cercato di raccogliere in Italia da persone competenti informazioni, giudizi e proposte che vogliamo qui succintamente riferire. Ma sarà qui opportuna una breve digressione per ricordare, anzitutto, quale sia oggi in Italia l'ordinamento degli studi di matematica per coloro che non si dedicano a questa scienza.

Superato l'esame di maturità, che chiude gli studi secondari, nei quali non si varcano sostanzialmente i limiti delle matematiche elementari, coloro che si dedicano alla Fisica debbono fare un corso di quattro anni, durante i quali gli studi di matematica (Analisi, Geometria, Meccanica, Fisica matematica) non sono di molto inferiori a quelli occorrenti par la laurea in matematica pura; mentre i futuri ingegneri, di ogni specialità, dei cinque anni del loro corso dedicano alla matematica (Analisi, Geometria, Meccanica) solo i primi due; e l'insegnamento di Analisi è tra questi particolarmente nutrito. Pure due anni di matematica (su cinque) hanno gli studenti di Chimica, con un insegnamento unico, che tocca svariati argomenti, trovando tempo anche per qualche applicazione. Simile carattere enciclopedico, in limiti assai più ristretti, ha il corso annuale che viene tenuto ai naturalisti. E pure di un anno è il corso di «Matematiche generali» per gli studenti di economia e commercio, che si specializza subito dopo nella Matematica finanziaria e attuariale, nel Calcolo delle probabilità, nella Statistica.

Orbene, appare che, nella maggioranza dei casi, lo specialista, condotto dai suoi studi o da ragioni professionali a trattare problemi tecnici che importino l'uso delle matematiche superiori, procede da solo, in quanto la cultura propedeutica cui sopra si è accennato, integrata, al più, da consultazioni di lavori o trattati, lo mettono in grado di risolvere anche problemi di una certa complessità. Al matematico, in caso, viene affidato il problema che presenti particolari difficoltà, già bene inquadrato nei suoi termini analitici, per averne, per lo più, i mezzi per la tabulazione, se non addirittura i risultati numerici. Tale è il compito che assolve, ad esempio, da 25 anni, l'« Istituto nazionale per le applicazioni del Calcolo » (I.N.A.C.) di Roma, fondato e diretto dal prof. Mauro Picone, le cui prestazioni, estremamente numerose e svariate, sono troppo note perchè sia il caso qui di illustrarle. Uffici di calcolo, con intenti più modesti, esistono, naturalmente, presso tutte le grandi industrie ed anche in qualche scuola di Ingegneria.

E' qui doveroso osservare come distinti specialisti, posti giornalmente di fronte a gravi difficoltà matematiche, si sono fatti ben volentieri autodidatti, impadronendosi di teorie e di tecniche nuove, talvolta ben lontane dai loro studi usuali, penetrandone lo spirito con un acume e con un entusiasmo che non è lecito sottovalutare. Il fatto è probabilmente generale e testimonia della viva attrazione che la matematica, anche nelle sue parti più astratte, esercita sugli uomini di forte ingegno che abbiano occasione di avvicinarvisi.

Comunque, conviene riconoscere che verso l'opera del matematico puro si rivela oggi da parte degli specialisti una certa diffidenza; si crede infatti di riscontrare nel suo modo di considerare le questioni applicative un atteggiamento che lo renderebbe inadatto ad una efficace collaborazione: insofferenza di procedimenti non rigorosi, posizioni critiche verso le questioni di esistenza e di unicità, che il tecnico ritiene di solito superate dall'esperienza, tendenza a sviarsi verso questioni collaterali che promettano maggior eleganza di risultati, e così vìa. Onde il concorso del matematico viene sì accettato, ma in stretta osservanza delle direttive del tecnico.

