

<b>Zeitschrift:</b>	L'Enseignement Mathématique
<b>Herausgeber:</b>	Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
<b>Band:</b>	1 (1955)
<b>Heft:</b>	1-2-3: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE
 <b>Artikel:</b>	AUSGEWÄHLTE EINZELPROBLEME DER KOMBINATORISCHEN GEOMETRIE IN DER EBENE
<b>Autor:</b>	Hadwiger, H. / Debrunner, H.
<b>Kapitel:</b>	II. Teil
<b>DOI:</b>	<a href="https://doi.org/10.5169/seals-31350">https://doi.org/10.5169/seals-31350</a>

### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 21.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

Punktmenge stets in drei Teile von kleinerem Durchmesser zerlegt werden kann. Eine von K. BORSUK aufgestellte Vermutung bezieht sich auf Punktmengen des  $k$ -dimensionalen Raumes und sieht eine Zerlegung in  $k + 1$  Teilmengen mit kleineren Durchmessern vor; sie ist zur Zeit noch unbewiesen für  $k > 3$ ; für  $k = 3$  gab neuerdings H. G. EGGLESTON [10] einen Beweis.

Der oben erwähnte Satz von K. BORSUK (ohne die Verschärfung von D. GALE) ist — wenigstens für endliche Punktmengen — auch eine Folgerung einer Aussage über die Anzahl der Punktpaare, welche den Durchmesser realisieren. Es gilt:

- 36.** *In einer endlichen Punktmenge vom Durchmesser  $D = 1$  gibt es höchstens  $n$  verschiedene Punktpaare der Distanz 1, wenn  $n$  die Anzahl der Punkte der Menge bezeichnet.*

Ein kurzer Beweis findet sich bei P. ERDÖS [13], ferner vgl. man eine Aufgabe von H. HOPF-E. PANNWITZ [23].

Die engen Zusammenhänge zwischen den verschiedenen Satzgruppen soll schliesslich das folgende Korollar zu **34**, als Aussage vom Hellyschen Typ formuliert, vor Augen führen:

- 37.** *Haben je zwei Kreisscheiben einer Menge kongruenter Kreise vom Radius  $R = 1$  einen Punkt gemeinsam, so gibt es drei Punkte vom gegenseitigen Abstand  $d = 1$  derart, dass jede Kreisscheibe der Menge mindestens einen von ihnen enthält.*

Ähnliche, teils noch unbewiesene Aussagen finden sich bei L. FEJES TÓTH [14], S. 97.

## II. TEIL

Die vorstehend formulierten Aussagen sollen hier unter Benutzung der oben zitierten Quellen durch kurze Beweise belegt werden. Dabei erzwingen Raumgründe, dass oft nur der Gedankengang knapp angedeutet werden kann. Die Argumentation stützt sich vorwiegend auf elementare Sachverhalte, hie und da ergänzt durch einfache punktmengengeometrische Überlegungen.

**1.** Lägen die Punkte  $P_1, \dots, P_n$  nicht auf einer Geraden und gilt für sie doch die Voraussetzung des Satzes, so ergibt sich ein Widerspruch wie folgt: Durch eine projektive Abbildung werde genau einer der Punkte, etwa  $P_1$ , in einen Fernpunkt transformiert. Das System der Punkte und ihrer Verbindungsgeraden geht dabei über in eine Schar von Parallelen (durch  $P_1$ ), von denen jede im Endlichen zwei der Punkte enthält, und in eine endliche Mengen von Transversalen, von denen jede mindestens drei der Punkte enthält.  $G$  sei die Transversale, die mit den Parallelen den kleinsten Winkel einschliesst und  $P_i, P_j, P_k$  in dieser Anordnung die drei auf  $G$  liegenden Mengenpunkte. Die zur Parallelenschar gehörige Verbindungsgerade von  $P_1$  und  $P_j$  enthält noch einen Punkt  $P_m$  der Menge. Nun bildet aber entweder die Verbindungsgerade durch  $P_i$  und  $P_m$  oder jene durch  $P_k$  und  $P_m$  mit den Parallelen einen kleinern Winkel als  $G$ , im Widerspruch zur Konstruktion.

**2** ist zu **1** dual.

**3** erscheint als Korollar zu **1**, wenn man durch Inversion an einem Kreis mit einem Mengenpunkt als Zentrum alle Kreise durch diesen Punkt in Geraden übergehen lässt, die die Voraussetzungen von **1** erfüllen.

