Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 1 (1955)

Heft: 1-2-3: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Rubrik: ARTICLES GÉNÉRAUX

ARTICLES GÉNÉRAUX

vide-leer-empty

A LA MÉMOIRE DE PIERRE SERGESCU
(1893-1954)

En déférent hommage à son admirable épouse qui l'a soutenu de son affection dans les bons et les mauvais jours de sa vie

PAR

Arnold Reymond, Lausanne

Comme le dit si justement R. Taton, « Après les décès d'Aldo Mieli, de Pierre Brunet, de Maxime Laignel-Lavastine, de Pierre Humbert, de Gino Loria et de Henri Berr, la mort de Pierre Sergescu affecte tous ceux qui dans le monde entier s'intéressent aux progrès de l'histoire des sciences. Elle peine aussi les amis si nombreux de ce chercheur probe et infatigable, de cet organisateur à la compétence éprouvée et au dévouement sans bornes et de cet homme si droit et si généreux. » [1]

Sergescu est né à Turn-Severin, au bord du Danube, à l'endroit où ce fleuve quitte la Hongrie et traverse les Portes de Fer. C'est dans cette ville qu'il fait ses études secondaires, pour prendre ensuite à l'Université de Bucarest simultanément sa licence en mathématiques, sa licence en philosophie ainsi que le concours de sortie du Conservatoire de musique.

Lors de la première guerre mondiale, la Roumanie, comme on le sait, opte pour les Alliés au côté desquels Sergescu combat courageusement. Pris par les Allemands au début de 1917, il vit dans un camp de déportation et est libéré après l'armistice général de 1918.

---

[1] Nous nous sommes beaucoup inspiré, pour rendre cet hommage, des beaux articles de René Taton et de Pierre Costabel qui ont paru, le premier dans la *Revue d'Histoire des sciences et de leurs applications* (janvier-mars 1955) et le second dans la *Revue générale des sciences pures et appliquées* (janvier-mars 1955).

Devenu agrégé de mathématiques, il obtient une bourse pour Paris où il conquiert brillamment sa licence et prépare son doctorat ès mathématiques. Rappelé en son pays, il y soutient avec succès devant son maître Lalescu sa thèse de doctorat. Il est alors nommé en 1924 professeur suppléant à l'Université de Bucarest et à l'Ecole polytechnique; peu après il est appelé à l'Université de Cluj. Il publie là plusieurs cours et mémoires importants de mathématiques. Soutenu par deux mathématiciens éminents (D. Pompeiu et Tzitzeica), il fonde la revue internationale *Mathematica* qui compte actuellement vingt-trois volumes et qui assure dans le monde scientifique une place honorable à son fondateur et aux mathématiciens roumains et étrangers qui y collaborèrent.

Dès cette époque, P. Sergescu fait de fréquents séjours en France où il participe à de nombreux congrès et donne dans diverses universités des séries de conférences très appréciées. Mais sans négliger ses recherches mathématiques, il est de plus en plus attiré vers l'histoire des sciences; il suit assidûment en 1922 le cours de Pierre Boutroux et vers 1930, Aldo Mieli, alors secrétaire perpétuel de l'Académie internationale de l'histoire des sciences, le pousse à publier des travaux sur l'histoire des mathématiques. C'est ainsi qu'en 1933, dans la collection « Tableau du XXe siècle », parait l'ouvrage de Sergescu consacré à cette période et à la fin du XIXe siècle. Vingt ans plus tard, en 1951, il publie *Un coup d'œil sur les origines de la science exacte moderne.*

Lorsque la deuxième guerre mondiale survient, il est encore professeur à Cluj; il soutient avec ardeur la cause des Alliés, secourant les réfugiés polonais et les prisonniers français évadés et faisant en public de nombreuses allocutions pour l'Alliance française. Chassé de Cluj par l'occupation hongroise, il professe aux Universités de Bucarest et Timisoara et en 1945 il est nommé professeur et recteur de l'Ecole polytechnique de Bucarest, tâche délicate à remplir étant donné les circonstances politiques et sociales que la Roumanie traverse.

« Mais en 1946, devant le durcissement du climat politique, il sent que cette tâche est pour lui terminée et il se résigne à répondre à l'appel de ses amis français qui l'invitent à venir faire une série de conférences à Paris. Arrivé en France, où il reprend contact avec les mathématiciens et les historiens des sciences, il participe activement à la création de l'Union internationale d'Histoire des sciences aux côtés de Pierre Brunet, d'Arnold Reymond et de Cortesao. »[1] Le Congrès international de Lausanne (octobre 1947) consacre cette nouvelle organisation dont le secrétariat général est confié à Pierre Sergescu. Peu après, Aldo Mieli et Pierre Brunet étant décédés, il est nommé secrétaire permanent de l'Académie internationale d'Histoire des sciences et directeur de la revue des *Archives internationales* de cette discipline.

Malgré ces lourdes charges, il continue ses travaux personnels, ses émissions culturelles à la radiodiffusion française; il organise au Palais de la découverte des conférences mensuelles ou des expositions commémoratives des grands savants des siècles passés (Léonard de Vinci, Pascal, par exemple).

Il prend part en outre aux Congrès de l'Association française pour l'avancement des sciences et aux Congrès internationaux d'Histoire des sciences. Répudié par le gouvernement roumain devenu communiste, il souffre cruellement d'être apatride; il fait tout ce qu'il peut pour soutenir ses compatriotes réfugiés comme lui en France.

Tant d'épreuves morales et physiques finissent par avoir raison de sa santé. Tombé malade en revenant du Congrès international d'Histoire des sciences tenu à Jérusalem (septembre 1953), il est contraint, au début de 1954, de passer trois mois à l'hôpital. Rentré chez lui, il se remet au travail, soigné par sa femme avec un dévouement inlassable. Le 20 décembre 1954, après avoir travaillé tard dans la nuit avec quelques amis, il s'est endormi pour ne plus se réveiller.

* * *

Ce départ est un deuil terrible pour l'Académie et l'Union internationales d'Histoire des sciences, pour les *Archives internationales* de cette discipline, pour les diverses institutions auxquelles il se dévouait corps et âme. Cette mort crée également

[1] R. TATON, article cité, p. 79.

un vide très douloureux chez tous les amis que Sergescu avait en France, en Suisse romande et ailleurs dans le monde civilisé, car il excellait à susciter et à maintenir entre les savants d'où qu'ils vinssent des liaisons durables.

Sitôt qu'il fut professeur à l'Université de Cluj qu'il avait puissamment contribué à organiser, l'un de ses premiers actes fut d'inviter ses anciens maîtres de Paris à venir y parler. Il tint également à ce que la Suisse romande entrât en contact avec elle. C'est ainsi qu'Edouard Claparède, Rolin Wavre, nous-même, entre autres, y donnèrent des conférences. L'accueil qu'il faisait à ses hôtes laissait un souvenir inoubliable.

Il avait, par exemple, organisé en 1936 une séance du Comité d'histoire générale et du Comité d'histoire des sciences. Il nous fit visiter toute la Roumanie, les peintures émouvantes des vieilles églises, nous mettant en rapport avec les paysans et avec les artisans (tissages et poteries). La variété des sites traversés (montagnes et plaines) et des populations rencontrées nous ont laissé des visions ineffaçables.

Lorsque après la deuxième guerre il fut contraint de ne plus rentrer dans son pays, il poursuivit inlassablement son activité de rapprochement. Il confia souvent à un étranger le soin de faire l'une des conférences d'histoire des sciences données au Palais de la découverte et éditées par celui-ci.

* * *

Activité scientifique.

Elle se divise tout naturellement en publications mathématiques et publications historiques.

L'œuvre *mathématique* se situe surtout dans la période antérieure à 1930, mais ne s'est pas réduite à un unique secteur des mathématiques. P. Sergescu, en effet, s'il s'est intéressé avant tout à la théorie des polynômes et aux équations intégrales, a donné également dans de nombreux domaines des mémoires originaux, particulièrement dans les *Comptes rendus de l'Académie des sciences*. Parmi ces mémoires, il faut citer entre autres dans le *Bulletin mathématique* de la société roumaine les « Noyaux symétrisables (théorème de Laguerre) », Université de Cluj, 1927; « Noyaux symétriques gauches, sur le mouvement des particules électrisées », Congrès de l'Associations française pour l'avancement des sciences, 1930; « Module des zéros des dérivées des fonctions bornées », *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, Paris, 1924; « Extension aux noyaux symétrisables du théorème de Weyl » — « Quelques inégalités de MM. Landau et Lindelöf concernant les fonctions monogènes » — « Théorème d'Hermite », *Mathesis*, 1922.

Quant à l'*histoire des sciences*, les sujets que Sergescu a traités de préférence dans cette discipline sont: la pensée scientifique médiévale, les mathématiciens du XVII^e siècle, la science à l'époque de la Révolution française et enfin, le développement moderne des mathématiques.

Sur la pensée médiévale, à propos de l'exposé concernant « les étapes de la pensée scientifique » que je fis en 1935 au Centre de synthèse, P. Sergescu me présenta la remarque suivante: « Ne faudrait-il pas faire une place plus large au moyen âge dont P. Duhem nous a tracé des tableaux impressionnants ? Pour moi, cette période a une importance capitale dans l'évolution de la pensée scientifique. Les circonstances ayant au début du moyen âge détruit l'unité de la science grecque antique, il y eut deux tronçons séparés qui se sont cherchés sans parvenir à se rejoindre. L'un est l'École nominaliste de l'Université de Paris. Celle-ci a développé jusqu'à la perfection les méthodes déductives de la pensée scientifique (Jean de Murus, Grégoire de Rimini, Albert de Saxe, Jean Buridan). D'un autre côté se trouve l'Ecole italienne regardant surtout les faits sans trop développer les raisonnements. » [1]

Dans ses publications subséquentes, Sergescu revient à diverses reprises sur la question qui jusqu'à la fin de sa vie l'a préoccupé.

Dans l'étude « Pascal et la science de son temps » qui, au Palais de la découverte, inaugure en 1950 la série des conférences mensuelles consacrées à l'histoire des sciences, il souligne à

[1] Voir Arnold REYMOND, *Philosophie spiritualiste*, I, p. 318. Paris, Vrin, 1942.

nouveau que l'on ne saurait assez montrer l'importance du moyen âge dans le développement de la science actuelle.

Lors de la 18e Semaine de synthèse, octobre 1952, il est chargé d'exposer ses vues sur l'infiniment petit du moyen âge au XIXe siècle.

Il rappelle que l'unité de la Science grecque fut tragiquement brisée au début du moyen âge. Peut-être que l'apport légué par celui-ci a été de fournir à Paris, dans l'Ecole nominaliste, les moyens de raisonnement qui pouvaient mouler les faits que le second tronçon de la science, la science archimédienne, avait par les Arabes laissé subsister en partie dans la tradition italienne. Saint Thomas d'Aquin, par exemple, distingue entre l'infini créateur et l'infini créé.

En 1277, l'Eglise condamne les écrits physiques et mathématiques d'Aristote. Pierre l'Espagnol, devenu le pape Jean XXII, distingue l'infini en puissance (syncatégorique) et l'infini en acte (catégorique). Mais peut-on passer du premier au second, et comment ? Les discussions sur ce point préparent l'avènement du calcul différentiel et intégral.

Le dernier travail que Sergescu ait publié, *Revue d'histoire des sciences*, octobre-décembre 1954, est consacré à « Paul Tannery et la science médiévale ». Les recherches faites dans ce domaine par l'éminent historien portent surtout sur les Byzantins (par exemple, œuvre de Psellos concernant Diophante) et sur l'Occident latin (rôle important de Nicolas Chuquet). « Sans doute, dit Sergescu, le matériel recueilli à l'époque de Tannery était-il trop mince pour permettre de brosser une synthèse de la science du moyen âge, synthèse que devait présenter pour la première fois P. Duhem. En revanche, l'analyse de Tannery apporte des connaissances essentielles en vue de cette synthèse. »

* * *

Enfin, maintes allusions et précisions relatives à la science médiévale se trouvent dans les quelques ouvrages que Sergescu a publiés. Dans ces ouvrages, les développements historiques sont accompagnés de réflexions philosophiques sobres, mais judicieuses, que par sa double culture à la fois scientifique et littéraire Sergescu était remarquablement apte à présenter.

Le premier volume intitulé *Les sciences mathématiques* a paru en 1933, ainsi que je l'ai signalé plus haut.

Comme ce volume fait partie du tableau du XX^e siècle, les savants dont il parle sont pour la plupart des contemporains. Voici les titres des chapitres traités: I. L'héritage du XIX^e siècle — II. Henri Poincaré (belle caractéristique de son œuvre: fonctions fuchsiennes, analyse, géométrie, physique mathématique et mécanique céleste). — III. Analyse mathématique et théorie des fonctions. — IV. Géométrie et astronomie. — V. Mécanique et physique mathématique. — VI. Philosophie et histoire des mathématiques. — Index bibliographique.

Dans chaque chapitre sont cités les savants (accompagnés de leur photographie) qui ont le plus contribué à la création et au progrès de la branche des mathématiques qui est envisagée dans ce chapitre.

On ne peut qu'admirer la façon remarquable dont Sergescu remplit le programme qu'il s'est assigné. Il excelle à trouver l'expression ou l'image qui est la plus appropriée à faire comprendre son texte.

Par exemple (page 35): « Considérons une fonction (un effet) d'une variable (d'une cause). A chaque changement infiniment petit de la cause, correspond un changement, en général infiniment petit, de l'effet. »

De même, page 58: « Les équations différentielles ordinaires (1^re étape) servent à préciser la loi liant un effet à une cause; les équations aux dérivées partielles (2^e étape) étudient les lois liant un effet à plusieurs causes; mais parfois l'ensemble des causes, agissant sur un phénomène physique complexe, fait intervenir l'infini et le problème se complique et conduit aux équations fonctionnelles. »

En 1937, Sergescu collabore avec G. Bouligand et bien d'autres savants à un livre collectif intitulé: *L'Evolution des sciences physiques et mathématiques*.

Enfin, la collection « Esprit et nature » (Sedes, Paris, 1951) fait paraître une étude substantielle qui a pour titre *Coup d'œil sur les origines de la science exacte moderne*. « Le présent ouvrage, dit

Sergescu dans sa préface, se compose de deux parties extrêmement différentes. La première représente une série de quatorze causeries faites dans le cadre des émissions culturelles de la Radiodiffusion française. La deuxième partie est une bibliographie raisonnée des compléments nécessaires pour une connaissance plus approfondie des auteurs cités. »

Voici les titres des chapitres qui composent la première partie: I. Introduction. — II. L'héritage du monde antique et arabe. — III. Le problème de l'infini. — IV. Le problème du mouvement. — V. Le problème du système du monde. — VI. Les nouveaux outils intellectuels.

Ces six causeries résument et précisent la science grecque ancienne de la pensée médiévale.

Viennent ensuite: VII. Abandon des théories d'Aristote. Galilée. — VIII. Hésitations au début du XVII^e^ siècle. — IX. Deux attitudes modernes: Descartes et Pascal. — X. La théorie moderne de l'infini. Newton et Leibniz. — XI. Mécanique et astronomie modernes. Newton. — XII. Le XVIII^e^ siècle. Naissance de la géodésie. — XIII. Le XVIII^e^ siècle. Systématisation de la science moderne. — XIV. La chimie moderne. Lavoisier. — XV. Conclusions. — Index des noms. — Index des matières. — Notes bibliographiques.

L'index donne par ordre alphabétique les noms des auteurs et une brève analyse de leurs principaux ouvrages. Outre cet index des noms, se trouve un index explicatif de quelques termes techniques. Les notes bibliographiques indiquent les ouvrages surtout historiques que l'on peut consulter.

En conclusion, la science exacte moderne s'est précisée et systématisée par une étude constamment renouvelée des trois questions suivantes: le problème de l'infini, celui du mouvement et enfin le mystère relatif au système du monde.

A mesure que par l'expérimentation et la théorie une discipline scientifique a étendu son domaine, des branches nouvelles ont pris naissance et se sont développées sur cette discipline; d'autres, au contraire, s'en sont détachées. Par exemple, la logique et la psychologie faisaient partie de la philosophie; elles s'en sont séparées au XIX^e^ siècle et sont devenues des sciences autonomes.

Comme nous l'avons dit à propos de ses précédents ouvrages, Sergescu excelle à illustrer son texte par des comparaisons ingénieuses ou par des résumés de quelques lignes, très clairs et suggestifs. Par exemple, page 22: « La notion d'*infiniment grand* n'existe pas dans la science d'Aristote. Mais, en même temps, on y refuse l'existence des atomes, ce qui permet de concevoir la divisibilité à l'infini de la matière et, par conséquent, la notion d'*infiniment petit.* Or les deux infinis, le grand et le petit, sont des grandeurs réciproques. Il aurait fallu les accepter ou les rejeter tous les deux à la fois. Aristote n'a pas saisi la correspondance. » On pourrait citer bien d'autres passages semblables.

En conclusion on ne peut qu'admirer la variété, l'ingéniosité et l'exactitude des contributions que Sergescu est parvenu à fournir au milieu des soucis politiques et administratifs dont sa vie a été parsemée.

LA COMMUNAUTÉ DES SAVANTS

PAR

André LICHNEROWICZ, Paris

J'ai fait quelques conférences dans ma vie [1]. Mais dans presque toutes, j'avais le secours inestimable du tableau noir et du bâton de craie. Il s'agissait de mathématiques ou de physique, de sciences exactes et je n'avais à exorciser que de braves équations qui demeuraient fidèlement sur le tableau ou se transformaient conformément aux règles du ballet mathématique, mais ne nous posaient guère de problèmes de conscience.

C'est, croyez-moi, une étrange aventure pour un mathématicien d'être contraint de perdre la sécurité de son langage familier et d'être amené à se colleter avec certains des problèmes les plus graves que pose l'aventure présente de la société des humains. S'il y apporte quelque lourdeur et quelque maladresse, je suis sûr que vous voudrez bien les lui pardonner. Mais cette contrainte, que je subis avec un mélange de joie et de désespoir, est le signe d'une contrainte infiniment plus grave qui pèse sur la communauté des savants tout entière.

* * *

Mais qu'est-ce donc que ce savant dont je voudrais analyser la condition ? Est-il celui qui sait, qui connaît ou possède une certaine vérité ? La question même méconnaît toute la démarche de la science moderne. Celle-ci nous a appris que les vérités possédées sont des vérités mortes, dont les cadavres sont livrés

---

[1] Conférence faite à l'Université de Genève. Une conférence sur le même thème a été donnée, sous les auspices de la Maison des Sciences, à Paris.

aux enfants sous forme de manuels de l'enseignement secondaire, ou des vérités approximatives et en état de dépassement. Le domaine du savant n'est certes pas celui de la possession.