Ritenuta così come condizione ideale l'autonomia culturale dello specialista, e riconosciuti d'altra parte gli inconvenienti dell'attuale stato di cose, è naturale che i pareri dei competenti, in grande maggioranza, siano orientati verso una preparazione degli specialisti che permetta ad essi di svolgere senza sforzo i compiti rispettivi, siano essi normali compiti professionali, o attività di ricerca. Più modeste, naturalmente, le esigenze nel primo caso, e per questo si pensa che l'insegnamento matematico attuale per gli ingegneri, chimici, naturalisti ecc. possa rimanere al livello attuale, o al più venga leggermente elevato. Per coloro invece che manifestano gusto e qualità per la ricerca, o almeno per l'approfondimento teorico di qualche ramo, si manifesta unanime il desiderio di corsi complementari facoltativi, prima o dopo la laurea, in cui essi possano allargare la loro cultura matematica. Il carattere di tali corsi dovrebbe essere naturalmente assai diverso secondo la specialità — ben diverse sono le esigenze di un costruttore di macchine da quelle di un elettrotecnico — ciò che complica in modo sensibile il problema della loro organizzazione. Corsi di questo genere esistono sinora solo in poche scuole di Ingegneria, ed hanno un discreto successo; e per quanto il loro programma, risultando da un compromesso tra le varie necessità, non risponda pienamente a nessuna, è certo, e augurabile, che il loro numero andrà continuamente aumentando. Vari sono gli argomenti trattati: funzioni analitiche, serie e integrali di Fourier, trasformazione di Laplace, funzioni speciali, calcolo tensoriale ecc. La distribuzione di questi corsi in tutti i tre ultimi anni di Ingegneria è nei voti di molti; vi è però di grave ostacolo l'ingente numero degli insegnamenti tecnici che grava sugli studenti in questi anni. Comunque, la questione è sul tappeto, ed una soluzione va lentamente maturando. Intanto, come soluzione di ripiego, vediamo spesso ingegneri, chimici ecc. prendere con uno o due anni ulteriori di studio la laurea in matematica presso le Università, con risultati soddisfacenti.

Di corsi analoghi presso le industrie un esempio brillante (comprendente anche corsi di Fisica teorica) dà da vari anni la Società « Montecatini »; ma essi hanno piuttosto generico carattere culturale.

Con queste vedute, la collaborazione tra matematici e specialisti viene trasferita quasi interamente sul piano dell'insegnamento: tra insegnanti ed allievi. Che la matematica debba essere insegnata da matematici nessuno seriamente contesta; piuttosto, è concordemente desiderato che insieme alla matematica si insegni il « buon uso » di essa: discutere bene gli schemi adottati prima di intraprendere la soluzione — questione spesso di « fiuto » —; non pretendere dai risultati un grado di precisione che sia superiore a quello dei dati e al grado di aderanza dello schema alla realtà fisica, e così via. Onde si vorrebbe che negli alti gradi dell'insegnamento matematico a specialisti il maestro avesse gusto e simpatia per i problemi concreti e — meglio ancora — esperienza di ricerca in collaborazione.

Collegata alla questione dell'insegnamento è quella dei manuali di matematiche superiori destinati ai non matematici: anche qui è unanime l'affermazione che la redazione di tali trattati, con quelle doti di stile e di misura che lo scopo richiede, costituisce uno dei più importanti contributi che oggi il matematico può dare alla vita del suo tempo. L'opera degli italiani in tale campo è pregevole, ma numericamente molto esigua, compresi in essa anche corsi poligrafati, di scarsa diffusione.

Abbiamo dato sin qui la parola ai non matematici; ma i professionisti della matematica hanno anch'essi buone ragioni da far valere perchè la loro collaborazione sia richiesta e apprezzata. Contro le critiche su ricordate il matematico osserva che nei problemi di applicazione ci si trova sempre in un atteggiamento euristico, cioè provvisorio, giacchè l'ultima parola è da lasciare all'esperienza, che convaliderà o no l'impostazione adottata; e in tale fase egli sa di dover passar sopra a molti scrupoli di rigore. D'altra parte è osservazione comune che qualche maggior precisione di concetti e di metodo non sarebbe di troppo in non poche trattazioni di indole tecnica; e si deve poi ricordare (cosa molte volte ripetuta, ma che ci piace ci sia stata richiamata da un distinto elettrotecnico) che i teoremi di esistenza e di unicità, così malfamati in certi ambienti, hanno una loro importante funzione: quella di garantirsi da impostazioni insufficienti, ove siano state trascurate come accessorie circostanze che erano invece determinanti. Insomna, la mentalità critica del matematico, accanto a quella intuitiva del tecnico può essere un correttivo, senza essere un intralcio; mentre nessuno poi può disconoscere il vantaggio di una cultura matematica vasta, meditata, precisa, su di una occasionale e frammentaria.