**4.** Der kleinste Deckkreis (d.h. der kleinste abgeschlossene Kreisbereich, der alle Punkte der Menge bedeckt) enthält auf seiner Peripherie Mengenpunkte, die keinen Halbkreisbogen frei lassen, u.a. einen Punkt  $P$ . Weitere Mengenpunkte, z.B. ein Punkt  $Q$ , können nicht im Innern liegen, da Spiegelung an der Symmetriearchse von  $P$  und  $Q$  zeigt, dass dann auch ausserhalb des Deckkreises Mengenpunkte wären. — Ist die Zahl der Mengenpunkte endlich und  $> 2$ , so sei  $\varphi$  der kleinste Winkel zwischen je zwei verschiedenen Symmetriearchsen der Menge. Spiegelung an diesen beiden Achsen kommt einer Drehung um  $2\varphi$  gleich, also ist die Menge drehsymmetrisch bezüglich des Winkels  $2\varphi$ . Die  $n$ -Ecke mit dem Zentriwinkel  $\varphi = 2\pi/n$  erweisen sich jetzt als die einzigen Mengen mit diesen Dreh- und Spiegelsymmetrieeigenschaften, so dass jede endliche Menge mit den

in 4 genannten Eigenschaften die Eckpunktmenge eines regulären Vielecks ist.

**5.** Gibt es dem Gitter eingelagerte reguläre  $n$ -Ecke ( $n$  fest), dann auch solche mit kleinster Seitenlänge, weil hiefür nur die Werte  $\sqrt{p^2+q^2}$  ( $p, q$  ganz) in Frage kommen. Diese Existenz vorausgesetzt, seien  $P_1, P_2, \dots, P_n$  die Ecken eines kleinsten regulären Gitter- $n$ -ecks in ihrer natürlichen Reihenfolge. Trägt man von diesen Gitterpunkten aus bzgl. die Gittervektoren  $\overrightarrow{P_2 P_3}, \overrightarrow{P_3 P_4}, \dots, \overrightarrow{P_1 P_2}$  ab, so führen ihre Endpunkte wieder auf Gitterpunkte. Für  $n = 5$  und  $n > 7$  bilden diese ein kleineres reguläres Gitter- $n$ -eck, im Widerspruch zur Minimalbedingung.  
— Für  $n = 3$  sieht man die Unmöglichkeit eines dem Gitter eingelagerten regulären  $n$ -Ecks wie folgt ein: Die Fläche  $s^2 \sqrt{3}/4$  wäre wegen der Ganzzahligkeit von  $s^2$  eine irrationale Zahl, anderseits ergibt sich, etwa nach Determinantenformeln berechnet, ein rationaler Wert. Gleches gilt von regulären Sechsecken mit der Fläche  $3s^2 \sqrt{3}/2$ .

**6.** Die Fläche  $s^2 \sin \alpha$  eines Gitterrhombus ist, nach Determinantenformeln berechnet, ganzzahlig. Nach **8** ist daher  $\alpha = \pi/6$  oder  $\alpha = \pi/2$ . Die erste Möglichkeit entfällt, da bei einer Drehung um  $\pi/2$  um eine Ecke der Rhombus wieder in einen Gitterrhombus überginge (jeder Gitterpunkt geht dabei in einen Gitterpunkt über!); dabei wäre ein reguläres Gitterdreieck zu erkennen, im Widerspruch zu **5**.

### 7. Einfache Folgerung von **8**.

**8.** Man beachte, dass die Argumentation des Beweises von **5** für  $n = 5$  und  $n \geq 7$  auch in jedem Rechteckgitter möglich ist. Aus dieser schärfern Aussage, dass sich in einem Rechteckgitter von den regulären Vielecken nur Dreiecke, Vierecke und Sechsecke einlagern lassen, ergibt sich **8**. In der Tat: Sei  $\alpha = (m/n)2\pi$  und der Bruch  $m/n$  nicht kürzbar. Ist  $\cos \alpha$  rational, dann ist nach goniometrischen Formeln  $\cos v\alpha = a_v$ ,  $\sin v\alpha = b_v$   $\sin \alpha$  mit rationalen  $a_v, b_v$  ( $v = 1, 2, \dots, n$ ). N sei der gemeinsame Nenner der  $2n$  Werte  $a_v, b_v$ . Erzeugt ein Rechteck der Länge  $1/N$  und der Breite  $(\sin \alpha)/N$  ein Rechteckgitter, so

fallen daher von der Einheitskreislinie um einen Gitterpunkt alle Punkte mit den Phasen  $v\alpha$  ( $v = 1, \dots, n$ ) auf Gitterpunkte. Anderseits bilden diese Punkte wegen  $\alpha = (m/n)2\pi$  ein reguläres  $n$ -Eck. Wie eingangs erwähnt, folgt daraus, dass  $n$  einen der Werte 1, 2, 3, 4, 6 besitzt. Zusammen mit der Nebenbedingung  $0 < \alpha < \pi/2$  ergibt sich  $\alpha = \pi/3$ .