Pour l'homme du XVIII^e^ siècle, la notion de savant était claire et décrivait une certaine attitude d'esprit sur laquelle nous reviendrons. Mais en l'an de grâce 1955, notre vocabulaire est devenu confus et traduit la confusion de nos esprits; nous employons presque indifféremment les mots savant et technicien et le qualificatif de chercheur a surgi et a connu depuis quelque trente ans une fortune inespérée. Je connais même, dans telle rue de Paris, un institut de beauté qui s'intitule modestement « Institut de recherches esthétiques », titre qui m'a plongé dans une légitime perplexité.

Il y a quelque chose de sain dans cet accent mis sur la recherche, car l'esprit scientifique n'est pas esprit de possession mais esprit de recherche, d'approfondissement. Mais il est aussi générateur de confusions et ces confusions ne sont point innocentes. Qu'est-ce qui distingue donc un savant et un technicien, Lorentz et un grand ingénieur chef du laboratoire de recherches d'une firme électronique importante — je prends volontairement des exemples à grande échelle ? Tous deux ont été des chercheurs; nous avons redécouvert — et cela est vrai — que les procédés techniques de la recherche dite pure et ceux de la recherche dite appliquée sont indistinguables. Cependant nous sentons une différence fondamentale entre les attitudes d'esprit de ces deux hommes. En gros, si vous me permettez de parler presque brutalement, l'un peut trouver le couronnement de sa carrière à devenir dans sa firme directeur général, sans trahir véritablement sa vocation, l'autre pas. L'un appartient à une corporation hautement estimable et d'une grande utilité pour notre société, l'autre est membre d'une des rares communautés spirituelles qui existent en ce monde, la communauté des savants.

C'est peut-être cette distinction qui a été perdue de vue avec la notion de chercheur et c'est elle que je suis contraint de réaffirmer avec quelque raideur. Quelle est donc l'attitude d'esprit du savant ? Nous pouvons en bonne méthode l'examiner soit à travers les comportements du savant contemporain, soit à travers l'histoire de l'élaboration, au cours des siècles, de cette attitude humaine. Désirant parler de ce que je connais le moins mal, je me limiterai aux sciences exactes et aux quelques implications de ces sciences dans le domaine des sciences humaines.

* * *

Un savant est un homme qui participe activement à l'aventure scientifique, qui est un militant de l'aventure scientifique. Mais cette aventure est, par nature, une aventure collective et, pour y participer, le savant a dû faire certains vœux et pratiquer une certaine ascèse. Ascétisme intellectuel mais aussi ascétisme moral indissolublement mêlés. Si l'accent est généralement mis sur le premier, le second non moins important est maintenant souvent remis en question pour des raisons que nous étudierons.

Ce n'est pas le lieu ici de décrire le savant au travail et d'analyser les disciplines qu'il s'est imposées et qui doivent simultanément favoriser l'éclosion d'un certain type d'imagination et assurer le contrôle et la rigueur: cette nécessité de l'ouverture d'esprit, d'un esprit prêt à accueillir tout ce qui survient avec une volonté délibérée d'attention et cet impitoyable esprit critique destiné, en écartant toute spéculation confuse, à tresser les matériaux scientifiques en un réseau contraignant et communicable à quiconque prend la peine de l'étudier. Cette absence de respect, dans le domaine scientifique, pour toute pensée extérieure qui serait limitative et en même temps cette volonté de clarté totale qui sacrifie sans regret tout ce qui est encore trouble ou trop complexe.

Mais ces disciplines impliquent et imposent des choix moraux. Comment garder à son esprit sa pleine disponibilité si l'on vise avant toute chose l'application et l'application techniquement payante ? Comment lui assurer sa maîtrise de soi, s'il s'incline dans son domaine, devant des pouvoirs ou devant des pensées religieuses ou philosophiques extérieures ? La volonté d'autonomie, le désintéressement à l'égard des applications doivent être, en des sens que je préciserai, des éléments fondamentaux de l'attitude d'esprit du savant.

Il est enfin pour le savant des pièges plus subtils auxquels nous succombons tous, peu ou prou. Le savant a voué sa vie à la recherche, mais il est bien rare qu'au cours des années l'étincelle jaillisse continûment. Dans un carnet scientifique de Pasteur, on trouve en note marginale: « En somme rien depuis deux ans », et cette simple note traduit l'angoisse, normale chez tout savant, de savoir si l'étincelle s'est définitivement arrêtée ou si la grâce de créer de la science lui sera encore accordée. C'est pourquoi être chercheur, au vrai sens du terme, n'est pas un métier, ou alors c'est le pire des métiers. A côté de sa recherche, le savant exerce généralement un vrai métier, un métier rassurant: il est professeur dans quelque université ou administre un laboratoire. Mais il arrive que ce métier dévore chez lui le chercheur ou qu'inversement le savant cherche, dans son métier, un alibi.

Quoi qu'il en soit, après des années de travail, il a apporté à l'œuvre commune une contribution dont nul mieux que lui ne sait combien elle est limitée, imbriquée dans tout l'effort d'une génération et ne valant que par le travail séculaire des hommes de science. Cette contribution, modeste ou notable, a d'ailleurs au fur et à mesure cessé de l'intéresser: « ce n'était pas difficile puisque cela a été fait », et il n'en tire, au fond de lui-même nulle gloire: l'aventure qui se joue dépasse largement le stade des petits bilans personnels.

Il a vécu, quelques années ou une vie, l'esprit de la conquête scientifique, il a participé à l'œuvre de la communauté des savants et c'est là son véritable honneur.

* * *

Cette attitude d'esprit, dont nous voyons le surgissement dans notre temps, s'est lentement élaborée au cours des siècles et c'est peut-être la science qui a enseigné à la société des humains ce qu'est la probité intellectuelle.

La science grecque a commencé à nous enseigner la rigueur du discours, une rigueur que nous avons peu à peu resserrée jusqu'aux limites de l'axiomatique contemporaine, jusqu'à pouvoir raisonner sans paralogisme sur les ensembles infinis et bâtir avec eux nos mathématiques. Mais il a fallu de longs et pénibles efforts à la science moderne pour apprendre à dominer certains aspects de ce que nous nommons le réel, en l'interrogeant à l'aide d'expériences privilégiées et en l'enserrant au moyen de nouveaux instruments de mathématification. La théorie physique contemporaine, tentative de déduction mathématique totale d'une large classe de phénomènes, mais dont seul le contrôle expérimental le plus strict assure qu'elle n'est pas une théorie vaine, la théorie de quelque monde imaginaire, apparaît comme symbolisant la réussite même de l'ambition scientifique.

Mais avec la notion de *données* expérimentales, avec l'importance et l'abondance des expériences privilégiées, il était apparu quelque chose de nouveau dans la démarche scientifique. Alors qu'en principe le mathématicien peut toujours vérifier la démonstration d'un autre mathématicien et qu'en fait, il se livre souvent à cet exercice, le physicien utilise des données expérimentales, c'est-à-dire les résultats de beaucoup d'expériences qu'il n'a ni le temps, ni les moyens matériels de refaire. Il se fie aux travaux des autres, il est condamné à avoir confiance dans les membres de sa communauté pour pouvoir pousser outre, à penser qu'ils ont dit la vérité et toute la vérité. La probité des comptes rendus d'expériences impose toutes les probités et d'abord interdit le secret qui est aussi une atteinte à l'économie de moyens de la science.

C'est avec la science expérimentale qu'apparaît complètement ce que nous nommons la communauté des savants, une communauté encore bien peu nombreuse — la France, grand pays scientifique du XVIII^e^ siècle, ne contenait que quelques dizaines de savants — mais dès son apparition son idéal se révèle très haut.

La pensée scientifique se veut totalement autonome, mais au grand jour, et elle fuit l'ésotérisme dans lequel elle s'était parfois réfugiée dans le passé. Tout le travail accompli doit être rendu public, afin de permettre à chacun, en toute liberté, d'entrer dans la communauté ou d'utiliser en dehors d'elle les résultats acquis. Les défis et secrets des siècles précédents sont regardés comme enfantins et blâmables. A travers les différents pays, universités et académies assurent, avec la bienveillance de tous, la liberté de la recherche et celle de la diffusion des résultats. Les guerres n'arrêtent point ces échanges et, dès le XVII^{e} siècle, on voit Huyghens venir siéger à l'Académie des sciences de Paris, en plein conflit de la France avec les Hollandais, sans que Français ni Hollandais ou Espagnols y trouvent quoi que ce soit à redire.

Il est vrai que les applications, bénéfiques ou maléfiques, de cette science qui naît sont encore à peu près exclusivement du domaine des espérances. Mais déjà la conscience scientifique les pressent et, avec un optimisme candide, juge qu'elles seront généralement bonnes. Il lui faudra bien longtemps pour sortir decette vue optimiste et elle ne parviendra pas à se sentir quelque responsabilité dans le processus de prolétarisation consécutif, en Angleterre et en France, à la première révolution industrielle.

Cependant, devant ce blé en herbe des applications, la réaction de la conscience scientifique est formelle: le savant doit rester désintéressé, désintéressé dans ses buts de recherche et désintéressé dans sa personne. C'est à d'autres que lui d'assumer la grande tâche des applications et des avantages matériels durement conquis pour tous, de mettre patiemment au point de difficiles et secrets procédés de fabrication. Le savant ne doit rien avoir à faire avec le secret, mais son désintéressement ne signifie pas qu'il doive être totalement inattentif aux conséquences de ses travaux pour la société des humains.

On ignore d'ailleurs à quoi peut servir cette attention recommandée, mais comme les conséquences ne peuvent être que bonnes à longue échéance, tout est pour le mieux.

Tel est, tracé à grands traits, ce qu'on pourrait nommer l'idéal classique de la science.

* * *

C'est cet idéal plein d'une sagesse tout antique que nous sommes amenés douloureusement à remettre en question. Qu'est-il arrivé ? La science a rencontré sur sa route les pouvoirs. Des transformations si profondes de la société des humains qu'elle a suscitées ou permises, la conscience scientifique a été l'une des plus notables victimes.

Depuis un siècle, notre univers quotidien s'est profondément transformé, a fait explosion, dans tous les sens du terme, cela, nous le savons tous. Cet univers scientifique et technique qui est le nôtre nous apparaît de plus en plus comme un univers fabriqué, un univers artificiel qui nous sert à la fois de couveuse et d'instrument, un univers qui peut se détraquer et que nous nous sentons même capables de casser dans un moment de délire collectif. Le front d'onde de l'expansion humaine se meut maintenant si vite et est générateur de telles distorsions qu'il ne semble plus permis de laisser à la lente éducation de nouvelles générations le soin de conditionner la société des humains à ce monde sans cesse refaçonné. Nous rencontrons là sans doute l'une des raisons pour lesquelles cet univers pourtant humain nous apparaît comme artificiel, comme dangereusement autre. Nous sommes tous et sans cesse surpris par l'événement.

Cet univers est autre par sa substance, par ses structures et il oblige chacun de nous, au cours de sa vie, à la recherche pénible d'un nouvel état d'équilibre, souvent remis en question, à la recherche de nouveaux réflexes économiques comme de nouveaux schèmes de pensée pour appréhender ce réel mouvant.

Du monde encore pesant et maladroit de la première révolution industrielle, monde fait de fonte et d'acier et auquel la machine à vapeur, avec son régulateur grossier, conférait quelque autonomie, nous sommes en train de faire un monde léger et savamment réglé, fait d'aciers spéciaux, d'aluminium ou de magnésium, de verre et de matières plastiques, riche d'énormes quantités d'énergie — nous sommes en train de revendiquer l'énergie solaire comme l'énergie atomique — et aux comportements subtilement contrôlés par l'électronique.

Dans ce monde les sources de richesses ont été profondément modifiées et les distorsions sont plus graves que jamais. Certains peuples vivent, à peu près sans matières premières, du revenu de leur science et de leur technique incarnées dans des industries de haute précision; d'autres, que les circonstances historiques ont placés en dehors du grand courant de l'expansion scientifique, s'efforcent à produire des matières premières brutes pour subsister; ce sont les peuples dits sous-développés qui sont avant tout, comme l'a montré M. André Mayer, des peuples sous-alimentés, avec cette circonstance aggravante qu'ayant souvent bénéficié, pour une part, des progrès mondiaux de la médecine, ils présentent une expansion démographique démesurée par rapport à leurs ressources propres restées presque stationnaires.

Ce monde qui est le nôtre, avec ses prestiges et ses maléfices bien apparents, il ne nous est pas permis de le refuser. Chanter les louanges d'un monde révolu et brandir sur le nôtre l'anathème sont des activités pour mandarins irresponsables. Il ne nous est pas permis de condamner à mort ces vieillards que nous avons sauvés « artificiellement », ces enfants, toujours plus nombreux, préservés des épidémies. Il nous faut trouver aux premiers un but dans la vie et ne pas les abandonner dans le désert d'une vieillesse inutile, il nous faut nourrir les uns et les autres, et nous rêvons déjà du jour où, à grands coups d'énergie solaire, nous pourrons fabriquer directement des aliments sans passer par les techniques trop lentes de l'agriculture. Au premier rang des préoccupations de tous les grands pays scientifiques figurent, nous le savons, la photochimie, la photosynthèse. Déjà, jalons sur la voie d'une solution, quelques « usines d'algues » fonctionnent dans le monde. Des distorsions d'un univers scientifique, nous nous efforçons de sortir par plus de science et une science plus consciente d'elle-même.

Un autre aspect du problème doit être signalé: la science est outil de prévision et toute une branche de la science contemporaine s'efforce même, à l'aide des techniques de la statistique et de la théorie des jeux, d'élaborer des instruments précis de prévision des phénomènes économiques ou, plus généralement, de phénomènes sociaux, essaye de préparer une technique des décisions rationnelles en matière de conduite humaine. Une telle science est, par nature, source de puissance et de richesse et elle l'est déjà en fait dans ses quelques rares réalisations. Mais cette science qui se crée et balbutie encore ne peut ambitionner que la décision basée sur la prévision à court terme, quelques années peut-être. Au-delà, la recherche scientifique elle-même qui se révèle comme le plus redoutable facteur d'instabilité de notre monde, s'oppose à toute prévision valable: sur vingt ans, il nous est impossible de présumer avec succès les résultats de notre travail.

* * *

La science a donc rencontré les pouvoirs dans les conséquences matérielles de ses résultats et même dans certains de ses buts de recherche. Elle a brusquement éprouvé le poids de ses responsabilités devant la société des humains. Enfin il lui a été révélé qu'elle avait besoin des pouvoirs dans sa tâche, même la plus classique, et que l'idéal du XVIII^e^ siècle devait être remis en question non pour des raisons de rapports de force, mais pour le bien, pour la survie de la science elle-même.

L'appareillage expérimental primitif était tout artisanal et le savant lui-même, aidé de quelque serrurier ou mécanicien, suffisait à sa réalisation. Il était alors permis de minimiser le rôle d'une industrie encore dans les limbes. Mais la recherche scientifique repose désormais sur l'usine, utilise l'acquis de la science non seulement directement, mais indirectement à travers son incarnation dans des réalisations industrielles. Il y a choc en retour sur le savant de ces applications laissées à d'autres. Un grand laboratoire de recherches contemporain a les dimensions, l'outillage, le personnel et jusqu'à certaines des méthodes d'une véritable usine, héritière d'autres usines et, dans certains domaines, en physique nucléaire par exemple, un seul appareil est déjà une énorme machine groupant autour d'elle savants et techniciens par dizaines et nécessitant pour sa pleine utilisation des laboratoires annexes dont chacun eût fait la joie d'un physicien il y a trente ans.

L'activité scientifique passe, dans de larges domaines, à l'échelle industrielle la plus élevée et bien des savants, nos contemporains, sont atterrés et ne parviennent pas à saisir l'énormité des moyens nécessaires.

La science n'est plus cette activité de luxe pour gens sérieux qu'elle fut au XVIII^e^ siècle, elle intéresse et inquiète terriblement les pouvoirs et est conduite à leur demander des moyens matériels qui ne sont plus ceux qui conviennent à l'encouragement des arts d'agrément, mais ceux qui correspondent, pour une nation, à un investissement vital. Le scientifique et le financier se trouvent tous deux contraints au dialogue, un dialogue plein d'ambiguïtés.

* * *

Ce sont certaines de ces ambiguïtés du dialogue des pouvoirs avec la communauté des savants que je voudrais analyser brièvement. Chacun y a, sans doute, une bonne conscience et quelques mauvaises pensées.

Il aurait fallu aux pouvoirs, aux intérêts privés comme à l'Etat, une vue singulièrement élevée pour comprendre spontanément l'idéal scientifique. Tant que la science était, si j'ose dire, un art d'agrément, passe encore. Mais il s'agit maintenant de choses sérieuses, de gagner des batailles économiques ou des batailles tout court, d'investir des sommes considérables, détournées de la collectivité vers des recherches, il s'agit de choses sans aucun doute infiniment trop sérieuses pour les laisser aux mains des savants.

Les pouvoirs sentent confusément que, pour l'exercice de leur mission, ils n'ont pas besoin de savants, mais en fait de techniciens, ou, si vous préférez, de chercheurs au sens moderne du terme. Il faut laïciser ces clercs. Les pouvoirs ont, par nature, le choix des décisions et les responsabilités; aux techniciens employés d'assurer la réalisation des objectifs, l'accomplissement du plan, sans se poser de problèmes graves. L'avance — scientifique ou technique, peu importe, — obtenue dans un domaine doit être conservée et le secret la couvrira. Aux savants proprement dits, à ceux qui persistent, sera permise une certaine activité marginale; ils seront aussi utilisés à former des techniciens. Telle est, partout dans le monde, la démarche naturelle de pensée de dirigeants qui ne peuvent, à cause de leur expérience propre, que méconnaître l'idéal scientifique.