Che cosa si è fatto e si potrebbe fare in Italia in questo campo? Nell'industria un'occupazione continuativa di matematici non esiste, ed anche in avvenire essa appare possibile solo presso pochissime grandi aziende. Non più di una quarantina sono i matematici impiegati nel ramo assicurativo, nè è prevedibile alcun aumento; un piccolo gruppo potrà invece trovar posto in uffici pubblici e industriali per il diffondersi delle macchine a schede perforate e delle calcolatrici elettroniche. Maggiori possibilità trova la costituzione di uffici di consulenza (più che di calcolo) cui le aziende e gli Istituti scientifici possano ricorrere, con personale misto e mezzi adatti; con qualche riserva, per le ragioni di segretezza. Si osserva che a tale funzione potrebbero in parte rispondere gli Istituti matematici universitari, con cui aziende e istituti di ricerca dovrebbero tenere frequenti e stabili contatti. E si può assicurare che da parte dei matematici tale collaborazione sarebbe graditissima, permettendo di proporre ai giovani, non, come spesso avviene, questioni artificiose, nè belle nè utili, bensì problemi ben determinati, di carattere concreto, da risolversi in modo esauriente senza esclusione di mezzi; e si può prevedere che anche i corsi universitari cercherebbero di adeguarsi a tali esigenze.

Abbiamo così parlato della matematica come forma autonoma di conoscenza, e poi della sua funzione come strumento; ma il quadro non sarebbe completo ove non accennassimo anche all'importanza dello spirito matematico come « forma mentis », anche là dove non si può parlare di una applicazione della matematica, in senso stretto. E' indubbio intanto che da questa « forma mentis » è sorta la Metodologia moderna la quale, con la sua minuta e spietata analisi dei concetti e del linguaggio, investe ormai anche le così dette « scienze morali »; e interessanti tentativi in proposito si sono avuti anche in Italia nel campo del diritto. Ma si può andare più oltre, ed affermare che lo spirito matematico, come « forma esatta del pensiero » può e deve avere la sua influenza anche nel campo della vita sociale. Se un insegnamento matematico si impartisce, con un alto grado di rigore, anche ai futuri giuristi, politici, scrittori e poeti, è perchè esso dà un esempio insostituibile di linguaggio preciso ed univoco, di coerenza, di onestà intellettuale. Ora questo non può essere senza conseguenze: per esempio, per una riforma del linguaggio delle leggi e degli atti amministrativi, così spesso ambiguo e contorto. E si può ritenere persino — pur senza abbandonarsi a puerili illusioni — che, nelle menti più aperte, esso valga ad evitare quelle generalizzazioni affrettate e quei voluti equivoci che tanta parte hanno nell'inasprire le relazioni umane.

Non si trovi perciò fuor di luogo che, in un'adunata di libere intelligenze, volte al comune progresso in uno spirito di comprensione e di fraternità, si rivendichi alla più astratta fra le scienze un alto valore educativo, e cioè morale ed umano [1].

LE ROLE DES MATHÉMATIQUES ET DU MATHÉMATICIEN DANS LA VIE CONTEMPORAINE

Guido Ascoli, Turin

Résumé.

Les mathématiques subissent dans leur développement la poussée d'intérêts matériels et spirituels, mais elles ont aussi une logique intérieure qui trace en bonne partie leur chemin et dont on doit défendre les exigences. On doit réagir contre toute tentative de restreindre l'activité du mathématicien dans les limites de l'utilité immédiate.