**9.** Ist eine Punktmenge mit lauter ganzzahligen Punktstrecken gegeben, in der es drei nicht auf einer Geraden liegende Punkte A, B, C gibt, und bezeichnet  $k$  die grösste der Distanzen  $d(AB)$ ,  $d(BC)$ , so gibt es höchstens  $4(k+1)^2$ , also endlich viele Punkte P so, dass  $d(PA) = d(PB)$  und  $d(PB) = d(PC)$  ganzzahlig ausfallen. Es ist nämlich  $|d(PA) - d(PB)| < d(AB)$  und kann somit nur einen der Werte 0, 1, ...,  $k$  annehmen, so dass P auf einer von  $k+1$  Hyperbeln liegt. Ebenso liegt P auf einer von  $k+1$  Hyperbeln, die durch B und C bestimmt werden. All diese (verschiedenen) Hyperbeln schneiden sich in höchstens  $4(k+1)^2$  Punkten.

**10.** Die Aussage „dann“ ist trivial. Die Aussage „nur dann“ ist klar für endliche Punktmengen, da deren konvexe Hülle ein konkav polygon ist, dessen Ecken zur Menge gehören; wird dieses von einer Ecke aus trianguliert, so liegt jeder Punkt in einem der Teildreiecke, also in der konvexen Hülle von drei Punkten der Menge. Es bleibt für unendliche Punktmengen M zu zeigen, dass die Menge N aller Punkte, die schon in der konvexen Hülle endlich vieler Punkte aus M enthalten sind, mindestens so umfassend ist wie die konvexe Hülle  $\bar{M}$  von M. In der Tat: N enthält, wie man sich sofort zurechtlebt, mit zwei Punkten auch jeden Punkt der Verbindungsstrecke, ferner enthält N jeden Punkt von M. Da  $\bar{M}$  als kleinste Menge mit diesen Eigenschaften definiert wurde, ist der Beweis abgeschlossen.

**11.** Nicht trivial ist einzig die Aussage „nur dann“. Ein innerer Punkt P der konvexen Hülle  $\bar{M}$  von M ist auch innerer Punkt eines Dreiecks mit Ecken in  $\bar{M}$ . Da jede dieser Ecken nach **10** in der konvexen Hülle von drei Punkten aus M liegt,

ist das ganze Dreieck in der konvexen Hülle von endlich vielen Punkten aus  $M$  enthalten. Wird dieses konvexe Viereck mit Ecken aus  $M$  von einer Ecke aus trianguliert, so ist  $P$  in der Vereinigung zweier aneinandergrenzender Dreiecke als innerer Punkt enthalten, also in der konvexen Hülle von vier Punkten aus  $M$ .

**12.** Die Aussage „nur dann“ ist trivial. Es bleibt zu zeigen, dass zu zwei nicht separierbaren Mengen  $M$  und  $N$  zwei eben-solche Teilmengen  $M'$  und  $N'$  mit gesamthaft höchstens vier Punkten angegeben werden können. Nun sind  $M$  und  $N$  genau dann nicht separierbar, wenn ihre konvexen Hüllen  $\overline{M}$  und  $\overline{N}$  Punkte gemeinsam haben. Zu einem solchen gemeinsamen Punkt gibt es nach **10** zwei je dreipunktige Mengen  $M''$  und  $N''$ , deren konvexe Hüllen  $\overline{M}''$  und  $\overline{N}''$  diesen Punkt gemeinsam haben. Nun ist entweder eine dieser konvexen Hüllen in der andern enthalten, etwa  $\overline{M}''$  in  $\overline{N}''$ , oder die Dreiecke  $\overline{M}''$  und  $\overline{N}''$  besitzen sich schneidende Randstrecken. Im ersten Falle bestehe  $M'$  aus einem der Punkte von  $M''$ ,  $N' = N''$ ; im zweiten Falle bestehe  $M'$  und  $N'$  je aus den beiden Endpunkten des sich schneidenden Streckenpaars. In beiden Fällen sind  $M'$  und  $N'$  nicht separierbar, weil  $\overline{M}'$  und  $\overline{N}'$  Punkte gemeinsam haben.