Le secret, en matière scientifique, a fait sa réapparition et nous voyons en effet cet idéal méconnu dans les grandes choses comme dans les petites. Les grandes sont trop connues pour que j'y revienne, mais les petites peuvent servir de signes. Tel dirigeant d'entreprise privée comprend mal pourquoi un géologue de mes amis, lui ayant fourni un renseignement précieux, refuse toute compensation personnelle, tel homme politique pourquoi un autre savant refuse de diriger un trop grand organisme de recherche de peur de devenir un directeur et de ne plus être un chercheur. L'Unesco elle-même a récemment essayé de définir et d'étudier un droit de propriété scientifique, un droit du savant, et s'est gravement demandé s'il s'agissait d'un droit de création ou d'un droit de découverte. La réponse que j'ai été amené à donner à ses demandes était la suivante: « Il ne peut y avoir de droit personnel de propriété scientifique, mais seulement peut-être un droit collectif qui appartient à la communauté des savants. Le savant est par définition celui qui ne revendique pas de propriété personnelle sur les résultats de ses travaux, mais les livre librement à tous. S'il désirait se réserver une part d'avantages matériels, il n'avait qu'à prendre un brevet. Si vous êtes amenés à reconnaître un droit collectif, ce choix ne peut être qu'un droit moral à moins que vous ne considériez comme contre-partie les moyens mis à la disposition de la recherche scientifique. » La plupart des savants consultés ont répondu dans le même sens, mais ce point de vue n'a pas paru satisfaisant aux juristes. Il est cependant le seul conforme à la vocation du savant.

Ce que je viens de dire des pouvoirs est, naturellement, un peu caricatural, mais la caricature a du vrai. Il faut aussi noter que les pouvoirs sont, par nature, techniquement incompétents; en fait ils sont amenés, dans la plupart des cas, à suivre les suggestions de leurs techniciens, de leurs experts ou se trouvent pris dans des batailles de techniciens sans véritables possibilités d'arbitrage. Mais dans beaucoup de ces techniciens, le microbe du savant est présent.

* * *

La communauté scientifique a donc dû, tout récemment, affronter les problèmes nouveaux de ses rapports avec la société. Elle y était fort peu préparée et montrait peu de goût pour cette remise en question pour laquelle elle ne se sentait point armée. Peu de savants semblaient disposés à réfléchir sur ces problèmes, des tâches strictement scientifiques leur paraissant plus urgentes.

Mais personne n'était là pour se substituer à eux. Il est curieux et attristant de constater combien l'aventure scientifique intéresse peu la pensée philosophique de notre temps. Ni Husserl, ni Jaspers, ni Sartre n'ont apporté de vues valables sur la science. Le monde du labeur scientifique où nous baignons leur demeure comme fermé, et aucun d'entre eux n'a entrepris de dégager patiemment et honnêtement la philosophie implicite qui est au cœur de la pensée scientifique. Mais, en vérité, c'était aux savants d'abord à réfléchir sur leurs propres problèmes. Nulle aide ne peut leur venir de l'extérieur.

Pendant longtemps, ils s'étaient bornés soit à manifester une candide fierté de thaumaturges involontaires, soit à se réfugier, s'ils étaient mécontents, dans quelque doctrine politique préfabriquée, soit à expliquer leur parfait accord avec les dirigeants: ils ne prétendaient assumer aucune responsabilité dans cette histoire sombre et impure et ne désiraient pas se salir les mains.

Auprès des financiers au contraire, ils tentaient de se justifier par leur utilité directe et expliquaient longuement que si la recherche libre, spontanée, diminuait ou disparaissait, la recherche dirigée, appliquée, planifiée s'étiolerait très vite et perdrait la plus grande part de son pouvoir de renouvellement, ce qui est certainement vrai.

Les pouvoirs claironnaient: un savant ne doit pas « faire de politique » et beaucoup de savants s'enorgueillissaient en effet de « ne pas faire de politique » et prétendaient vaguement négocier leur abstention contre des moyens matériels de recherche mis à leur disposition, alors que d'autres, en quête d'évasion, se précipitaient tête baissée, souvent avec générosité, dans une action politique et se retrouvaient pris dans les rêts de quelque faction qui les utilisait comme mages.

Beaucoup de savants se sont cependant trouvés las de ces positions également inconfortables, également ascientifiques, las soit de jouer au bateleur de foires, soit d'arborer une bonne conscience qui émanait du ponce-pilatisme le moins noble. Ni le rôle d'homme prophétique ni celui d'académicien inoffensif ne sied au savant. Quant à l'objection de conscience individuelle, elle n'est qu'une attitude enfantine et qui dissimule encore uu ponce-pilatisme.

Prise dans le tourbillon de l'offensive des pouvoirs, la communauté scientifique a failli perdre, de la manière la moins honorable, son autonomie et a dû, pour survivre, faire face et réfléchir. Ce n'est certes pas un hasard si, dans le monde, les réunions de savants portant sur ces problèmes se multiplient, si les journaux scientifiques leur font écho. A la suite de longues discussions certaines grandes sociétés scientifiques nationales ou internationales ont interdit à leurs membres de participer à toute réunion scientifique dans quelques universités dont les dirigeants avaient méconnu les libertés des savants, et cette excommunication publique s'est révélée un mode de pression remarquablement efficace.

Dans l'héritage de l'idéal classique de la science, il est une part inaltérable sans laquelle il n'y a plus de communauté scientifique vivante, mais un syndicat de manœuvres qualifiés qui irait vite se sclérosant et, à travers vents et marées, notre communauté réaffirme cette part faite de loyauté dans la discussion, de liberté de la recherche et de la communication, de désintéressement à l'égard des avantages matériels. Mais cet héritage s'est alourdi: des devoirs nouveaux envers la société des humains sont apparus.

Cette communauté scientifique est en train de prendre conscience d'elle-même en tant que communauté sociale qui défend, non les intérêts matériels de ses membres, mais une volonté morale commune, qui doit préserver l'intégrité de la conscience scientifique. Elle sait qu'elle doit veiller désormais d'une manière active aux conséquences humaines de l'œuvre scientifique et s'efforcer de réfléchir sur ces conséquences et de les prévoir avec toutes les ressources de l'imagination critique de ses membres.

Elle doit non plus seulement enseigner la science, mais *informer* la société des implications sociales de ses résultats, communiquer ses espoirs et ses craintes, dégager pour tous l'esprit de son travail. L'information scientifique est peut-être devenue le premier des devoirs nouveaux du savant, mais une information faite avec la même probité intellectuelle que la science elle-même et qui ne contribue pas à parer du prestige de la science des préférences philosophiques personnelles, une information qui élabore les éléments d'une culture scientifique authentique.

La communauté des savants doit ainsi travailler, dans un monde de plus en plus technifié, à permettre les options claires, à conserver à chacun une possibilité véritable de contrôle, de choix, un choix qui ne soit pas une capitulation devant la publicité, la propagande ou l'autorité qui s'affirme compétente. Elle sait qu'elle doit augmenter son influence dans le monde, détacher des ambassadeurs auprès des puissants et leur faire sentir sa force, non par appétit de pouvoir, mais par souci d'assumer, en fait, et non formellement, la part de responsabilités qui est la sienne.

Ce sont de bien lourdes tâches que celles que désormais la communauté des savants doit accomplir en même temps que son œuvre proprement scientifique. Je pense qu'elle s'en montrera digne.

LES MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES DANS L'ANTIQUITÉ

Conférence donnée le 17 septembre 1954
dans la petite aula de l'Université de Helsinki

PAR

B. L. VAN DER WAERDEN, Zurich

---

1. LE TUNNEL DE SAMOS.

Nous ne savons malheureusement que très peu de choses sur les origines de la mathématique grecque. On raconte que Thalès l'a introduite de l'Egypte et que Pythagore l'a élevée au rang d'une science pure; mais nous ignorons quelle part de vérité cette tradition tardive contient. Le plus ancien fragment mathématique conservé est celui de la quadrature des lunules d'Hypocrate de Chios [1], qui a vécu plus d'un siècle après Thalès et Pythagore. Ce fragment témoigne que les mathématiques étaient déjà fort développées et qu'elles étaient en possession de définitions, de constructions et de démonstrations exactes. Il ne nous renseigne pas sur les origines. On pourrait toutefois espérer d'obtenir quelques renseignements sur l'état des mathématiques en observant l'architecture de l'époque. Le majestueux temple d'Ephèse était célèbre et regardé comme une des sept merveilles du monde. La construction d'un tel édifice n'exigeait-elle pas un calcul mathématique ?

Une pareille conclusion serait cependant imprudente. On peut, sans mathématique, ériger de grands et solides bâtiments.

---

[1] Voir F. RUDIO, *Der Bericht des Simplicius über die Quadraturen des Antiphon und des Hippokrates*, Leipzig, 1907.

La preuve en est donnée par les constructions romaines. Dans son ouvrage *De Architectura* Vitruve, architecte romain du temps d'Auguste, nous décrit la construction d'un portique; les mathématiques n'y jouent pas de rôle.

Il existe pourtant une construction qui nous donne quelques vues sur les mathématiques appliquées de l'antiquité. C'est l'aqueduc construit au travers du mont Kastro sur l'ordre du tyran Polycrate de Samos vers 530 av. J.-C. Hérodote le décrit comme suit au livre 3, chapitre 60, de ses *Histoires*.

« Je me suis étendu davantage sur le cas des Samiens, parce que c'est chez eux qu'ont été exécutés trois ouvrages les plus grands qu'il y ait chez tous les Grecs: dans une colline dont la hauteur atteint 150 orgyes, un tunnel qui commence au pied et a une ouverture sur chaque versant; la longueur en est de 7 stades, la hauteur et la largeur chacune de 8 pieds; d'un bout à l'autre du tunnel est creusé un autre canal profond de 20 coudées et large de 3 pieds, à travers lequel l'eau amenée par des tuyaux, est conduite jusqu'en ville, venant d'une grande fontaine; l'architecte de ce tunnel a été le Mégarien Eupalinos, fils de Naustrophos. »

Au cours des fouilles qu'ils effectuèrent en 1882 dans l'île de Samos, les archéologues allemands trouvèrent ce tunnel, tel qu'Hérodote l'avait décrit, d'un kilomètre de long et de 2 mètres de haut et de large. Un canal profond de 2 mètres à l'une de ses extrémités et de 8 mètres à l'autre, y était creusé. Il est fort probable que ce canal fut fait après coup, parce que la pente d'abord prévue s'était révélée insuffisante [1].

Mais, ce qui nous importe surtout est le fait que le tunnel fut percé à ses deux extrémités. Les deux galeries se rencontrent au milieu avec une erreur de moins de 10 mètres latéralement et de 3 mètres en hauteur.

Ce résultat est grandiose. Le roi de Judée Hiskia (environ 700 av. J.-C., donc 170 ans avant Eupalinos) avait aussi fait percer un aqueduc à travers un rocher non loin de Jérusalem. La distance des deux extrémités n'était que de 325 mètres, mais le tunnel fut percé en zigzag et sa longueur devint presque deux

---

[1] E. FABRICIUS, *Mitteilungen des deutschen archäol. Inst. Athen*, 9 (1884), S. 165.

fois plus longue [1]. La direction avait été contrôlée et corrigée à l'aide de trous percés du haut du rocher.

Le tunnel d'Eupalinos est rectiligne. Il a donc dû avoir le moyen de déterminer très exactement la direction des deux galeries. Quelle méthode a-t-il pu employer ?

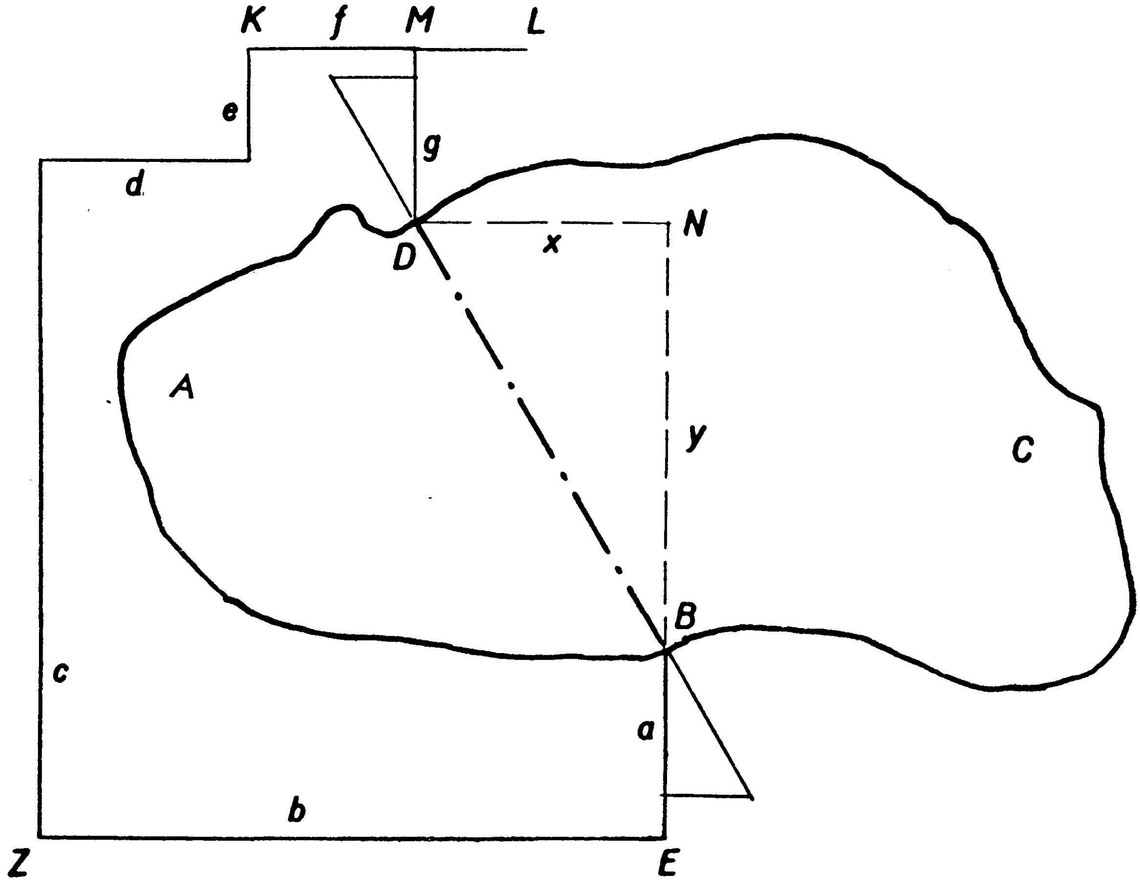

Fig. 1

Une méthode appropriée est donnée par Héron d'Alexandrie. Héron enseignait vers l'an 60 après J.-C. les mathématiques appliquées et la mécanique à Alexandrie [2]. Il décrit dans son livre *Dioptra* un instrument appelé dioptre, formé d'une colonne verticale portant un disque circulaire horizontal centré sur elle. Le disque peut tourner autour de son centre; deux plaques, percées de trous placés exactement à la même hauteur, sont montées sur lui. Cet instrument permet de mesurer les différences de hauteur: on déplace des jalons verticaux d'un endroit à un

[1] CONDER *The Siloam Tunnel*, Palestine Exploration Fund Quarterly Statement, 1882. Voir de même: 2 Chron., 32.30.

[2] Pour les dates voir O. NEUGEBAUER, *Kgl. Danske Vid. Selsk. Hist.-fil. Meddel*, 26, Nr. 2 (1938).

autre et on vise ces jalons à l'aide du dioptre, comme on le fait encore aujourd'hui. On peut aussi mesurer à l'aide du dioptre des angles dans le plan horizontal et en particulier reporter des angles droits.

Après avoir expliqué l'emploi du dioptre, Héron pose le problème suivant: « Percer dans une colline ABC un tunnel rectiligne dont les extrémités B et D sont données. » Pour le résoudre, il porte dans le plan à partir du point B un segment rectiligne arbitraire BE, il construit ensuite à l'aide du dioptre un second segment EZ perpendiculaire à BE et il continue ainsi, toujours à l'angle droit, jusqu'au segment KL. Il place ensuite le dioptre sur la droite KL au point M tel que l'extrémité D du tunnel soit vue à angle droit. Les segments a, b, c, d, e, f, g peuvent être mesurés dans le plan. Pour trouver la direction du tunnel, Héron prolonge en pensée EB à l'intérieur de la colline et mène la perpendiculaire DN à DM. Soient DN $= x$ et BN les côtés de l'angle droit du triangle rectangle BDN. Il est alors évident que

$$x = b - d - f$$
$$y = c + e - a - g$$

Le rapport des côtés de l'angle droit est donc connu. Soit, par exemple, ce rapport égal à 1: 5, dit Héron. On construit alors sur BE et DM deux triangles rectangles ayant le même rapport des côtés de l'angle droit et on sait comment il faut percer. « Si on creuse le tunnel de cette manière, les ouvriers se rencontreront », dit Héron.

Il est possible qu'Eupalinos ait appliqué cette méthode. Pour la trouver, il fallait une idée géniale mais pour reconnaître son exactitude on n'a pas besoin d'avoir de grandes connaissances en géométrie: le bon sens suffit.

2. Perspective.

Lorsque vers 450 les tragédies d'Eschyle furent jouées à Athènes, un certain Agatharchos construisit pour les représentations des coulisses à effet perspectif. D'après Vitruve, il aurait écrit un traité sur ce sujet. « A sa suite Démocrite et Anaxagore ont écrit sur la même chose, à savoir comment, ayant choisi un certain point comme centre, il faut faire correspondre les lignes dans le rapport naturel de la direction du regard et de l'extension des rayons, afin que certaines images peintes sur les coulisses simulent des bâtiments et que quelques parties dessinées sur les avant-plans paraissent plus éloignées et d'autres plus rapprochées. »

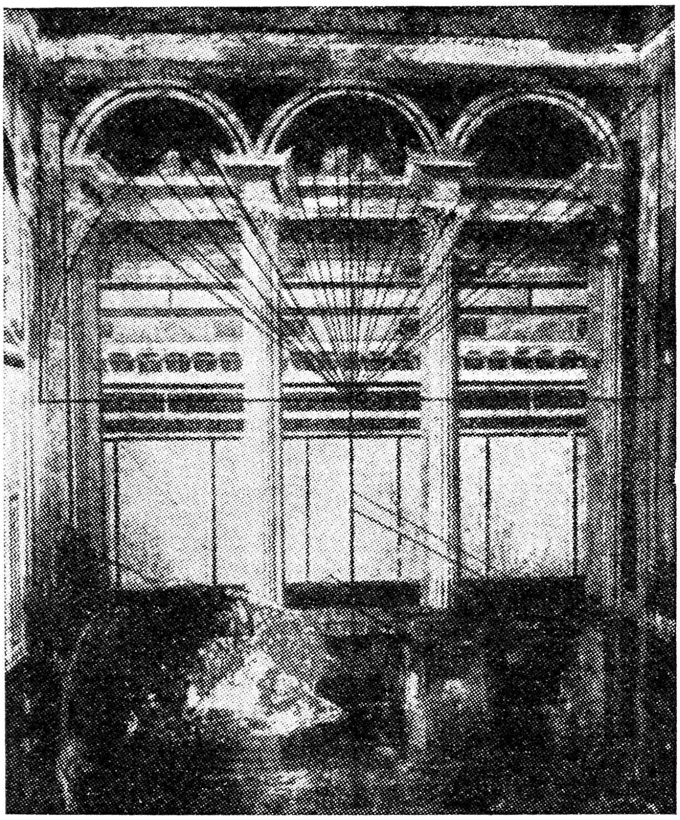

Tableau I

Des expressions comme « direction du regard » et « extension des rayons » dont Vitruve se sert se retrouvent dans les écrits grecs d'Euclide et de Ptolémée sur l'optique. Il y est question de rayons visuels qui vont de l'œil aux objets. Le « certain point qui est choisi comme centre » dont Vitruve parle est probablement la position de l'œil. Le traité d'Agatharchos contenait sans doute des règles pratiques sur la manière de réaliser la perspective sur les coulisses. D'autre part, il faut croire que Démocrite et Anaxagore, qui étaient des savants notoires, ne se sont pas contentés de connaître ces règles pratiques, mais qu'ils en ont donné une justification théorique basée sur les « rayons visuels » partant de l'œil.