Toutefois, on doit reconnaître que la « mathématisation » progressive des sciences pose un problème vital: celui de la collaboration entre les mathématiques et les autres sciences. Comment s'opère-t-elle ? Une enquête, promue en Italie par le rapporteur, montre qu'en général les spécialistes aiment à travailler pour leur compte, en se fournissant eux-mêmes, au besoin, les connaissances mathématiques nécessaires; dans des

[1] Ringrazio vivamente tutte le gentili persone, e in modo particolare il prof. R. Sartori, del Politecnico di Torino, che mi hanno fornito informazioni e giudizi per la presente relazione; e il prof. P. Buzano, dello stesso Politecnico, che ha voluto raccogliere, con non lieve fatica, la maggior parte di esse.

cas isolés, et pour les calculs, ils ont recours à des experts ou à des institutions spéciales. Cela étant, la préparation mathématique donnée par les écoles supérieures n'est pas jugée suffisante pour les chercheurs; on demande des cours complémentaires, dont on a déjà des exemples, donnés par des mathématiciens, particulièrement doués pour ce rôle. On demande aussi des exposés mathématiques destinés aux spécialistes; la production italienne à ce sujet a du mérite, mais elle est très restreinte.

Le rapporteur constate une certaine défiance envers la collaboration directe avec les mathématiciens. Elle lui paraît exagérée: au contraire, il y aurait à faire valoir le profit que les chercheurs pourraient tirer d'un certain esprit critique et de connaissances étendues et bien organisées. Au fait, des bureaux de consultation mathématique sont aussi demandés; il serait à souhaiter qu'on ait recours dans ce but aux instituts mathématiques universitaires.

A l'état de choses, l'emploi de mathématiciens dans l'industrie, en Italie, est limité aux assurances, mais on peut prévoir quelque progrès dans l'avenir.

En terminant, le rapporteur souligne l'importance de la diffusion de l'esprit mathématique, comme « forme exacte de la pensée », dans la Méthodologie, dans les sciences morales, dans le langage des lois et des administrations, et même, par la probité intellectuelle qui est à sa base, sur les relations humaines.

THE EXPANDING ROLE OF MATHEMATICS

BY

A. M. Gleason, Cambridge (Mass.)

Today, mathematics and mathematicians play an ever more significant role in American society. Three causes may be cited to explain the current growth of mathematical studies. The demand for mathematics has been enlarged, in part, by the widespread development of all branches of the physical sciences; in part, by a great increase in the use of mathematics in various departments of the sciences; and, finally, by the increasing importance of mathematics in applied science and technology.

Until a few years ago, the mathematical physicist was primarily concerned with problems related to differential equations. Recently more abstract techniques have come to the fore in such fields as crystal statistics and atomic theory. In quantum physics, for example, the theory of linear representations of Lie groups as operators on Hilbert space has become important; in nuclear physics, Laurent Schwartz's distributions are currently being considered. In all of the observational sciences, there is at present a marked tendency to design and evaluate experiments more carefully by applying the most recent results of statistics. Statistics is now as important in genetics as differential equations are in physics. Indeed, much of the progress in modern statistical theory has been sparked by biologists. In economics and sociology, also, not only the function of the statistician is expanding, but mathematical theories are emerging to deal with the subjects themselves. Economists are trying to apply Von Neumann's theory of games, and educational psychologists are interested in the development of a mathematical theory of rote learning.

In the area of applied science, large sums of money are, at this time, being spent for mathematical research. Both government and private industry now employ more mathematicians than ever before. Virtually every branch of the federal government, from the Bureau of the Census to the Department of Labor, sponsors statistical research, and in some departments —particularly the Department of Defense—there are more complex problems which require every facet of mathematical training. Moreover, the government subsidizes research in both pure and applied mathematics through contracts with colleges and universities.