**13.** Man wähle vier Punkte der gegebenen Menge  $M$ . Bildet ihre konvexe Hülle nicht ein (nichtentartetes) Viereck, so ist ein Punkt  $N$  in der konvexen Hülle der übrigen drei Punkte, umso-mehr in der konvexen Hülle von  $M - N$  enthalten, und die beiden fremden Mengen  $N$  und  $M - N$  sind nicht separierbar. Bildet hingegen die konvexe Hülle ein Viereck, so bestehe  $N$  aus den Endpunkten einer Diagonale.  $N$  und  $M - N$  bilden wieder fremde, nichtseparierbare Teilmengen von  $M$ .

**14.** Für endlich viele Eibereiche folgt der Hellysche Satz durch vollständige Induktion aus folgendem Hilfssatz: *Es sei  $k \geq 4$ . Haben je  $k - 1$  von  $k$  Eibereichen Punkte gemeinsam, so haben alle  $k$  Eibereiche Punkte gemeinsam.* Beweis:  $C_1, \dots, C_k$  seien die  $k$  Eibereiche und  $P_i$  bezeichne einen Punkt, der in allen ausser eventuell in  $C_i$  enthalten ist. Nach **13** lassen sich die Punkte  $P_i$

$(i = 1, \dots, k)$  in zwei fremde Gruppen  $M' = \{P_{i_1}, \dots, P_{i_m}\}$  und  $M'' = \{P_{j_1}, \dots, P_{j_n}\}$  aufteilem, so dass deren konvexe Hüllen  $M'$  und  $M''$  einen Punkt  $P$  gemeinsam haben. Nun gehört aber jeder Punkt von  $M'$  und damit wegen der Konvexität der  $C_i$  auch  $\overline{M'}$  zu allen Eibereichen ausser eventuell  $C_{i_1}, \dots, C_{i_m}$ , ebenso  $\overline{M''}$  zu allen ausser eventuell  $C_{j_1}, \dots, C_{j_n}$ . Der Punkt  $P$  gehört zu  $\overline{M'}$  und  $\overline{M''}$ , somit zu allen Eibereichen ohne Ausnahme.

Wäre in einem unendlichen Eibereichsystem kein Punkt allen Bereichen gemeinsam, so könnte man zu jedem Punkt des Bereichs  $C_1$  des Systems einen weiteren Bereich  $C_i$  des Systems angeben, der diesen Punkt und damit auch eine ganze Kreisumgebung nicht trifft;  $C_i$  und diese Umgebung seien einander zugeordnet. Nach dem Theorem von Heine-Borel genügen endlich viele dieser Kreisumgebungen, um  $C_1$  zu überdecken. Die ihnen zugeordneten endlich vielen Eibereiche  $C_i$  und  $C_1$  haben nach Konstruktion keinen Punkt gemeinsam, im Widerspruch zum obigen Ergebnis, dass endlich viele Eibereiche des Systems einen Punkt gemeinsam haben, sobald die Voraussetzungen von **14** erfüllt sind.

**15** ergibt sich aus **14**, wenn man einsieht, dass drei Rechtecke  $R_1, R_2, R_3$  immer dann Punkte gemeinsam haben, wenn dies schon für je zwei zutrifft. In der Tat: Bezeichnet  $P_i(x_i, y_i)$  in einem kartesischen Koordinatensystem, dessen Achsen parallel zu den Rechtecken liegen, einen Punkt, der in allen drei Rechtecken ausser eventuell in  $R_i (i = 1, 2, 3)$  enthalten ist, also in  $R_j$  und  $R_k$ , so bemerkt man, dass mit  $P_i$  und  $P_j$  nicht nur die ganze Verbindungsstrecke in  $R_k$  enthalten ist, sondern das ganze achsenparallele Rechteck über ihr, also alle  $P(x, y)$ , für die  $x$  im Intervall  $(x_i, x_j)$  und  $y$  in  $(y_i, y_j)$  liegt. Wählt man die Numerierung so, dass  $x_1 \leq x_2 \leq x_3$  und  $y_i \leq y_j \leq y_k$  gilt, so erfüllt  $P(x_2, y_j)$  diese Bedingungen für jedes der drei Rechtecke, so dass er allen angehört.