Il est étonnant que les Grecs aient regardés les rayons visuels qui partent de l'œil comme une réalité physique au même titre que les rayons lumineux. Nous tâtons pour ainsi dire les objets avec nos rayons visuels. Nous apercevons une chose lorsqu'un rayon visuel rencontre sur sa surface un rayon lumineux partant de la source de la lumière. Voir à ce sujet A. LEJEUNE, *Euclide et Ptolémée, deux stades de l'optique géométrique grecque*, Louvain, 1948.

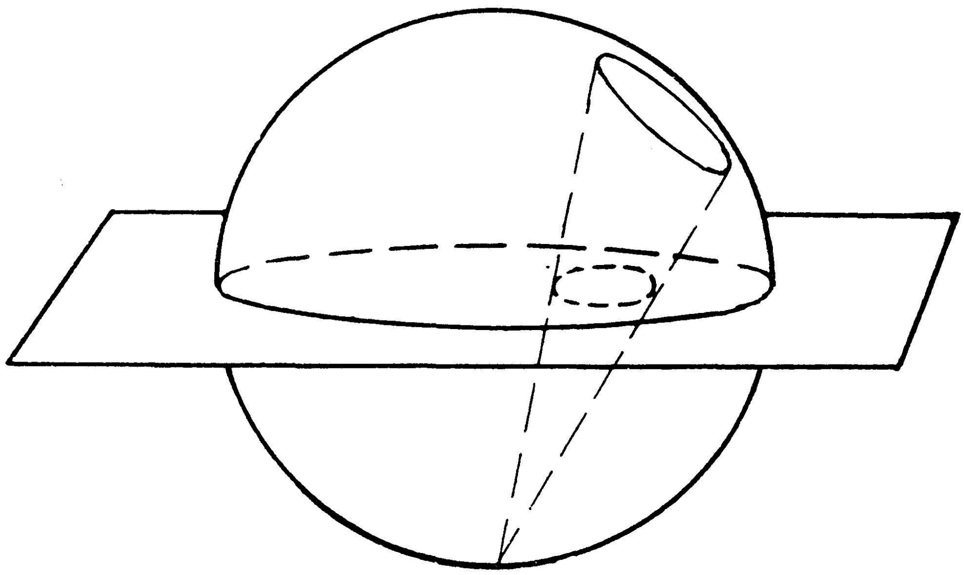

Fig. 2

Vitruve désigne du nom de skénographie la science de la perspective; il témoigne par là une fois de plus que l'origine de cette science est à chercher dans la peinture des décors de théâtre.

On a trouvé à Pompéi des peintures murales exécutées suivant les règles de la perspective. Les prolongements des droites qui paraissent s'éloigner convergent vers un point (tableau I). Ceux qui les ont peintes étaient des contemporains de Vitruve; leur manière de peindre perspective venait probablement de celle des scènes théâtrales grecques.

3. LA PROJECTION STÉRÉOGRAPHIQUE.

La projection stéréographique est une représentation de la surface d'une sphère dans le plan qui s'apparente à la perspective. C'est une projection centrale de la surface sphérique sur le plan équatorial à partir du pôle Sud S (fig. 2). La propriété principale de la projection stéréographique est: *la projection d'un cercle est un cercle.*

Cette proposition est aisée à démontrer en s'appuyant sur le théorème 5 du premier livre d'Apollonius sur les coniques, qui dit que certaines sections d'un cône circulaire oblique sont aussi des cercles. Pour formuler le plus simplement la condition de ce théorème, prenons comme plan du tableau (fig. 3) le plan

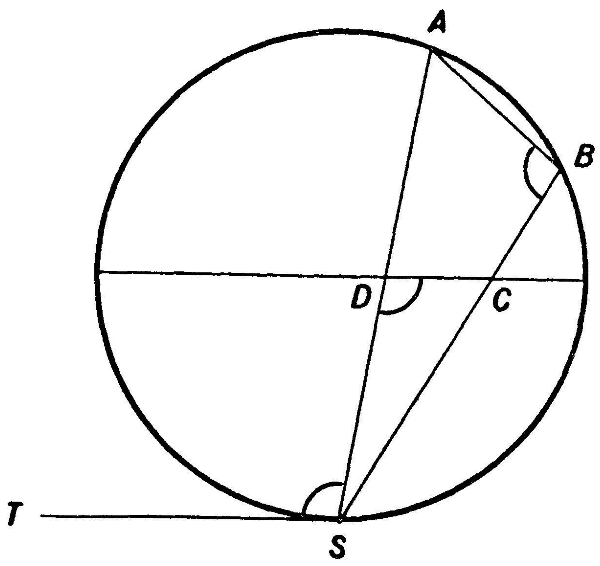

Fig. 3

de symétrie de la figure, c'est-à-dire le plan passant par les pôles Nord et Sud et le centre du cercle. Le plan du cercle donné coupe le plan du tableau suivant le diamètre AB. De même, le plan équatorial coupe le plan du tableau suivant CD. Ces deux plans sont perpendiculaires au plan du tableau. Le cercle de diamètre AB est projeté à partir de S suivant un cône circulaire oblique. Le théorème d'Apollonius dit alors: la section de ce cône par le plan CD est encore un cercle si les angles ABS et CDS sont égaux.

Dans notre cas, le cercle AB étant situé sur la sphère, la condition d'Apollonius est satisfaite. En effet, si on mène par le point S une tangente ST parallèle à CD, l'angle CDS est égal à l'angle DST qui est inscrit dans le même segment circulaire que l'angle ABS. Donc CDS = DST = ABS.

Il résulte donc du théorème d'Apollonius que la section du cône par le plan équatorial est un cercle, c'est-à-dire que la projection stéréographique d'un cercle est un cercle.

Le célèbre astronome Ptolémée traite de la méthode de la projection stéréographique dans son *Planisphaerium*, mais son prédécesseur Hipparque (130 av. J.-C.) en avait déjà parlé dans un traité qui a disparu.

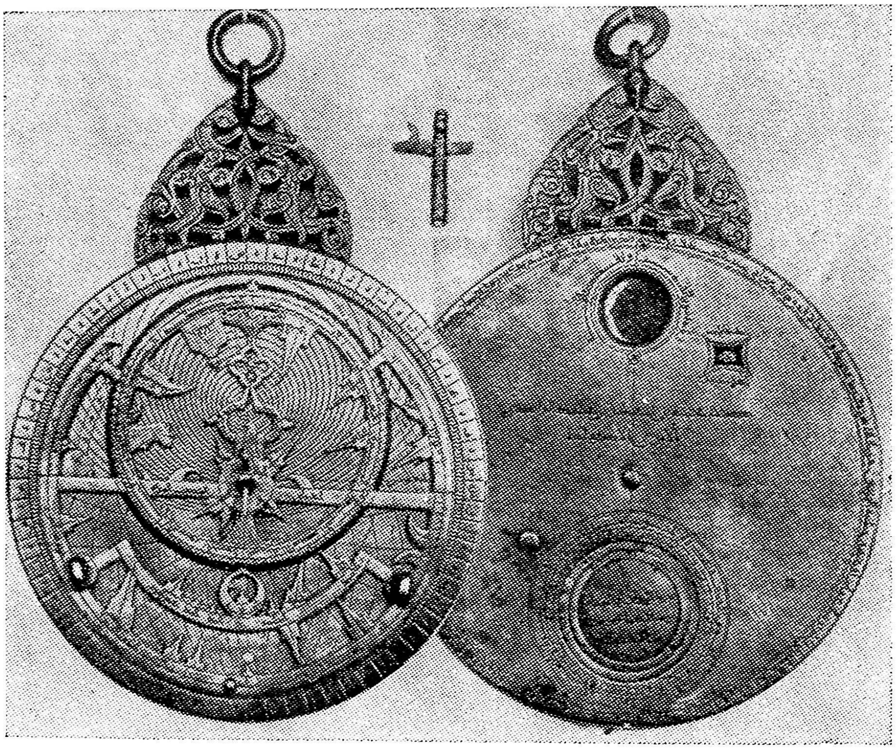

Tableau II

L'*astrolabe* est un instrument basé sur cette méthode de projection. Il était très répandu et apprécié au moyen âge, surtout dans le monde islamique. Le tableau II représente un astrolabe persan de l'année 1223, qui se trouve maintenant au Musée d'histoire des sciences à Oxford. L'anneau extérieur est divisé en 360 degrés. Un disque circulaire mobile, centré sur l'anneau extérieur et appelé araignée, porte des indications d'étoiles et un cercle excentrique représentant l'écliptique. L'araignée est la projection stéréographique de la sphère céleste. Sa rotation imite la rotation journalière (apparente) du ciel étoilé. Derrière l'araignée se trouve un disque sur lequel ces cercles sont gravés. L'arc de cercle qui partage la partie supérieure du disque représente l'horizon. Les cercles compris à l'intérieur de l'arc de l'horizon sont des cercles d'élévation parallèles à l'horizon indiquant des élévations de 3°, 6°, etc., en projection stéréographique. Le disque reste immobile lorsque l'araignée tourne. Si on la tourne à droite et si on suit la course d'un des indicateurs d'étoiles on voit d'abord l'étoile apparaître à l'horizon, puis culminer au méridien et enfin disparaître à l'horizon. Le disque est interchangeable afin que l'on puisse se servir de l'astrolabe pour d'autres latitudes.

L'astrolabe peut servir à déterminer le temps aussi bien pendant la nuit que de jour. Un dioptre se trouve en effet sur sa partie postérieure. Si on suspend verticalement l'instrument et qu'on vise une étoile ou le soleil à l'aide du dioptre, on peut déterminer leur élévation sur le cercle gradué. A cette élévation correspond un cercle d'élévation sur la partie frontale de l'instrument. Observe-t-on une étoile, on tourne l'araignée jusqu'à ce que l'indicateur de l'étoile se trouve exactement sur le cercle d'élévation. Observe-t-on le soleil, il faut d'abord connaître sa position sur l'écliptique au jour en question. Marquant cette position, on tourne le disque de manière qu'elle soit située sur l'horizon (lever du soleil), puis on continue à le tourner à droite jusqu'à ce qu'elle se trouve sur le cercle d'élévation. La différence des deux lectures sur le limbe donne le temps écoulé entre le lever du soleil et le moment de l'observation. On détermine de la même manière le temps écoulé entre le coucher du soleil et l'observation d'une étoile.

Le plus ancien astrolabe conservé jusqu'à nos jours est un instrument arabe datant de l'an 984 [1]. Mais Ptolémée mentionne déjà dans son *Planisphaerium* un appareil horoscopique avec une araignée et la tradition rapporte d'Hipparque qu'il n'avait inséré que 16 étoiles dans son astrolabe [2]. On peut remonter encore plus haut, car on trouve dans l'*Architectura* IX 8 de Vitruve l'indication suivante: « C'est Eudoxe qui a inventé l'araignée, mais d'après les dires de quelques-uns, ce serait Apollonius. » Cela est plausible si l'on admet qu'Eudoxe a inventé un instrument à forme sphérique muni d'une araignée et qu'Apollonius ait

---

[1] Voir T. G. GUENTHER, *The astrolabes of the world*, Oxford, 1932. Le tableau II provient de cette œuvre magnifique.

[2] O. NEUGEBAUER, The early history of the Astrolabe, *Isis*, 40 (1949), p. 240.

construit l'astrolabe plan en utilisant la projection stéréographique. Apollonius était un grand mathématicien et il connaissait le théorème sur les sections circulaires du cône oblique rappelé ci-dessus. S'il en est ainsi, on comprend que quelques-uns attribuent à Eudoxe et d'autres à Apollonius l'invention de l'araignée. Mais cela n'est qu'une hypothèse.

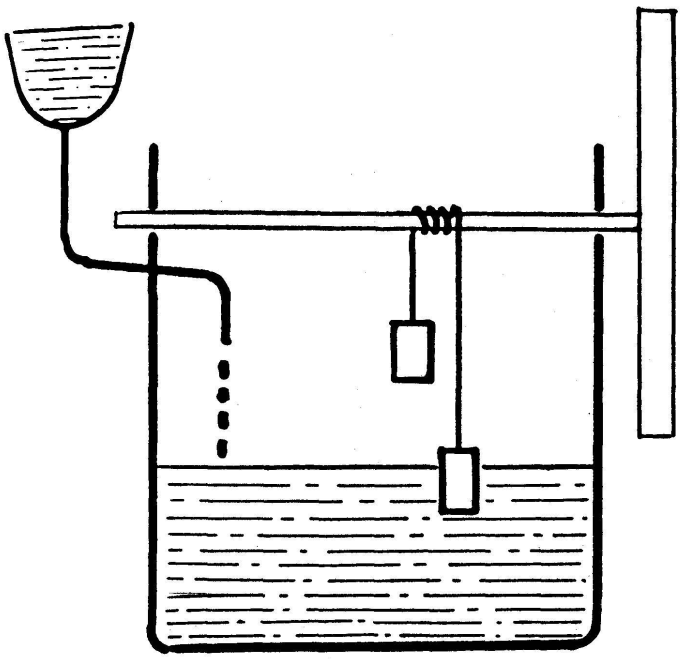

Fig. 4

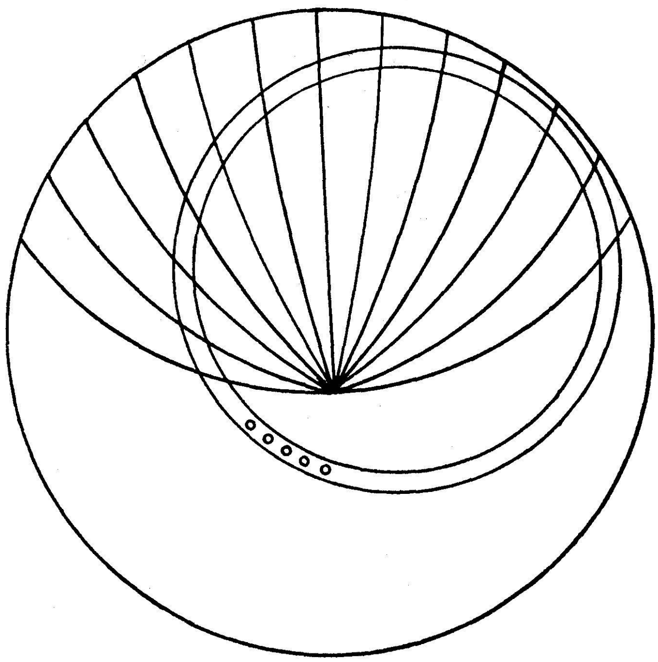

Fig. 5

4. Les horloges a eau.

Vitruve décrit une horloge à eau, basée elle aussi sur l'emploi de la projection stéréographique. Au lieu d'avoir des aiguilles tournantes comme en ont nos montres, cette horloge possède un disque tournant, monté sur un axe horizontal. Cet axe est mu par un cordon dont les extrémités sont attachées à un flotteur et à un contrepoids (fig. 4). D'un récipient constamment rempli d'eau jusqu'au bord débite un courant stationnaire dans un plus grand vase. Le niveau de l'eau s'élève dans ce vase et avec lui le flotteur; d'où un mouvement de rotation uniforme du disque.

Le ciel étoilé est reproduit stéréographiquement sur le disque. Le cercle excentrique de la figure 5 représente l'écliptique. Sur son limbe 365 ou 366 trous sont percés, un pour chaque jour de l'année. Une cheville figurant le soleil est enfoncée chaque jour dans le trou correspondant. 183 trous suffisent si la cheville n'est enfoncée que chaque deuxième jour dans le trou suivant [1].

Le débit de l'eau est réglé de telle façon que le disque effectue un tour par jour stellaire. La rotation du disque correspond alors exactement au mouvement journalier de la sphère céleste et du soleil.

Un réseau formé d'un arc d'horizon et de 11 lignes horaires est placé devant le disque. La sixième ligne horaire est une droite (le méridien), la douzième est la partie droite de l'arc d'horizon, celle du coucher du soleil.

Les Grecs et les Romains divisaient le jour en 12 heures, depuis le lever jusqu'au coucher du soleil (de même la nuit). Les heures du jour étaient donc plus longues en été qu'en hiver. Cela obligeait de tenir compte de la marche du soleil et des saisons dans la construction des horloges. Leur construction eût été bien plus simple si toutes les heures avaient été égales: une aiguille unique et un seul cadran eussent suffit comme dans nos horloges. Toute la complication de la mesure du temps dans l'antiquité provient de l'inégalité des heures du jour et de la nuit.

On pouvait régler l'horloge à chaque lever ou coucher du soleil: il suffisait pour cela de placer le disque de la manière que la cheville figurant le soleil soit située exactement sur le cercle d'horizon. Au besoin, l'horloge pouvait être réglée à midi, en observant le passage du soleil par le méridien. L'horloge permettait de connaître l'heure au cours de la journée, même si le soleil était caché, ce qui n'est pas possible avec une horloge solaire.