In industry, modern techniques of quality control have proved to be money-savers. Today most large industries either employ full-time statisticians to supervise their control programs or retain the services of consultants. Moreover, the structure of corporation taxes makes it profitable for industries to invest money in research. As a result, more and more industrial concerns are establishing full-scale research departments which often employ mathematicians. Such subsidies from government and private industry have encouraged progress in various aspects of mathematics. Most of the recent work on game theory has been sponsored by the Department of Defense because of its relevance to military strategy; new achievements in information theory have grown from a general study of communications by mathematicians working at Bell Laboratories, one of the first large research organizations in private industry.

At least two recent developments have magnified contemporary interest in mathematics. The first, which affects not just mathematics, but all scientific studies, is the general stirring of the scientific world occasioned by the war. During the war years, many highly trained mathematicians and other scientists left the universities to work on practical military problems, ranging from the design of weapons to the evaluation of military operations. Their success with these problems was widely publicized and, perhaps, exaggerated. Still it was directly responsible for the government's post-war interest in scientific problems and its willingness to promote further research on a large scale. Industrial leaders also observed the wartime accomplishments of the scientists, and, encouraged by the tax structure, they initiated general research projects on a tentative basis to see what might be accomplished in their own field of interest. They were particularly attracted by operations analysis, the scientific study of efficiency. As for the scientists, some of them developed a genuine interest in practical problems and willingly remained in their new fields. Many of them, to be sure, were also enticed by the relatively large salaries offered by government and industry.

A second notable contributor to the current interest in mathematics is also an outgrowth of wartime research: the development of large-scale electronic calculators. Although they started out as glorified adding machines, computers have gradually been given more and more logical operations, until now they almost merit their popular appelation — "giant brain". When applied to such engineering problems as the design of aircraft, in which weight and safety must be neatly balanced, electronic calculators find answers which could previously have been obtained only by expensive experimentation. In the field of economics, also, linear programming (the maximization of linear forms on convex bodies in many dimensions) obtains results impossible without the aid of a machine. The effects of computers on industrial mathematics, however, are only beginning to be felt. While they were in the experimental stage, computers were available at only a few universities and government laboratories; today several companies advertise electronic calculators for sale or rent, and many large industries are installing them. The development and the increasing use of these computers has had its effect on the theoretical, as well as the practical, aspect of mathematics. By solving large numerical problems, the machines have not only increased the scope of applied mathematics, but also re-awakened mathematicians' interest in numerical analysis. Finally, it is safe to predict a continually increasing demand for mathematicians who specialize in numerical methods.

As yet this new interest in mathematics has not caused a major shift in the occupations of mathematicians. Traditionally, most mathematicians have been teachers. A recent survey shows that eighty-eight percent of the 1320 doctors of mathematics who answered questionnaires are, even today, employed by colleges and universities. The rest were divided about equally between government jobs and positions in industry or industrial research companies. These figures do not, however, present an entirely fair picture of the occupational distribution of American mathematicians. Many of the mathematicians who teach in our colleges also work on government research contracts or consult with industrial firms. Furthermore, the percentage of non-academic mathematicians is rapidly rising: more than one quarter of the over two hundred men who received doctorates in 1951 are now in government or industrial positions.

Recent developments in the field of mathematics pose both a challenge and a threat to the universities. The practical application of mathematics in many diverse studies must encourage us, as educators, to recruit and train more men to meet the increasing demand for mathematicians in all phases of American life. At the same time, we must be on our guard lest the high salaries offered by industry lure too many of our best men away from academic positions, and stop the flow of abstract mathematical research.

L'EXPANSION DU ROLE DES MATHÉMATIQUES

Andrew M. Gleason, Cambridge, Mass.

Résumé.

Les mathématiques occupent un champ de plus en plus large dans l'économie des Etats-Unis. Les applications aux problèmes industriels et militaires ont augmenté la demande d'hommes formés en mathématiques. Vu que le gouvernement et l'industrie offrent souvent des salaires plus grands que les universités, il existe un danger que l'expansion du rôle des mathématiques retarde les recherches abstraites.

---

vide-leer-empty