**16** ist Korollar zu **15**, weil Rechtecke zu Strecken entarten können.

**17** kann auf **14** zurückgeführt werden. Eine Menge von Kreisbögen, jeder kleiner als ein Halbkreis, hat nämlich dann und nur dann einen Punkt gemeinsam, wenn dasselbe von den zugehörigen Kreissegmenten gilt, und dafür genügt nach **14**, dass je drei einen Punkt gemeinsam haben.

**18** folgt aus **16**. In der Tat lassen Bogen, jeder kleiner als ein Drittelskreis und paarweise nicht punktfremd, einen Peripheriepunkt unbedeckt, z.B. den zu einer Bogenmitte antipodischen. Der Kreis kann somit hier aufgeschnitten und auf eine Gerade abgewickelt werden, so dass jeder Bogen in eine Strecke übergeht.

**19.** Es sei  $G(\alpha)$  die gerichtete Gerade durch das Kreiszentrum, die mit einer festen Richtung den Winkel  $\alpha$  einschließt. Werden die gegebenen Bogen, die paarweise Punkte gemeinsam haben, auf  $G(\alpha)$  orthogonal projiziert, so haben die Bildstrecken dieselbe Eigenschaft. Somit ist der Durchschnitt all dieser Strecken ein Punkt oder eine Strecke, jedenfalls aber nicht leer (**16**). Für mindestens einen Winkel  $\alpha_0$  enthält  $D(\alpha)$  das Kreiszentrum. In der Tat:  $D(\alpha)$  und  $D(\alpha + \pi)$  liegen in ihren gerichteten Geraden spiegelsymmetrisch bezüglich  $Z$ ; da nun jede Orthogonalprojektion eines Bogens und also auch  $D(\alpha)$  stetig mit  $\alpha$  ändert, muss  $D(\alpha)$  bei einer Drehung der Geraden um  $\pi$  für eine Lage  $\alpha_0$  das Zentrum bedecken.  $G(\alpha_0 + \pi/2)$ , die projizierende Gerade durch  $Z$ , ist dann eine Durchmessergerade, die alle Bogen trifft.

Die Varianten **20-28** ergeben sich aus den grundlegenden Aussagen **14**, **16**, **17**, **19** durch mannigfache Abbildungsmethoden.

**20-22.** Die Lage eines gegebenen Eibereiches  $A$  lässt sich bei Verschiebungen durch die Lage eines starr mit ihm verbundenen Punktes  $P$  charakterisieren. Ohne Mühe bestätigt man, dass  $P$  einen Eibereich  $B^*$  durchläuft, wenn der bewegliche Eibereich  $A$  alle Lagen einnimmt, bei denen er in einem Eibereich  $B$  enthalten ist. Gleches gilt von allen Lagen, bei denen  $A$  einen Eibereich  $B$  trifft, bzw. umschließt. Jeder Eibereich bildet sich auf diese Weise in einen Eibereich  $B^*$  ab, und bei diesen Abbildungen gehen die Aussagen **20-22** in **14** über.

**23.** Werden Eibereiche mit paarweise gemeinsamen Punkten durch Zentralprojektion auf eine Kreislinie abgebildet, so gehen sie in Bogen über, die **19** erfüllen. Die projizierende Gerade durch die in allen Bildbogen enthaltenen antipodischen Punkte trifft alle Eibereiche des Systems.

**24.** Orthogonalprojektion der Eibereiche erzeugt auf einer Geraden eine Streckenmenge, die **16** erfüllt. Die projizierende Gerade durch den in allen Strecken der Menge enthaltenen Punkt trifft alle Eibereiche der Menge.