L'horloge à eau n'existait pas seulement sur le papier dans le traité de Vitruve; elle existait aussi en réalité. On a trouvé un fragment du disque en bronze d'une telle horloge au cours des fouilles effectuées dans un camp militaire romain à Salzbourg (Autriche). Albert Rehm a reconstruit le disque à partir de ce fragment en se laissant guider par la description de Vitruve [2].

---

[1] A. Rehm, Zur Salzburger Bronzescheibe, *Jahreshefte österr. archäol. Inst. Wien*, 6 (1903), p. 41.

[2] La description de Vitruve manque de clarté. Albert Rehm a interprété le passage de Vitruve en se basant sur sa reconstruction du disque en bronze de Salzbourg (voir ci-dessous). La description que nous donnons ici repose sur celle de Rehm.

Le tableau III montre cette reconstruction à côté du fragment trouvé. Le diamètre du disque était de 2 mètres; l'horloge était probablement placée sur une place publique comme le sont les

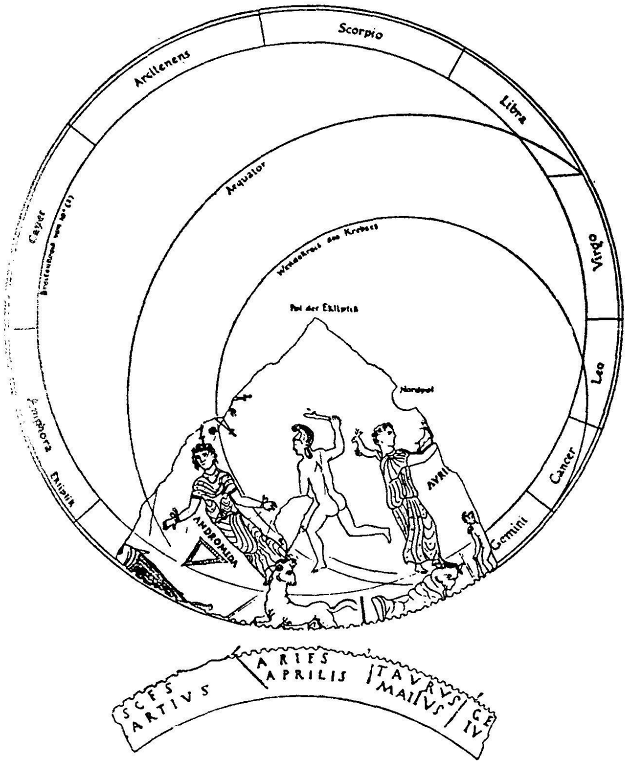

Tableau III

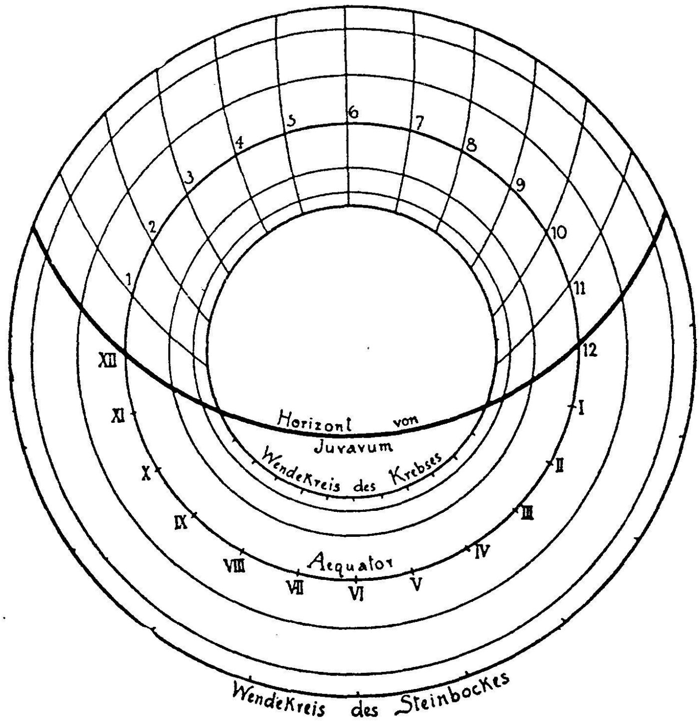

Tableau IV

tours à horloge. Le cercle de l'écliptique était divisé en 12 parties correspondant aux 12 signaux zodiacaux.

Le tableau IV montre le réseau servant à la lecture des heures, tel que Rehm l'a construit d'après les données de Vitruve. Les cercles concentriques représentent l'équateur et quelques parallèles sur lesquels le soleil se meut aux différentes saisons. Sur chaque parallèle l'arc d'horizon est divisé en 12 parties égales. Les lignes horaires joignent les points de division.

AUSGEWÄHLTE EINZELPROBLEME DER KOMBINATORISCHEN GEOMETRIE IN DER EBENE

VON

H. Hadwiger und H. Debrunner, Bern

Es gibt verschiedene mathematische Sachgebiete, wo elementare Aufgaben unmittelbar in höhere und teilweise ungelöste Fragestellungen übergehen, so dass dort einfachste Gegenstände der Schulmathematik eng benachbart mit solchen sind, die wissenschaftliches Interesse bieten und von Spezialisten bearbeitet werden. Wesentlich ist dabei, dass die beiden fachlichen Standorte nicht wie üblich durch weit ausgebaute höhere Theorien und vielschichtige Begriffsskalen voneinander getrennt sind.

Ein Sachgebiet dieser Art ist die kombinatorische Geometrie, die bei Beschränkung auf die Ebene einen besonders einfachen Charakter aufweist. Ihre Fragestellungen knüpfen unmittelbar an die Grundbegriffe der ebenen Elementargeometrie an und beziehen sich dann auf die Vielfalt der primitivsten Vorgänge und Verknüpfungen wie diejenigen des Umfassens, Treffens und Zerlegens usw. und auf die hier in Erwägung zu ziehenden kombinatorischen Möglichkeiten.

Das Gebiet ist mit der kombinatorischen Topologie verwandt; jedoch tritt die eigentlich topologische Betrachtungsweise stark zurück, und die Problematik bleibt der Elementargeometrie verpflichtet. Wie dies von H. Hopf [22] [1] ausführlicher geschil-

---

[1] Eckige Klammern verweisen auf das Literaturverzeichniss am Schluss der Arbeit.

dert worden ist, treten in der kombinatorischen Geometrie metrische und topologische Gesichtspunkte in eine gewisse Wechselbeziehung.

Die von uns vorgenommene Zusammenstellung zahlreicher Einzelprobleme hält sich übrigens nicht vollkommen streng an den methodischen Rahmen der kombinatorischen Geometrie; diese bildet nur das engste Kernstück eines Fragenkreises, der durch die Ganzheit und Einfachheit seiner Gegenstände und durch den rein kombinatorischen Habitus der erforderlichen Schlüsse einen besonderen Anreiz auszuüben vermag.

Wie man — um dieser Geschmacksrichtung zu folgen und um sich damit einer Wandlung anzupassen, die methodisch und sachlich vom gewohnten klassischen Machtbereich zu einem mehr neuzeitlich orientierten Arbeitsgebiet mit neuartigen reizvollen Möglichkeiten überführt — ausgerüstet mit nur elementaren Begriffen fragen kann, das soll durch die hier zusammengetragenen Beispiele dem Leser nahe gebracht werden.

An Vorkenntnissen ist ausser den allgemeinen Grundlagen der Elementargeometrie und der Lehre von den reellen Zahlen wenig erforderlich; eine gewisse Vertrautheit mit dem mengenmässigen Denken ist nützlich; wichtig ist der Begriff der ebenen Punktmenge. Wo erforderlich, werden weniger geläufige Bezeichnungen kurz erläutert.

In Teil I. werden ausgesuchte Lehrsätze, nach Aussagengruppen geordnet, ohne Beweis, aber mit einlässlicherem Kommentar und mit Literaturhinweisen zusammengestellt. Die Beweise — vielfach nur kurz angedeutet — folgen in Teil II. So findet mancher Leser auch Gelegenheit, sich im Aufsuchen und Ausführen eigener Beweisideen zu üben. Besondere Interessenten mögen durch die zahlreichen Zitate auch da und dort den Weg zu aktueller Fachliteratur finden und auch die angedeuteten ungelösten Probleme weiterverfolgen.

Wir hoffen mit diesen ausgewählten Einzelproblemen Anregung zu intensiverer Beschäftigung mit den anziehenden Fragen der kombinatorischen Geometrie zu bieten und den in diesem Sachgebiet bestehenden unmittelbaren Kontakt zwischen Schulmathematik und wissenschaftlicher Forschung zu lebendiger Wirkung gelangen zu lassen.

I. Teil.

Die Aussagen der ersten kleinen Gruppe beziehen sich auf Inzidenzverhältnisse bei Punkten, Geraden und Kreisen und gehören also der kombinatorischen Elementargeometrie an.

1. *Liegt auf der Verbindungsgeraden je zweier Punkte einer endlichen Punktmenge stets wenigstens ein dritter Punkt der Menge, so liegen alle Punkte auf einer Geraden.*

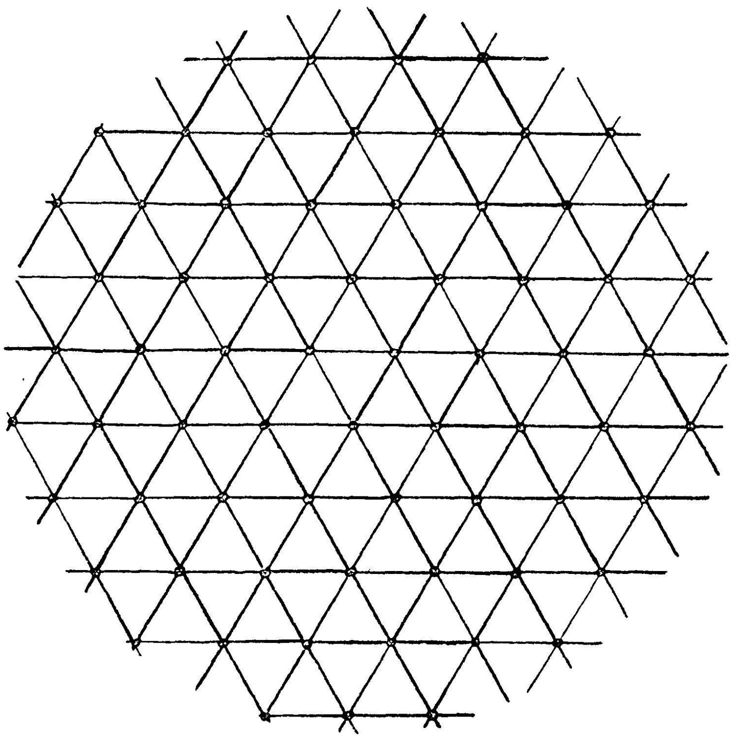

Fig. 1

Zu diesem 1893 von J. J. Sylvester [55] vermuteten Theorem findet sich ein kurzer Beweis von T. Gallai (Grünwald) bei N. G. de Bruijn-P. Erdös [6], wo die Aussage auch als Korollar eines rein kombinatorischen Satzes erscheint. Für weitere Beweise, Verallgemeinerungen und Varianten vgl. P. Erdös [11], H. S. M. Coxeter [7], G. A. Dirac [9] und Th. Motzkin [39].

2. *Geht durch den Schnittpunkt je zweier Geraden einer endlichen Geradenmenge stets wenigstens eine dritte Gerade, so gehen alle Geraden durch einen Punkt.*

Die Aussagen **1** und **2** sind nicht mehr richtig, wenn die Punkt- und Geradenmengen nicht endlich sind. Dies zeigt beispielsweise für beide Aussagen simultan das reguläre abzählbar-unendliche Punkt- und Geradensystem in Fig. 1.

3. *Liegt auf jeder Kreislinie durch je drei Punkte einer endlichen Punktmenge stets wenigstens ein vierter Punkt der Menge, so liegen alle Punkte auf einer Kreislinie.*

In Voraussetzung und Behauptung eng mit Aussage **3** verwandt ist der folgende Satz über beschränkte (d.h. in einem Kreis von endlichem Radius enthaltene) abgeschlossene Punktmengen:

4. *Hat eine beschränkte, abgeschlossene Punktmenge die Eigenschaft, dass die Symmetrieachse je zweier Punkte auch Symmetrieachse der ganzen Menge ist, so liegen ihre Punkte auf einer Kreislinie.*

Dass die Aussagen **3** und **4** für nicht endliche und nicht beschränkte Punktmengen unrichtig werden, ist dann trivial, wenn man kontinuierlich-unendliche Punktmengen in Betracht zieht. In der Tat genügt es, die ganze Ebene als Punktmenge zu betrachten. Dagegen gibt es auch abzählbar-unendliche Punktmengen, für welche die Voraussetzungen von Aussage **3** und **4** erfüllt sind, ohne dass sie Teilmengen einer Kreislinie sind. In der Tat: Man wähle eine aus vier Punkten bestehende Menge A_0, die nicht auf einer Kreislinie oder einer Geraden liegt. Nun konstruiere man auf rekursive Weise eine aufsteigende Folge endlicher Punktmengen A_n $(n = 0, 1, \ldots)$, indem man $A_n = \varphi(A_{n-1})$ $(n = 1, 2, \ldots)$ setzt, wobei $\varphi(A)$ die Vereinigungsmenge aller Punktmengen bezeichnet, die durch Spiegelung von A an sämtlichen Symmetrieachsen von Punktepaaren aus A hervorgehen. Wie man sich leicht überlegt, ist die Vereinigungsmenge $S = \mathrm{U}\, A_n$ eine abzählbar-unendliche Punktmenge mit der gewünschten Symmetrieeigenschaft; auf jeder durch drei Punkte von S gelegten Kreislinie liegt stets wenigstens ein vierter Punkt von S, falls die drei Punkte nicht ein reguläres Dreieck bilden, und bei geringfügiger Erweiterung der Konstruktion φ auch in diesem letztern Falle.

* * *

Wir lassen eine weitere Gruppe von Aussagen folgen, in welchen die Ganzzahligkeit oder auch die Rationalität von Distanzen eine Rolle spielt.

Die Menge der Punkte, deren Koordinaten bezüglich eines orthogonalen Koordinatensystems ganz sind, bilden das ebene *Einheitsgitter*; ihre Punkte heissen *Gitterpunkte.*

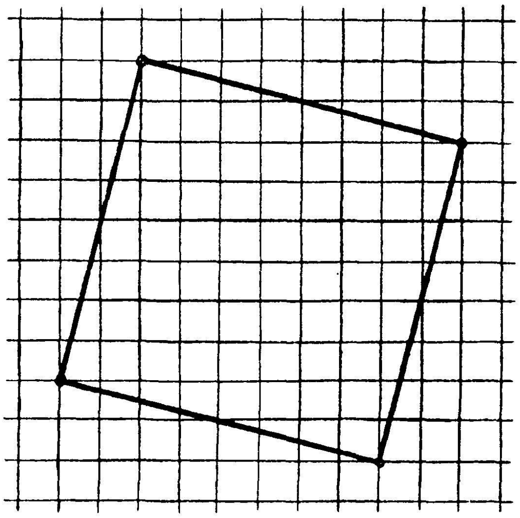

FIG. 2

5. *Bilden n Gitterpunkte ($n > 2$) ein reguläres n-Eck, so ist $n = 4$, d.h. das Quadrat ist das einzige reguläre Viereck, das im Einheitsgitter eingelagert werden kann.*

Einen originellen Beweis hierfür gab W. SCHERRER [52], für den Fall $n = 3$ vgl. auch G. PÓLYA-G. SZEGÖ [43], Bd. 2, S. 156, Aufgabe 238.

Ein Quadrat lässt sich selbstverständlich auch auf nichttriviale Weise im Gitter einlagern; dies illustriert Fig. 2. Über die Eckenwinkel eingelagerter Rhomben gilt die Aussage:

6. *Bilden vier Gitterpunkte einen nichtquadratischen Rhombus mit dem Eckenwinkel α, so ist α/π irrational; d.h. das Quadrat ist der einzige im Einheitsgitter eingelagerte Rhombus, dessen Eckenwinkel mit dem vollen Winkel kommensurabel sind.*

Im engsten Zusammenhang hiermit steht eine Feststellung über die Winkel in pythagoreischen Dreiecken, d.h. in rechtwinkligen Dreiecken mit ganzzahligen Seitenlängen. Hier gilt:

7. *Ist α ein Basiswinkel eines pythagoreischen Dreiecks, so ist α/π irrational.*

Die Aussagen **6** und **7** sind geometrische Korollarien des folgenden goniometrischen Satzes (vgl. H. Hadwiger [18]):

8. *Ist $0 < \alpha < \pi/2$ und fällt cos α rational aus, so ist entweder $\alpha = \pi/3$ oder α/π ist irrational.*

9. *Hat eine unendliche Punktmenge die Eigenschaft, dass ihre Punktepaare ganzzahlige Distanzen aufweisen, so liegt sie ganz auf einer Geraden.*

Dieser Satz von P. Erdös [12] (vgl. auch A. Delachet [8], S. 50 und E. Trost [57]) darf als besonders typisch für eine gewisse Kategorie von Aussagen gelten, die uns dadurch besonders ansprechen, dass aus einfachsten Voraussetzungen eine starke und unerwartete Folgerung gezogen wird.

Besonders beachtenswert ist der Umstand, dass aus **9** nicht der Schluss gezogen werden darf, es gebe eine Höchstzahl k_0 derart, dass die Behauptung immer schon dann gilt, wenn die Anzahl k der Punkte mit ausschliesslich ganzzahligen Punktdistanzen grösser ist als k_0. Es gibt nämlich zu jedem k derartige Punktmengen, die nicht linear sind, sogar solche der Eigenschaft, dass keine drei Punkte auf einer Geraden liegen. Solche Punktmengen wurden wiederholt konstruiert, u.a. von M. Altwegg [1], A. Müller [40] und F. Steiger [53].