**25.** Gibt es unter den parallelen Rechtecken der Menge zwei, die nur eine einzige positiv orientierte Treffgerade gemeinsam haben, so ist die Aussage evident, da diese Gerade jedes weitere Rechteck der Menge treffen muss. Andernfalls dürfen wir voraussetzen, dass je drei Rechtecke der Menge eine positiv orientierte Treffgerade besitzen, die zu keiner Rechteckseite parallel ist. Dasselbe gilt dann von je endlich vielen Rechtecken der Menge. In der Tat: Man lege parallel zu den Rechtecken orientiert zwei Parallelen und charakterisiere ihre Punkte durch eine Längenkoordinate in ihnen. Jede Transversale lässt sich dann in einen Punkt einer Hilfsebene abbilden, indem man die linearen Koordinaten ihrer Schnittpunkte mit den Parallelen als kartesische Koordinaten der Hilfsebene deutet. Die Menge aller ansteigenden Geraden, welche ein Rechteck der Menge treffen, geht dabei in eine konvexe, abgeschlossene, aber nicht beschränkte Punktmenge über. Je drei dieser Mengen haben nach unsrern Voraussetzungen im Endlichen Punkte gemeinsam. Greift man endlich viele dieser konvexen Mengen heraus, so sind ihre Durchschnitte mit einem ausreichend grossen Kreis Eibereiche, die nach **14** einen Punkt gemeinsam haben. Die diesem Punkt entsprechende Gerade trifft die herausgegriffenen endlich vielen Rechtecke. — Um den Beweis auch für unendliche Rechteckmengen zu führen (ohne eine stärkere Variante von **14** zu benutzen) brauchen wir vom bisher Bewiesenen nur, dass je vier Rechtecke der Menge eine gemeinsame Treffgerade aufweisen. Lässt man nun jeder Geraden, die mit den gelegten zwei Parallelen den Winkel  $\varphi$  einschliesst, auf einer Kreisperipherie den Punkt mit Phase  $\varphi$  entsprechen, so bildet sich die Menge aller ansteigenden Geraden,

welche zwei herausgegriffene Rechtecke der Menge treffen, in einen Bogen kleiner als ein Drittelskreis ab. Diese Abbildung, für alle Rechteckpaare der Menge ausgeführt, liefert eine Bogenmenge mit paarweise gemeinsamen Punkten, weil je vier Rechtecke eine gemeinsame Treffgerade aufweisen. Der allen Bogen gemeinsame Punkt (18) entspricht einer Geraden, zu der je zwei Rechtecke der Menge eine parallele Treffgerade gemeinsam haben; mit andern Worten: durch Projektionsstrahlen parallel zu dieser Geraden bildet sich die Rechteckmenge auf einer Transversalen als Streckenmenge ab, die nach 16 einen Punkt gemeinsam hat. Der Projektionsstrahl durch ihn trifft alle Rechtecke der Menge.

**26.** P sei ein Peripheriepunkt eines Kreises. Zu jeder Geraden G der Ebene lege man eine Parallelle durch P; ihr zweiter Durchstosspunkt mit dem Kreis sei das Bild der Geraden G. Bei dieser Abbildung geht die Menge der Geraden, welche zwei feste Eibereiche treffen, in einen Bogen über. Führt man dies für alle Bereichspaare einer Menge von Eibereichen, die zu je vier eine Treffgerade gemeinsam haben, durch, so erhält man eine Bogenmenge mit paarweise gemeinsamen Punkten. Dem antipodischen Punktpaar, das alle Bogen trifft (19), entsprechen zwei orthogonale Richtungen, so dass man findet: *Haben je vier Eibereiche einer Eibereichmenge eine gemeinsame Treffgerade, so gibt es zwei orthogonale Richtungen derart, dass je zwei Eibereiche der Menge eine gemeinsame Treffgerade mit einer dieser Richtungen aufweisen.* — Sind nun die Eibereiche dieser Menge zueinander homothetisch, so treffen die vier Geraden der erwähnten Richtungen, die ein einem Bereich der Menge umbeschriebenes Rechteck bilden, alle nichtkleinern Bereiche der Menge. Gibt es also in der Menge einen kleinsten Eibereich, so treffen die ihm derart umbeschriebenen Geraden alle Bereiche der Menge. Gibt es in der Menge keinen kleinsten Eibereich, so führen einige zusätzliche Überlegungen über das Konvergenzverhalten nach Grösse und Lage der Bereiche zum gewünschten Resultat. Sind die Eibereiche nicht nur homothetisch, sondern zudem kongruent, so lässt sich weiter einsehen, dass stets schon drei von diesen vier Treffgeraden alle Bereiche treffen.

**27.** Eine Gerade in der Separationsrichtung werde als  $x$ -Achse ausgezeichnet. Jede andere Gerade der Ebene bildet mit der  $x$ -Achse einen Winkel  $0 \leq \varphi < \pi$  gemessen im positiven Drehsinn. Der Menge aller Geraden, welche zwei Eibereiche des Systems, etwa A und B treffen, entspricht auf einer  $\varphi$ -Achse ein Winkelintervall zwischen 0 und  $\pi$ , das wir mit  $(AB)$  bzw. analog bezeichnen. Wir behaupten, dass je zwei dieser Winkelintervalle Punkte gemeinsam haben. Dies vorausgesetzt, schliesst man mit **16**, dass ein Winkel  $\varphi_0$  existiert, so dass je zwei Eibereiche des Systems durch eine Gerade der Richtung  $\varphi_0$  getroffen werden können. Mit andern Worten: die Parallelprojektionen der Eibereiche in dieser Richtung auf die  $x$ -Achse bilden eine Streckenmenge mit paarweise gemeinsamen Punkten. Die projizierende Gerade durch den allen Strecken gemeinsamen Punkt (**16**) trifft dann alle Eibereiche des Systems. — Es bleibt nachzutragen, dass je zwei Winkelintervalle Punkte gemeinsam haben. Für die Intervalle  $(AB)$ ,  $(BC)$  (bzw. analog) wird dies durch die Voraussetzung gemeinsamer Treffgeraden zu A, B, C gesichert. Hätten aber zwei Intervalle, etwa  $(AB)$ ,  $(CD)$  keinen Punkt gemeinsam, so zeigt sich ein Widerspruch wie folgt: Jedes der Intervalle  $(AC)$ ,  $(AD)$ ,  $(BC)$ ,  $(BD)$  hat sowohl mit  $(AB)$  wie mit  $(CD)$  Punkte gemeinsam, so dass für einen Winkel  $\varphi'$  „zwischen“  $(AB)$  und  $(CD)$  folgende Sachlage eintritt: Durch Geraden der Richtung  $\varphi'$  sind die Eibereiche A und B, ebenfalls C und D separierbar (daraus folgt die Separierbarkeit eines weitern Paars durch jede dieser beiden Separationsgeraden !), nicht aber A und C, A und D, B und C, B und D. Dies ist offensichtlich ein Widerspruch.

**28.** Durch die beim Beweis **26** benutzte Abbildung wird **28** auf die beim Beweis **18** erwähnte Sachlage zurückgeführt, dass Kreisbogen mit paarweise gemeinsamen Punkten, jeder kleiner als ein Drittelskreis, einen Peripheriepunkt unbedeckt lassen.

**29.** Spezialfall von **21**.

**30.** Die Geraden können durch ausreichend lange Strecken ersetzt werden, wodurch ein Spezialfall von **21** entsteht.

**31.** Bei Berücksichtigung von **29** genügt es, die Aussage für eine dreipunklige Menge vom Durchmesser 1 zu beweisen. Bildet diese ein stumpfwinkliges Dreieck, so ist dessen längste Seite Deckkreisdurchmesser, so dass hier sogar  $R \leq \frac{1}{2}$  zutrifft. Bestimmt die dreipunklige Menge ein spitzwinkliges Dreieck, so wird der Deckkreis vom Umkreis gebildet, dessen Durchmesser bekanntlich durch  $2R = a/\sin \alpha$  bestimmt ist;  $a$  ist irgend eine Dreieckseite,  $\alpha$  der gegenüberliegende Winkel. In jedem Dreieck gibt es einen Winkel  $\alpha \geq \pi/3$ , so dass zugleich  $\sin \alpha \geq \frac{1}{2}\sqrt{3}$  und  $a \leq 1$  gilt. Also ist  $2R = a/\sin \alpha \leq 2/\sqrt{3}$ .

**32** braucht ebenfalls nur noch für drei Geraden mit Durchmesser 1 bewiesen zu werden. Diese bilden ein Dreieck mit Umfang  $U \leq 3$ , das dem kleinsten Treffkreis umbeschrieben ist. Da das reguläre Dreieck mit Umfang  $6r\sqrt{3}$  das umfangkleinste Dreieck ist, das sich einem Kreis mit Radius  $r$  umbeschreiben lässt, gilt  $6r\sqrt{3} \leq U \leq 3$ , also  $r \leq 1/2\sqrt{3}$ .