Nach einer Idee von A. Müller lässt sich eine auf der Einheitskreislinie dicht liegende, abzählbar-unendliche Punktmenge angeben, welche die Eigenschaft aufweist, dass jedes Punktepaar eine rationale Distanz besitzt. Es sei nämlich P_n der Punkt mit den Polarkoordinaten $\rho = 1$, $\varphi = 2n\theta$, *wo* θ durch $\cos\theta = 4/5$ bestimmt ist, so dass nach Aussage **8** θ/π irrational wird. Die Punkte der Folge P_n $(n = 0, 1, \ldots)$ sind paarweise verschieden und die erzeugte abzählbar-unendliche Punktmenge liegt auf der Einheitskreislinie. Sie liegt dort dicht und nach dem Gleichverteilungstheorem von H. Weyl sogar gleichverteilt, doch ist dies hier ohne Bedeutung. Für eine Distanz eines Punktepaares ergibt sich $d(\mathrm{P}_n, \mathrm{P}_m) = 2\,|\sin(n-m)\,\theta\,|$, und wegen $\sin\theta = 3/5$ und $\cos\theta = 4/5$ ist dies nach goniometrischen Formeln eine rationale Zahl. Betrachtet man jetzt k Punkte dieser Menge, so lässt sich durch eine geeignete ähnliche Vergrösserung erzielen, dass alle auftretenden Distanzen ganzzahlig werden. Dabei liegen keine drei Punkte auf einer Geraden!

* * *

Die folgende Aussagengruppe befasst sich mit der Hüllenbildung und Separation bei ebenen Punktmengen. Zunächst einige Erklärungen: Eine Punktmenge heisst bekanntlich *konvex*, wenn sie mit zwei Punkten stets auch die ganze Verbindungsstrecke enthält. Unter der *konvexen Hülle* einer Punktmenge versteht man die kleinste konvexe Punktmenge, welche jene als Teil enthält. Mit andern Worten ist die konvexe Hülle der Durchschnitt aller konvexen Punktmengen, welche die gegebene als Teil enthalten.

10. *Ein Punkt gehört dann und nur dann zur konvexen Hülle einer Punktmenge, wenn er bereits der konvexen Hülle von drei geeigneten Punkten der Menge angehört.*

Aus dieser Aussage folgt, dass die konvexe Hülle identisch ist mit der Vereinigungsmenge aller Dreiecksbereiche, deren Ecken der gegebenen Menge zugehören.

11. *Ein Punkt ist dann und nur dann innerer Punkt der konvexen Hülle einer Punktmenge, wenn er bereits innerer Punkt der konvexen Hülle von vier geeigneten Punkten der Menge ist.*

Die Aussagen **10** und **11** sind ebene Sonderfälle nützlicher, von E. STEINITZ [54] und W. GUSTIN [17] stammender Sätze. Vgl. auch O. HANNER-H. RÅDSTRÖM [20] und C. V. ROBINSON [49].

Zwei Punktmengen wollen wir *separierbar* nennen, wenn es eine Gerade gibt, welche keine der Mengen trifft und sie voneinander trennt; beide Punktmengen liegen dann im Innern der beiden Halbebenen, die durch die Gerade erzeugt werden. Über die Separierbarkeit gilt das folgende Kriterium von P. KIRCHBERGER [29] (vgl. auch H. RADEMACHER-I. J. SCHOENBERG [44]):

12. *Zwei Punktmengen sind dann und nur dann separierbar, wenn je zwei ihrer Teilmengen, deren Vereinigung höchstens vier Punkte enthält, separierbar sind.*

13. *Jede Punktmenge, die wenigstens vier Punkte enthält, lässt sich in zwei nichtleere, punktfremde und nichtseparierbare Teilmengen zerlegen.*

Hiezu vgl. F. W. Levi [36] und R. Rado [46].

* * *

Wir wenden uns jetzt einem Fragenkreis zu, in dessen Mittelpunkt das berühmte Hellysche Theorem steht. Die zahlreichen Varianten, Sätze vom Hellyschen Typ, die sich in der Regel auf Eibereiche beziehen, bilden einen sehr typischen Teil der kombinatorischen Konvexgeometrie.

Unter einem *Eibereich* verstehen wir hier eine beschränkte, abgeschlossene und konvexe Punktmenge.

14. *Haben je drei Eibereiche einer (endlichen oder unendlichen) Menge von Eibereichen einen Punkt gemeinsam, so haben alle Eibereiche der Menge einen Punkt gemeinsam.*

Dies ist der ebene Sonderfall des bekannten Hellyschen Satzes. Vgl. E. Helly [21], J. Radon [48], D. König [35], u.a.m. Wie man unmittelbar mit einfachsten Beispielen einsieht, kann die Anzahl drei nicht durch zwei ersetzt werden. Dies ist aber bei starken Voraussetzungen über die Gestalt der Eibereiche möglich. So gilt die folgende Variante:

15. *Haben je zwei Rechtecke einer Menge parallel orientierter Rechtecke einen Punkt gemeinsam, so haben alle Rechtecke der Menge einen Punkt gemeinsam.*

Dagegen gilt: Ein Eibereich, der nicht ein Parallelogramm ist, lässt sich in drei Lagen verschieben, so dass je zwei der translationsgleichen Eibereiche einen Punkt gemeinsam haben, nicht aber alle drei. Für Parallelogramme ist dies nicht möglich Die Gültigkeit einer Aussage der Art **15** mit leichter Modifikation ist demnach für Parallelogramme charakteristisch. Vgl. hierzu auch B. Sz.-Nagy [41].

Ein Korollar von **15** ist der Hellysche Satz für die Gerade:

16. *Haben in einer Geraden je zwei Strecken einer Streckenmenge einen Punkt gemeinsam, so haben alle Strecken der Menge einen Punkt gemeinsam.*

Es ist naheliegend und für viele Anwendungen nützlich, Sätze vom Hellyschen Typ auch für die Kreislinie aufzustellen; an Stelle der Eibereiche treten hier abgeschlossene Kreisbogen, die selbstverständlich alle demselben Trägerkreis angehören sollen.

17. *Hat eine Menge von Kreisbogen, die alle kleiner als Halbkreise sind, die Eigenschaft, dass je drei Bogen einen Punkt gemeinsam haben, so haben alle Bogen der Menge einen Punkt gemeinsam.*

Die Bedingung über die Grösse der Bogen kann hier nicht gemildert werden, indem die Aussage bereits für Halbkreise falsch wird. In der Tat haben von den vier Halbkreisen, die durch zwei verschiedene Paare antipodischer Punkte der Kreislinie entstehen, je drei, aber nicht alle vier einen Punkt gemeinsam. Auch kann die Anzahl drei nicht durch zwei ersetzt werden. Von den drei Drittelskreisen, die die ganze Kreislinie überdecken, haben je zwei, aber nicht alle drei einen Punkt gemeinsam. Dagegen gilt:

18. *Hat eine Menge von Kreisbogen, die alle kleiner als Drittelskreise sind, die Eigenschaft, dass je zwei Bogen einen Punkt gemeinsam haben, so haben alle Bogen der Menge einen Punkt gemeinsam.*

Lassen wir jede Voraussetzung über die Grösse der Bogen fallen, so gilt noch:

19. *Hat eine Menge von Kreisbogen die Eigenschaft, dass je zwei Bogen einen Punkt gemeinsam haben, so gibt es ein antipodisches Punktepaar so, dass jeder Bogen der Menge wenigstens einen Punkt des Paars enthält.*

Es gibt mit andern Worten eine Durchmessergerade des Kreises, die alle Kreisbogen trifft. Sätze dieser Art wurden u.a. von C. V. Robinson [49] und A. Horn-F. A. Valentine [25] aufgestellt. Hübsche Anwendungen, wie wir solche auch weiter unten angeben werden, hat P. Vincensini [59] entdeckt.

20. *Lässt sich ein Eibereich stets so verschieben, dass er im Durchschnitt von je drei Bereichen einer Eibereichsmenge enthalten ist, dann auch so, dass er im Durchschnitt aller Eibereiche der Menge liegt.*

21. *Lässt sich ein Eibereich stets so verschieben, dass er je drei Bereiche einer Eibereichmenge trifft, dann auch so, dass er alle Bereiche der Menge trifft.*

22. *Lässt sich ein Eibereich stets so verschieben, dass er je drei Bereiche einer Eibereichmenge enthält, dann auch so, dass er alle Bereiche der Menge enthält.*

Dies sind ebene Sonderfälle allgemeinerer, sich auf höhere Dimensionen beziehender Varianten des Hellyschen Satzes, die von P. Vincensini [58] und V. L. Klee jr. [32] formuliert wurden. Wesentlich für die Gültigkeit dieser Aussagen ist die Bedingung, dass die Eibereiche in der Ebene nur verschoben und nicht etwa auch gedreht werden dürfen. Wird an Stelle der Translationsgruppe die Bewegungsgruppe gesetzt, so sind alle drei Aussagen falsch.

Wir belegen dies ausführlicher durch ein Beispiel zu Aussage **21.** Man betrachte die Menge der n Kreise ($n > 2$) deren Mittelpunkte durch die Polarkoordinaten $\rho = 1$ und $\varphi = 2k\pi/n$ ($k = 1, \ldots, n$) gegeben sind, und deren Radius $r = \cos^2(\pi/n)$ bzw. $r = \cos^2(\pi/n) + \cos^2(\pi/2n) - 1$ ist, falls n gerade bzw. ungerade gewählt wurde. Wie man jetzt bestätigen kann, lässt sich eine Strecke (uneigentlicher Eibereich) der Länge 2 stets so legen, dass je $n - 1$ Kreisscheiben der Kreismenge, nicht aber so, dass alle n Kreisscheiben getroffen werden. Die Strecke muss hiezu jedoch passend gedreht und verschoben werden. Fig. 3 illustriert dies im Falle $n = 8$.

23. *Haben je zwei Eibereiche einer Eibereichmenge einen Punkt gemeinsam, so lässt sich durch jeden Punkt der Ebene eine Gerade legen, welche alle Eibereiche der Menge trifft.*

24. *Haben je zwei Eibereiche einer Eibereichmenge einen Punkt gemeinsam, so lässt sich zu jeder Geraden der Ebene eine parallele Gerade legen, welche alle Eibereiche der Menge trifft.*

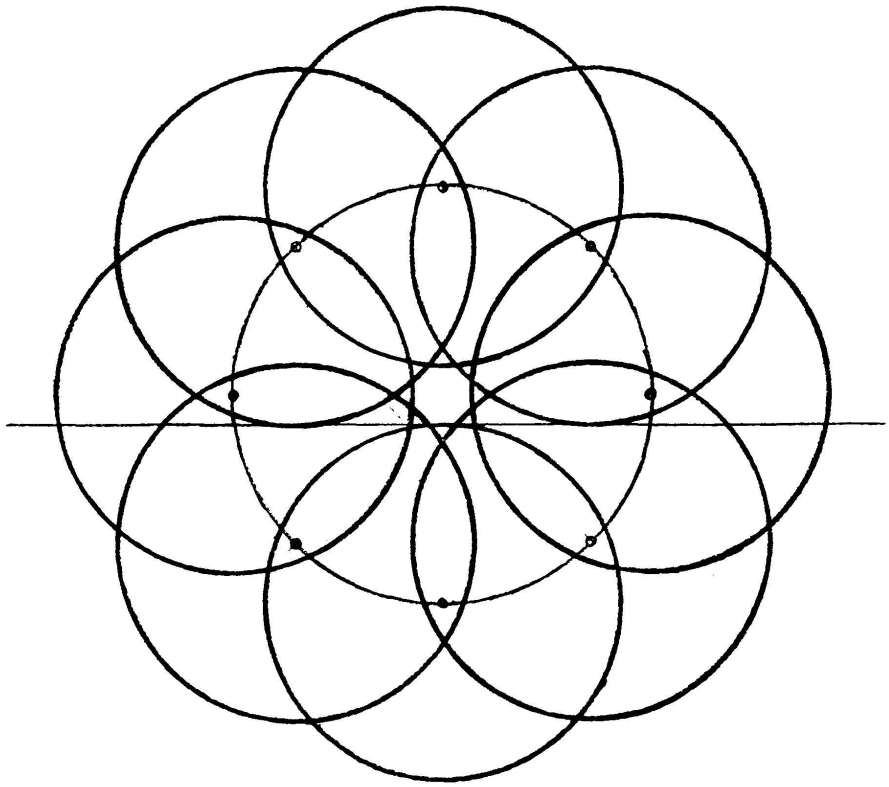

FIG. 3

Auch diese beiden Aussagen **23** und **24** sind ebene Sonderfälle allgemeinerer Sätze von A. HORN [24] und V. L. KLEE jr. [30]; sie beantworten die Frage, was sich an Stelle der Behauptung des Hellyschen Satzes noch aussagen lässt, wenn die Anzahl drei durch zwei ersetzt wird.

Man kann sich fragen, ob sich im Hellyschen Satz Punkt durch Gerade in dem Sinn ersetzen lässt, dass eine Aussage der folgenden Form richtig ist: Werden je h Bereiche einer Eibereichmenge von einer Geraden getroffen, so gibt es eine Gerade, welche alle Bereiche der Menge trifft. Existiert eine solche Hellysche Stichzahl ?

Die Antwort ist verneinend ! Bereits L. A. SANTALÓ [50] hat bemerkt, dass zu jedem natürlichen $n > 2$ eine Menge von n

Eibereichen so konstruiert werden kann, dass je $n - 1$ Bereiche der Menge eine gemeinsame Sekante, nicht aber alle n eine solche aufweisen. Dasselbe belegt auch unser Beispiel, das wir an Aussage **21** angeschlossen haben. Sätze der erwähnten Art, lassen sich nur aufstellen, wenn über Gestalt und Lage der Eibereiche zusätzliche Voraussetzungen getroffen werden. So hat L. A. SANTALÓ [50] bewiesen, dass alle Rechtecke einerMenge parallel orientierter Rechtecke von einer Geraden getroffen

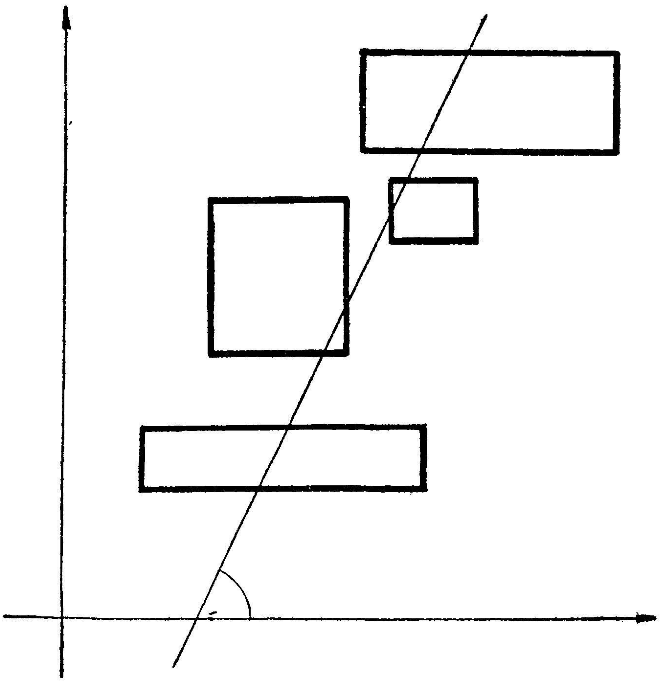

FIG. 4

werden, falls dies für je sechs Rechtecke der Menge zutrifft. Wir fügen hier die folgende Aussage an:

25. *Werden je drei Rechtecke einer Menge parallel orientierter Rechtecke von einer ansteigenden Geraden getroffen, so gibt es eine ansteigende Gerade, welche alle Rechtecke der Menge trifft.*

Wir nehmen hierbei an, dass die Rechtecke parallel zu einem orthogonalen Koordinatensystem orientiert sind; eine Gerade ist ansteigend, wenn ihr Steigungsmass nichtnegativ ist. Vgl. hiezu Fig. 4.

Das oben dargelegte Beispiel (Fig. 3), das die Nichtexistenz einer Hellyschen Stichzahl h im allgemeinsten Fall beweist, zeigt die auffallende Sachlage, dass sich die Eibereiche (Kreisscheiben) gegenseitig teilweise überdecken. Hier ist es naheliegend die Frage aufzuwerfen, ob sich eine Hellysche Stichzahl dann angeben lässt, wenn vorausgesetzt wird, dass die Eibereiche paarweise fremd sind, d.h. keine Punkte gemeinsam haben. Die Antwort auf diese auch von V. L. KLEE jr. [33] aufgeworfene Frage ist wieder verneinend.

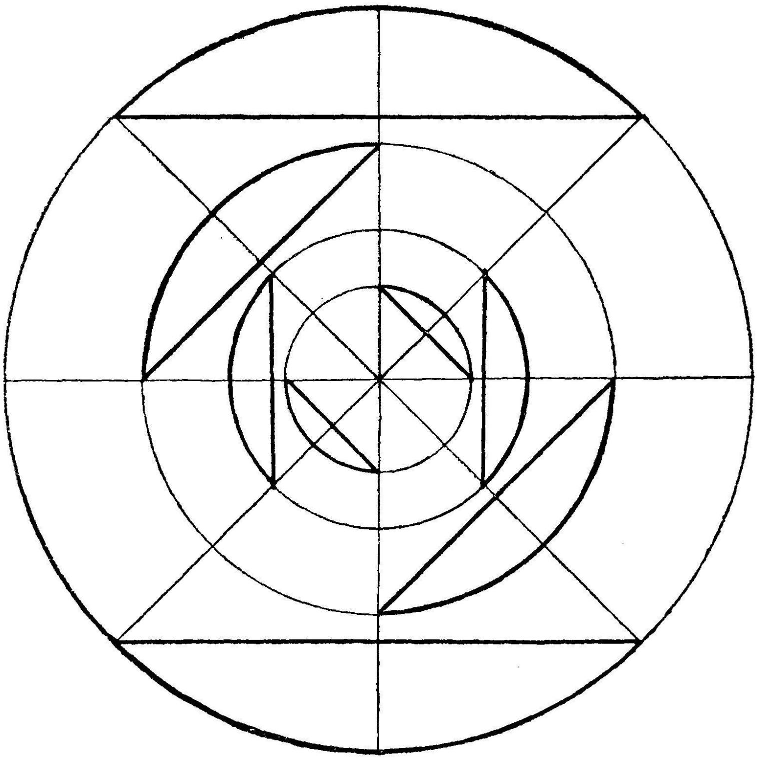

FIG. 5

Wir konstruieren ein Beispiel — eine Kreissegmentrosette — um diese Behauptung zu belegen. Es sei $n > 1$; S_i und S_i^* ($i = 1, \ldots, 2n$) sollen insgesamt $4n$ Kreissegmente der $2n$ konzentrischen Kreise K_i ($i = 1, \ldots, 2n$) mit Zentrum Z und den Radien R_i ($i = 1, \ldots, 2n$) bezeichnen, wobei sich S_i und S_i^* bezüglich Z zentralsymmetrisch entsprechen sollen. Für die Radien sei zunächst nur $0 < R_i \leqslant R_{i+1}$ festgelegt. Die Segmente der Kreise K_i sollen nachfolgend durch die Polarkoordinaten der Punkte ihrer Kreisbogen charakterisiert werden:

$$S_i\colon\ \rho = R_i;\ (i-n+1)\,(\pi/2n) \leqslant \varphi \leqslant (i+n-1)\,(\pi/2n)$$

$$S_i^*\colon\ \rho = R_i;\ (i+n+1)\,(\pi/2n) \leqslant \varphi \leqslant (i+3n-1)\,(\pi/2n).$$

Auch im Hinblick auf weitere Verwendungsmöglichkeiten wollen wir einige Eigenschaften unserer Kreissegmentrosette festlegen:

A. Die Radien R_i können so gewählt werden, dass die $4n$ Segmente paarweise fremd sind; sie müssen nur ausreichend stark anwachsen. Fig. 5 zeigt eine Rosette dieser Art für $n = 2$.

B. Es gibt keine Gerade, welche alle $4n$ Segmente trifft. Betrachten wir zunächst eine Gerade durch Z. Wegen der $4n$-zähligen Drehsymmetrie in der Koordinate φ genügt es anzunehmen, dass der Winkel der Geraden im Intervall $0 \leqslant \varphi < \pi/2n$ liegt. Die Segmente S_n und S_n^* werden von einer solchen Durchmessergeraden nicht getroffen. Eine zu ihr parallele Gerade trifft aber entweder S_n oder S_n^* nicht.

C. Es gibt keinen Punkt, der allen $4n$ Segmenten angehört. Dies ist eine triviale Folgerung aus B.

D. Im Falle $R_i = R$ $(i = 1, \ldots, 2n)$ haben je $2n - 1$ Segmentpaare ein antipodisches Punktepaar gemeinsam. Es genügt, alle Paare ausser S_n und S_n^* zu betrachten. Die beiden Punkte $\rho = R$, $\varphi = 0$ und $\rho = R$, $\varphi = \pi$ gehören ihnen an.

E. Im Falle $R_i = R$ $(i = 1, \ldots 2n)$ gibt es kein antipodisches Punktepaar, das allen Segmentpaaren angehört. Dies ist eine triviale Folgerung von B.

F. Je $2n - 1$ Segmente werden von einer durch Z laufenden Geraden getroffen. Dies ist ein Korollar zu D; hier ist aber die Bedingung über die Gleichheit der Radien unerheblich, so dass die vorliegende Behauptung auch dann gilt, wenn die Segmente paarweise fremd sind.

G. Im Falle $R_i = R$ $(i = 1, \ldots, 2n)$ gibt es zu jeder Auswahl von je $2n - 1$ Segmenten zwei Punkte so, dass jedes Segment der Auswahl wenigstens einen der beiden Punkte enthält. Dies ist ein Korollar zu D.

H. Es gibt nicht zwei Punkte so, dass jedes der $4n$ Segmente wenigstens einen der beiden Punkte enthält. Dies ist ein Korollar zu B.

Mit den Eigenschaften A, B, und F ergibt sich nun in der Tat die Verneinung der oben erörterten Frage. Die gleiche Rosette ermöglicht es weiter, auch die Nichtexistenz weiterer Sätze vom Hellyschen Typ, welche gelegentlich erwogen worden sind, nachzuweisen.

So teilte im Anschluss an eine Arbeit von L. A. SANTALÓ [51], Th. MOTZKIN ein Gegenbeispiel zu folgendem Satz mit: Haben

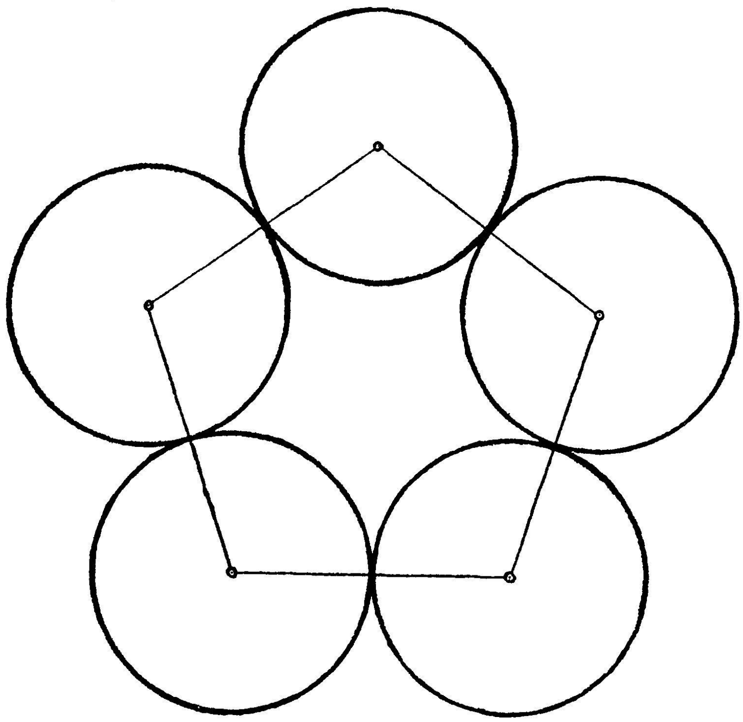

FIG. 6

je h Eibereichpaare einer Menge von Eibereichpaaren einen Punkt gemeinsam, so haben alle Eibereichpaare der Menge einen Punkt gemeinsam. Auch unsere Kreissegmentrosette widerlegt dies; im Falle gleicher Radien zeigen dies nämlich die Eigenschaften D und E.

V. L. KLEE jr. [31] hat einmal die Frage aufgeworfen, ob es eine Hellysche Stichzahl h so gibt , dass der folgende Satz richtig ist: Gibt es zu je h Eibereichen einer Eibereichmenge zwei Punkte so, dass jeder Bereich der Auswahl wenigstens einen der Punkte enthält, so trifft dasselbe für alle Bereiche der Menge zu. — Wieder existiert kein derartiger Satz; unsere Rosette beweist auch das, und zwar sind es im Falle gleicher Radien die Eigenschaften G und H, die den Nachweis liefern.

Nicht entschieden ist die Frage, ob es im Falle von Mengen paarweise fremder und kongruenter (oder translationsgleicher) Eibereiche eine Hellysche Stichzahl h so gibt, dass alle Eibereiche von einer Geraden getroffen werden, falls dies für je h Eibereiche zutrifft. Es ist naheliegend, die Frage zunächst für Mengen paarweise fremder kongruenter Kreise zu untersuchen. Obwohl die Existenz einer solchen Zahl h hier recht plausibel gemacht werden kann, konnte keine Abklärung der Frage erzielt

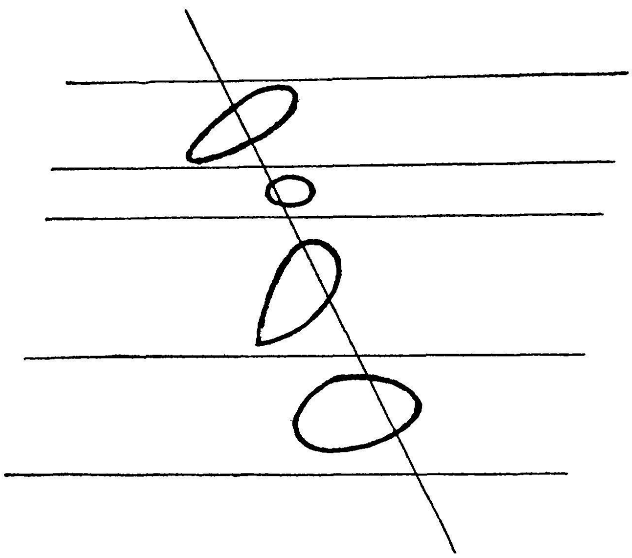

FIG. 7

werden. Jedenfalls müsste $h \geqslant 5$ sein, wie die einfache in Fig. 6 dargestellte Menge von fünf regelmässig angeordneten Kreisen zeigt.

Dagegen gilt folgende Aussage über ähnliche, gleichliegende Eibereiche:

26. *Werden je vier Bereiche einer Menge homothetischer Eibereiche von einer Geraden getroffen, so gibt es vier (paarweise parallele bzw. orthogonale) Geraden derart, dass jeder Eibereich der Menge von mindestens einer der Geraden getroffen wird.*

Die vorliegende Gruppe der Aussagen vom Hellyschen Typ wollen wir noch mit einer von P. VINCENSINI [59] entdeckten Variante abschliessen. Ein System von Eibereichen wollen wir *total separierbar* nennen, wenn es eine Richtung so gibt, dass jede Gerade dieser Richtung höchstens einen Eibereich des

Systems trifft. Es lässt sich dann in der Ebene ein System von paarweise fremden Parallelstreifen bilden, so dass jeder Streifen genau einen Eibereich des Systems enthält. Vgl. hiezu Fig. 7. Es gilt:

27. *Werden je drei Eibereiche eines total separierbaren Eibereichsystems von einer geeigneten Geraden getroffen, so gibt es eine Gerade, die alle Bereiche des Systems trifft.*

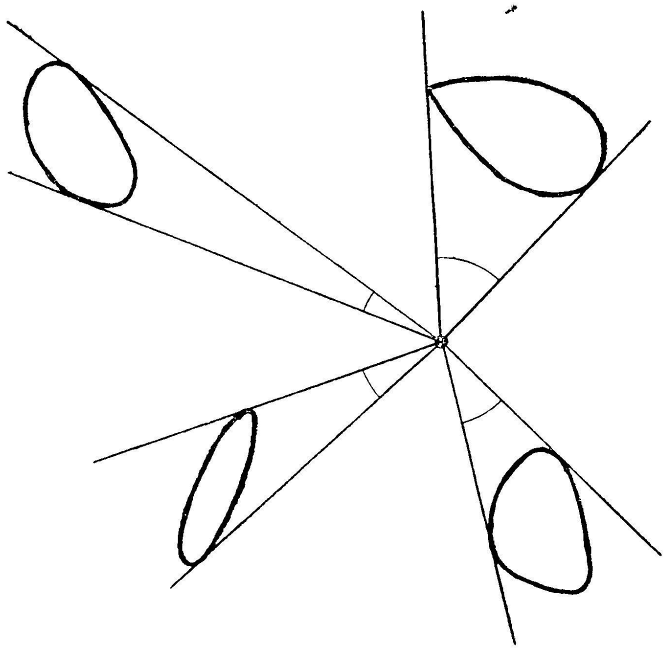

FIG. 8

Die von P. VINCENSINI angegebene Stichzahl war $h = 4$. Anschliessend hat V. L. KLEE jr. [34] bemerkt, dass sich der Satz verschärfen lässt, indem man die Stichzahl auf $h = 3$ reduzieren kann.

Ein Korollar zu **27** ist der Satz von L. A. SANTALÓ [50] (vgl. auch H. RADEMACHER-I. J. SCHOENBERG [44]), wonach alle Strecken einer Menge paralleler Strecken eine gemeinsame Transversale aufweisen, falls dies bereits für je drei Strecken der Menge zutrifft.

Im Hinblick auf Aussage **27** interessiert die Frage, welche weitern Eigenschaften eines Eibereichsystems es erlauben, auf seine totale Separierbarkeit zu schliessen. In diesem Zusammenhang erwähnen wir, dass dies zum Beispiel dann möglich ist, wenn die Eibereiche in der Ebene hinreichend dünn verstreut sind; dies lässt sich durch die Grösse der Gesichtswinkel beschreiben. Vgl. hiezu Fig. 8. Es gilt:

28. *Sind die Eibereiche eines Systems so dünn verstreut, dass von keinem Blickpunkt der Ebene aus mehr als ein Bereich des Systems unter einem Gesichtswinkel von $\pi/3$ oder grösser erscheint, so ist das System total separierbar.*

* * *

Es folgt nun zum Schluss eine kleine Gruppe von Aussagen, die lose mit dem bekannten Satz von H. W. E. Jung [26] über die Grösse des Hüllkreises einer Punktmenge von gegebenem Durchmesser zusammenhängen. Zunächst sollen einige Erklärungen vorausgeschickt werden.

Eine Punktmenge nennt man bekanntlich *beschränkt*, wenn sie durch einen Kreisbereich überdeckt werden kann. Im Zusammenhang mit den unten folgenden Feststellungen wollen wir eine Geradenmenge *beschränkt* nennen, wenn sie keine parallele Geraden enthält und wenn die Menge der Schnittpunkte, die durch ihre Geraden erzeugt werden, beschränkt ist.

Der *Deckradius* einer beschränkten Punktmenge ist der Radius des kleinsten (abgeschlossenen) Kreisbereichs, der alle Punkte der Menge enthält. Entsprechend definieren wir: Der *Treffradius* einer beschränkten Geradenmenge ist der Radius eines kleinsten (abgeschlossenen) Kreisbereichs, der alle Geraden der Menge trifft.

Der *Durchmesser* einer beschränkten Punktmenge ist die obere Grenze der Menge der Distanzen, die durch Punktepaare der Menge gebildet werden. Entsprechend definieren wir: Der *Durchmesser* einer beschränkten Geradenmenge ist der Durchmesser der Schnittpunktmenge.

29. *Lassen sich je drei Punkte einer beschränkten Punktmenge durch einen Kreisbereich vom Radius R überdecken, so lässt sich die ganze Menge durch einen solchen Kreisbereich überdecken.*

30. *Lassen sich je drei Geraden einer beschränkten Geradenmenge durch einen Kreisbereich vom Radius r treffen, so gibt es* *einen solchen Kreisbereich, der alle Geraden der Menge trifft.*

Es handelt sich hier um Spezialfälle von Aussage **21.**

31. *Für den Deckradius einer Punktmenge vom Durchmesser $D = 1$ gilt $R \leqslant 1/\sqrt{3}$.*

Dies ist der ebene Spezialfall des Jungschen Satzes. Vgl. dazu die ausführliche Darstellung bei H. Rademacher-O. Toeplitz [45].

32. *Für den Treffradius r einer Geradenmenge vom Durchmesser $D = 1$ gilt $r \leqslant 1/2\sqrt{3}$.*

Diese Aussage bildet ein duales Gegenstück zum Jungschen Satz.

33. *Eine Punktmenge vom Durchmesser $D = 1$ lässt sich durch einen regulären Dreieckbereich der Seitenlänge $s = \sqrt{3}$ überdecken.*

34. *Eine Punktmenge vom Durchmesser $D = 1$ lässt sich durch einen regulären Sechseckbereich der Seitenlänge $s = 1/\sqrt{3}$ überdecken.*

Einen universellen Bereich, der die Eigenschaft aufweist, dass jede Punktmenge vom Durchmesser $D = 1$ damit zugedeckt werden kann, nennt man einen (normierten) *Deckel.* In diesem Sinn ist der Kreisbereich vom Radius $R = 1/\sqrt{3}$ ein Deckel (Jungscher Deckel). Nach den Aussagen **33** und **34** ist der dem Kreis mit Durchmesser $D = 1$ umschriebene reguläre n-Eckbereich ein Deckel, falls $n = 3$ oder $n = 6$ ist. Aussage **33** ist der ebene Sonderfall eines von D. Gale [15] für beliebige Dimensionen aufgestellten Gegenstücks zum Jungschen Satz. Aussage **34** stammt von J. Pál [42].

35. *Jede Punktmenge vom Durchmesser* D $= 1$ *lässt sich durch drei Punktmengen überdecken, deren Durchmesser nicht grösser als $\sqrt{3}/2$ ausfallen.*

Dies ist eine von D. Gale [15] angegebene Verschärfung des von K. Borsuk [5] stammenden Satzes, wonach eine ebene

Punktmenge stets in drei Teile von kleinerem Durchmesser zerlegt werden kann. Eine von K. Borsuk aufgestellte Vermutung bezieht sich auf Punktmengen des k-dimensionalen Raumes und sieht eine Zerlegung in $k + 1$ Teilmengen mit kleineren Durchmessern vor; sie ist zur Zeit noch unbewiesen für $k > 3$; für $k = 3$ gab neuerdings H. G. Eggleston [10] einen Beweis.

Der oben erwähnte Satz von K. Borsuk (ohne die Verschärfung von D. Gale) ist — wenigstens für endliche Punktmengen — auch eine Folgerung einer Aussage über die Anzahl der Punktepaare, welche den Durchmesser realisieren. Es gilt:

36. *In einer endlichen Punktmenge vom Durchmesser* $D = 1$ *gibt es höchstens n verschiedene Punktepaare der Distanz* 1, *wenn n die Anzahl der Punkte der Menge bezeichnet.*

Ein kurzer Beweis findet sich bei P. Erdös [13], ferner vgl. man eine Aufgabe von H. Hopf-E. Pannwitz [23].

Die engen Zusammenhänge zwischen den verschiedenen Satzgruppen soll schliesslich das folgende Korollar zu **34**, als Aussage vom Hellyschen Typ formuliert, vor Augen führen:

37. *Haben je zwei Kreisscheiben einer Menge kongruenter Kreise vom Radius* $R = 1$ *einen Punkt gemeinsam, so gibt es drei Punkte vom gegenseitigen Abstand* $d = 1$ *derart, dass jede Kreisscheibe der Menge mindestens einen von ihnen enthält.*

Ähnliche, teils noch unbewiesene Aussagen finden sich bei L. Fejes Tóth [14], S. 97.

II. Teil

Die vorstehend formulierten Aussagen sollen hier unter Benutzung der oben zitierten Quellen durch kurze Beweise belegt werden. Dabei erzwingen Raumgründe, dass oft nur der Gedankengang knapp angedeutet werden kann. Die Argumentation stützt sich vorwiegend auf elementare Sachverhalte, hie und da ergänzt durch einfache punktmengengeometrische Überlegungen.

1. Lägen die Punkte $P_1, \ldots, P_n$ nicht auf einer Geraden und gilt für sie doch die Voraussetzung des Satzes, so ergibt sich ein Widerspruch wie folgt: Durch eine projektive Abbildung werde genau einer der Punkte, etwa P_1, in einen Fernpunkt transformiert. Das System der Punkte und ihrer Verbindungsgeraden geht dabei über in eine Schar von Parallelen (durch P_1), von denen jede im Endlichen zwei der Punkte enthält, und in eine endliche Mengen von Transversalen, von denen jede mindestens drei der Punkte enthält. G sei die Transversale, die mit den Parallelen den kleinsten Winkel einschliesst und P_i, P_j, P_k in dieser Anordnung die drei auf G liegenden Mengenpunkte. Die zur Parallelenschar gehörige Verbindungsgerade von P_1 und P_j enthält noch einen Punkt P_m der Menge. Nun bildet aber entweder die Verbindungsgerade durch P_i und P_m oder jene durch P_k und P_m mit den Parallelen einen kleinern Winkel als G, im Widerspruch zur Konstruktion.