**33.** Die Punktmenge darf als abgeschlossen vorausgesetzt werden. Ist  $S$  ein reguläres Umdreieck (so dass jede Seite einen Mengenpunkt enthält) und  $S^*$  ein solches in gespiegelter Lage, so ist entweder  $S$  oder  $S^*$  ein reguläres Dreieck der Seitenlänge  $s \leq \sqrt{3}$ . Fällt man nämlich von irgend einem Punkt, der in  $S$  und  $S^*$  enthalten ist, die Lote auf die Seiten von  $S$  bzw.  $S^*$ , so ist deren Summe nach einem planimetrischen Satz gleich der Höhe von  $S$  bzw.  $S^*$ . Die Summe je eines Lotes auf  $S$  und des entsprechenden auf  $S^*$  ist wegen der Durchmesserbedingung  $\leq 1$ , so dass eines der Dreiecke eine Höhe  $\leq 3/2$  aufweist. Seine Seiten betragen höchstens  $\sqrt{3}$ .

**34.** Anschliessend an den Beweis **33** stellen wir fest, dass die Seitenlänge des regulären Umdreiecks  $S$  eine stetige Funktion der Basisrichtung ist und bei Drehung um  $\pi$  in die von  $S^*$  übergeht. Daher sind  $S$  und  $S^*$  für eine spezielle Richtung gleich gross; ihr Durchschnitt, in dem die Menge mit  $D = 1$  enthalten ist, bildet dann ein (eventuell entartetes) zentrale symmetrisches Sechseck, bei dem parallele Seiten einen Abstand  $\leq 1$  haben. Es ist ganz im regulären Sechseck mit demselben Symmetriezentrum und denselben Seitenrichtungen enthalten, dessen

parallele Seiten den Abstand 1 aufweisen. Dieses reguläre Sechseck besitzt die Seitenlänge  $1/\sqrt{3}$  und enthält die gegebene Menge.

**35** ergibt sich ausgehend von **34**, wenn in dem der Menge vom Durchmesser 1 umbeschriebenen regulären Sechseck der Seitenlänge  $1/\sqrt{3}$  vom Zentrum aus drei Lote mit Zwischenwinkeln  $2\pi/3$  auf drei Seiten gefällt werden. Dadurch zerfällt das Sechseck in drei kongruente Fünfecke vom Durchmesser  $\sqrt{3}/2$ , die die gegebene Menge überdecken.

**36.** Es sei  $n \geq 4$  und die Menge  $P_1, \dots, P_n$  habe den Durchmesser  $D = 1$ . Zu zwei Punkten  $P_i, P_k$  mit Abstand 1 zeichne man stets die Verbindungsstrecke  $P_i P_k$ . Gehen dann von jedem  $P_i$  höchstens zwei Strecken aus, so ist die Streckenzahl  $\leq n$ , wie behauptet. Existiert aber ein Punkt, etwa  $P_1$ , von dem mindestens 3 Strecken, etwa zu  $P_i, P_j, P_k$ , auslaufen, so sei  $P_j$  im spitzen Winkelraum  $P_i P_1 P_k$  enthalten. Ist nun  $d(P_j, P_m) = 1$ , so muss  $P_j P_m$  sowohl  $P_1 P_i$  wie auch  $P_1 P_k$  treffen, da andernfalls  $D > 1$  wäre. Daraus folgt  $P_m = P_1$ , d.h.  $P_j$  kann nur von  $P_1$  den Abstand 1 haben. Lässt man  $P_j$  weg, so fällt eine einzige Verbindungsstrecke dahin. Durch vollständige Induktion folgt daraus **36.** — Da also unter  $n$  Punkten mit  $D = 1$  stets einer von höchstens zwei andern den Abstand 1 hat, so folgt durch Induktion auch der Borsuksche Satz. Denn jener Punkt lässt sich derjenigen der drei Teilmengen der restlichen  $n - 1$  Punkte zugesellen, die die beiden weitersten Punkte nicht enthält; dadurch bleiben alle Durchmesser  $< 1$ .

**37.** Die Mittelpunkte der Kreise vom Radius  $R = 1$  mit paarweise gemeinsamen Punkten bilden eine Punktmenge vom Durchmesser  $D \leq 2$ . Diese kann nach **34** durch ein reguläres Sechseck der Seitenlänge  $2/\sqrt{3}$  überdeckt werden. In diesem Sechseck lassen sich drei Punkte vom gegenseitigen Abstand 1, nämlich drei Diagonalenmittelpunkte, angeben, so dass jeder Sechseckpunkt, speziell jedes der Kreiszentren, von einem dieser drei Punkte einen Abstand  $\leq 1$  aufweist. Demnach ist stets mindestens einer dieser Punkte in jedem der gegebenen Kreise enthalten.