2 ist zu **1** dual.

3 erscheint als Korollar zu **1**, wenn man durch Inversion an einem Kreis mit einem Mengenpunkt als Zentrum alle Kreise durch diesen Punkt in Geraden übergehen lässt, die die Voraussetzungen von **1** erfüllen.

4. Der kleinste Deckkreis (d.h. der kleinste abgeschlossene Kreisbereich, der alle Punkte der Menge bedeckt) enthält auf seiner Peripherie Mengenpunkte, die keinen Halbkreisbogen frei lassen, u.a. einen Punkt P. Weitere Mengenpunkte, z.B. ein Punkt Q, können nicht im Innern liegen, da Spiegelung an der Symmetrieachse von P und Q zeigt, dass dann auch ausserhalb des Deckkreises Mengenpunkte wären. — Ist die Zahl der Mengenpunkte endlich und > 2, so sei φ der kleinste Winkel zwischen je zwei verschiedenen Symmetrieachsen der Menge. Spiegelung an diesen beiden Achsen kommt einer Drehung um 2φ gleich, also ist die Menge drehsymmetrisch bezüglich des Winkels 2φ. Die n-Ecke mit dem Zentriwinkel $\varphi = 2\pi/n$ erweisen sich jetzt als die einzigen Mengen mit diesen Dreh- und Spiegelsymmetrieeigenschaften, so dass jede endliche Menge mit den in **4** genannten Eigenschaften die Eckpunktmenge eines regulären Vielecks ist.

5. Gibt es dem Gitter eingelagerte reguläre n-Ecke (n fest), dann auch solche mit kleinster Seitenlänge, weil hiefür nur die Werte $\sqrt{p^2+q^2}$ (p, q ganz) in Frage kommen. Diese Existenz vorausgesetzt, seien $P_1, P_2, \ldots, P_n$ die Ecken eines kleinsten regulären Gitter-n-ecks in ihrer natürlichen Reihenfolge. Trägt man von diesen Gitterpunkten aus bzgl. die Gittervektoren $\overrightarrow{P_2 P_3}, \overrightarrow{P_3 P_4}, \ldots, \overrightarrow{P_1 P_2}$ ab, so führen ihre Endpunkte wieder auf Gitterpunkte. Für $n = 5$ und $n > 7$ bilden diese ein kleineres reguläres Gitter-n-eck, im Widerspruch zur Minimalbedingung. — Für $n = 3$ sieht man die Unmöglichkeit eines dem Gitter eingelagerten regulären n-Ecks wie folgt ein: Die Fläche $s^2\sqrt{3}/4$ wäre wegen der Ganzzahligkeit von s^2 eine irrationale Zahl, anderseits ergibt sich, etwa nach Determinantenformeln berechnet, ein rationaler Wert. Gleiches gilt von regulären Sechsecken mit der Fläche $3s^2\sqrt{3}/2$.

6. Die Fläche $s^2 \sin\alpha$ eines Gitterrhombus ist, nach Determinantenformeln berechnet, ganzzahlig. Nach **8** ist daher $\alpha = \pi/6$ oder $\alpha = \pi/2$. Die erste Möglichkeit entfällt, da bei einer Drehung um $\pi/2$ um eine Ecke der Rhombus wieder in einen Gitterrhombus überginge (jeder Gitterpunkt geht dabei in einen Gitterpunkt über!); dabei wäre ein reguläres Gitterdreieck zu erkennen, im Widerspruch zu **5**.

7. Einfache Folgerung von **8.**

8. Man beachte, dass die Argumentation des Beweises von **5** für $n = 5$ und $n \geqslant 7$ auch in jedem Rechteckgitter möglich ist. Aus dieser schärfern Aussage, dass sich in einem Rechteckgitter von den regulären Vielecken nur Dreiecke, Vierecke und Sechsecke einlagern lassen, ergibt sich **8.** In der Tat: Sei $\alpha = (m/n)2\pi$ und der Bruch m/n nicht kürzbar. Ist $\cos\alpha$ rational, dann ist nach goniometrischen Formeln $\cos\nu\alpha = a_\nu$, $\sin\nu\alpha = b_\nu \sin\alpha$ mit rationalen a_ν, b_ν ($\nu = 1, 2, \ldots, n$). N sei der gemeinsame Nenner der $2n$ Werte a_ν, b_ν. Erzeugt ein Rechteck der Länge $1/\mathrm{N}$ und der Breite $(\sin\alpha)/\mathrm{N}$ ein Rechteckgitter, so fallen daher von der Einheitskreislinie um einen Gitterpunkt alle Punkte mit den Phasen $\nu\alpha$ ($\nu = 1, \ldots, n$) auf Gitterpunkte. Anderseits bilden diese Punkte wegen $\alpha = (m/n)2\pi$ ein reguläres n-Eck. Wie eingangs erwähnt, folgt daraus, dass n einen der Werte 1, 2, 3, 4, 6 besitzt. Zusammen mit der Nebenbedingung $0 < \alpha < \pi/2$ ergibt sich $\alpha = \pi/3$.

9. Ist eine Punktmenge mit lauter ganzzahligen Punktdistanzen gegeben, in der es drei nicht auf einer Geraden liegende Punkte A, B, C gibt, und bezeichnet k die grössere der Distanzen d (AB), d (BC), so gibt es höchstens $4\,(k + 1)^2$, also endlich viele Punkte P so, dass d (PA) — d (PB) und d (PB) — d (PC) ganzzahlig ausfallen. Es ist nämlich $|\,d\,(\mathrm{PA}) - d\,(\mathrm{PB})\,| < d\,(\mathrm{AB})$ und kann somit nur einen der Werte $0, 1, \ldots, k$ annehmen, so dass P auf einer von $k + 1$ Hyperbeln liegt. Ebenso liegt P auf einer von $k + 1$ Hyperbeln, die durch B und C bestimmt werden. All diese (verschiedenen) Hyperbeln schneiden sich in höchstens $4\,(k + 1)^2$ Punkten.

10. Die Aussage „dann" ist trivial. Die Aussage „nur dann" ist klar für endliche Punktmengen, da deren konvexe Hülle ein konvexes Polygon ist, dessen Ecken zur Menge gehören; wird dieses von einer Ecke aus trianguliert, so liegt jeder Punkt in einem der Teildreiecke, also in der konvexen Hülle von drei Punkten der Menge. Es bleibt für unendliche Punktmengen M zu zeigen, dass die Menge N aller Punkte, die schon in der konvexen Hülle endlich vieler Punkte aus M enthalten sind, mindestens so umfassend ist wie die konvexe Hülle $\overline{\mathrm{M}}$ von M. In der Tat: N enthält, wie man sich sofort zurechtlegt, mit zwei Punkten auch jeden Punkt der Verbindungsstrecke, ferner enthält N jeden Punkt von M. Da $\overline{\mathrm{M}}$ als kleinste Menge mit diesen Eigenschaften definiert wurde, ist der Beweis abgeschlossen.

11. Nicht trivial ist einzig die Aussage „nur dann". Ein innerer Punkt P der konvexen Hülle $\overline{\mathrm{M}}$ von M ist auch innerer Punkt eines Dreiecks mit Ecken in $\overline{\mathrm{M}}$. Da jede dieser Ecken nach **10** in der konvexen Hülle von drei Punkten aus M liegt, ist das ganze Dreieck in der konvexen Hülle von endlich vielen Punkten aus M enthalten. Wird dieses konvexe Vieleck mit Ecken aus M von einer Ecke aus trianguliert, so ist P in der Vereinigung zweier aneinandergrenzender Dreiecke als innerer Punkt enthalten, also in der konvexen Hülle von vier Punkten aus M.

12. Die Aussage „nur dann" ist trivial. Es bleibt zu zeigen, dass zu zwei nicht separierbaren Mengen M und N zwei ebensolche Teilmengen M' und N' mit gesamthaft höchstens vier Punkten angegeben werden können. Nun sind M und N genau dann nicht separierbar, wenn ihre konvexen Hüllen $\overline{M}$ und $\overline{N}$ Punkte gemeinsam haben. Zu einem solchen gemeinsamen Punkt gibt es nach **10** zwei je dreipunktige Mengen M'' und N'', deren konvexe Hüllen $\overline{M''}$ und $\overline{N''}$ diesen Punkt gemeinsam haben. Nun ist entweder eine dieser konvexen Hüllen in der andern enthalten, etwa $\overline{M''}$ in $\overline{N''}$, oder die Dreiecke $\overline{M''}$ und $\overline{N''}$ besitzen sich schneidende Randstrecken. Im ersten Falle bestehe M' aus einem der Punkte von M'', $N' = N''$; im zweiten Falle bestehe M' und N' je aus den beiden Endpunkten des sich schneidenden Streckenpaares. In beiden Fällen sind M' und N' nicht separierbar, weil $\overline{M'}$ und $\overline{N'}$ Punkte gemeinsam haben.

13. Man wähle vier Punkte der gegebenen Menge M. Bildet ihre konvexe Hülle nicht ein (nichtentartetes) Viereck, so ist ein Punkt N in der konvexen Hülle der übrigen drei Punkte, umsomehr in der konvexen Hülle von M — N enthalten, und die beiden fremden Mengen N und M — N sind nicht separierbar. Bildet hingegen die konvexe Hülle ein Viereck, so bestehe N aus den Endpunkten einer Diagonale. N und M — N bilden wieder fremde, nichtseparierbare Teilmengen von M.

14. Für endlich viele Eibereiche folgt der Hellysche Satz durch vollständige Induktion aus folgendem Hilfssatz: *Es sei $k \geqslant 4$. Haben je $k - 1$ von k Eibereichen Punkte gemeinsam, so haben alle k Eibereiche Punkte gemeinsam.* Beweis: $C_1, \ldots, C_k$ seien die k Eibereiche und P_i bezeichne einen Punkt, der in allen ausser eventuell in C_i enthalten ist. Nach **13** lassen sich die Punkte P_i

$(i = 1, \ldots, k)$ in zwei fremde Gruppen $M' = \left\{P_{i_1}, \ldots, P_{i_m}\right\}$ und $M'' = \left\{P_{j_1}, \ldots, P_{j_n}\right\}$ aufteilem, so dass deren konvexe Hüllen M' und M'' einen Punkt P gemeinsam haben. Nun gehört aber jeder Punkt von M' und damit wegen der Konvexität der C_i auch $\overline{M'}$ zu allen Eibereichen ausser eventuell $C_{i_1}, \ldots, C_{i_m}$, ebenso $\overline{M''}$ zu allen ausser eventuell $C_{i_1}, \ldots, C_{j_n}$. Der Punkt P gehört zu $\overline{M'}$ und $\overline{M''}$, somit zu allen Eibereichen ohne Ausnahme.

Wäre in einem unendlichen Eibereichsystem kein Punkt allen Bereichen gemeinsam, so könnte man zu jedem Punkt des Bereichs C_1 des Systems einen weitern Bereich C_i des Systems angeben, der diesen Punkt und damit auch eine ganze Kreisumgebung nicht trifft; C_i und diese Umgebung seien einander zugeordnet. Nach dem Theorem von Heine-Borel genügen endlich viele dieser Kreisumgebungen, um C_1 zu überdecken. Die ihnen zugeordneten endlich vielen Eibereiche C_i und C_1 haben nach Konstruktion keinen Punkt gemeinsam, im Widerspruch zum obigen Ergebnis, dass endlich viele Eibereiche des Systems einen Punkt gemeinsam haben, sobald die Voraussetzungen von **14** erfüllt sind.

15 ergibt sich aus **14**, wenn man einsieht, dass drei Rechtecke R_1, R_2, R_3 immer dann Punkte gemeinsam haben, wenn dies schon für je zwei zutrifft. In der Tat: Bezeichnet $P_i\,(x_i, y_i)$ in einem kartesischen Koordinatensystem, dessen Achsen parallel zu den Rechtecken liegen, einen Punkt, der in allen drei Rechtecken ausser eventuell in R_i $(i = 1, 2, 3)$ enthalten ist, also in R_j und R_k, so bemerkt man, dass mit P_i und P_j nicht nur die ganze Verbindungsstrecke in R_k enthalten ist, sondern das ganze achsenparallele Rechteck über ihr, also alle $P\,(x, y)$, für die x im Intervall (x_i, x_j) und y in (y_i, y_j) liegt. Wählt man die Numerierung so, dass $x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_3$ und $y_i \leqslant y_j \leqslant y_k$ gilt, so erfüllt $P\,(x_2, y_j)$ diese Bedingungen für jedes der drei Rechtecke, so dass er allen angehört.

16 ist Korollar zu **15**, weil Rechtecke zu Strecken entarten können.

17 kann auf **14** zurückgeführt werden. Eine Menge von Kreisbögen, jeder kleiner als ein Halbkreis, hat nämlich dann und nur dann einen Punkt gemeinsam, wenn dasselbe von den zugehörigen Kreissegmenten gilt, und dafür genügt nach **14**, dass je drei einen Punkt gemeinsam haben.

18 folgt aus **16.** In der Tat lassen Bogen, jeder kleiner als ein Drittelskreis und paarweise nicht punktfremd, einen Peripheriepunkt unbedeckt, z.B. den zu einer Bogenmitte antipodischen. Der Kreis kann somit hier aufgeschnitten und auf eine Gerade abgewickelt werden, so dass jeder Bogen in eine Strecke übergeht.

19. Es sei G (α) die gerichtete Gerade durch das Kreiszentrum, die mit einer festen Richtung den Winkel α einschliesst. Werden die gegebenen Bogen, die paarweise Punkte gemeinsam haben, auf G (α) orthogonal projiziert, so haben die Bildstrecken dieselbe Eigenschaft. Somit ist der Durchschnitt all dieser Strecken ein Punkt oder eine Strecke, jedenfalls aber nicht leer (**16**). Für mindestens einen Winkel α_0 enthält D (α) das Kreiszentrum. In der Tat: D (α) und D $(\alpha + \pi)$ liegen in ihren gerichteten Geraden spiegelsymmetrisch bezüglich Z; da nun jede Orthogonalprojektion eines Bogens und also auch D (α) stetig mit α ändert, muss D (α) bei einer Drehung der Geraden um π für eine Lage α_0 das Zentrum bedecken. G $(\alpha_0 + \pi/2)$, die projizierende Gerade durch Z, ist dann eine Durchmessergerade, die alle Bogen trifft.

Die Varianten **20-28** ergeben sich aus den grundlegenden Aussagen **14**, **16**, **17**, **19** durch mannigfache Abbildungsmethoden.

20-22. Die Lage eines gegebenen Eibereiches A lässt sich bei Verschiebungen durch die Lage eines starr mit ihm verbundenen Punktes P charakterisieren. Ohne Mühe bestätigt man, dass P einen Eibereich B* durchläuft, wenn der bewegliche Eibereich A alle Lagen einnimmt, bei denen er in einem Eibereich B enthalten ist. Gleiches gilt von allen Lagen, bei denen A einen Eibereich B trifft, bzw. umschliesst. Jeder Eibereich bildet sich auf diese Weise in einen Eibereich B* ab, und bei diesen Abbildungen gehen die Aussagen **20-22** in **14** über.

23. Werden Eibereiche mit paarweise gemeinsamen Punkten durch Zentralprojektion auf eine Kreislinie abgebildet, so gehen sie in Bogen über, die **19** erfüllen. Die projizierende Gerade durch die in allen Bildbogen enthaltenen antipodischen Punkte trifft alle Eibereiche des Systems.

24. Orthogonalprojektion der Eibereiche erzeugt auf einer Geraden eine Streckenmenge, die **16** erfüllt. Die projizierende Gerade durch den in allen Strecken der Menge enthaltenen Punkt trifft alle Eibereiche der Menge.

25. Gibt es unter den parallelen Rechtecken der Menge zwei, die nur eine einzige positiv orientierte Treffgerade gemeinsam haben, so ist die Aussage evident, da diese Gerade jedes weitere Rechteck der Menge treffen muss. Andernfalls dürfen wir voraussetzen, dass je drei Rechtecke der Menge eine positiv orientierte Treffgerade besitzen, die zu keiner Rechteckseite parallel ist. Dasselbe gilt dann von je endlich vielen Rechtecken der Menge. In der Tat: Man lege parallel zu den Rechtecken orientiert zwei Parallelen und charakterisiere ihre Punkte durch eine Längenkoordinate in ihnen. Jede Transversale lässt sich dann in einen Punkt einer Hilfsebene abbilden, indem man die linearen Koordinaten ihrer Schnittpunkte mit den Parallelen als kartesische Koordinaten der Hilfsebene deutet. Die Menge aller ansteigenden Geraden, welche ein Rechteck der Menge treffen, geht dabei in eine konvexe, abgeschlossene, aber nicht beschränkte Punktmenge über. Je drei dieser Mengen haben nach unsern Voraussetzungen im Endlichen Punkte gemeinsam. Greift man endlich viele dieser konvexen Mengen heraus, so sind ihre Durchschnitte mit einem ausreichend grossen Kreis Eibereiche, die nach **14** einen Punkt gemeinsam haben. Die diesem Punkt entsprechende Gerade trifft die herausgegriffenen endlich vielen Rechtecke. — Um den Beweis auch für unendliche Rechteckmengen zu führen (ohne eine stärkere Variante von **14** zu benutzen) brauchen wir vom bisher Bewiesenen nur, dass je vier Rechtecke der Menge eine gemeinsame Treffgerade aufweisen. Lässt man nun jeder Geraden, die mit den gelegten zwei Parallelen den Winkel φ einschliesst, auf einer Kreisperipherie den Punkt mit Phase φ entsprechen, so bildet sich die Menge aller ansteigenden Geraden, welche zwei herausgegriffene Rechtecke der Menge treffen, in einen Bogen kleiner als ein Drittelskreis ab. Diese Abbildung, für alle Rechteckpaare der Menge ausgeführt, liefert eine Bogenmenge mit paarweise gemeinsamen Punkten, weil je vier Rechtecke eine gemeinsame Treffgerade aufweisen. Der allen Bogen gemeinsame Punkt (**18**) entspricht einer Geraden, zu der je zwei Rechtecke der Menge eine parallele Treffgerade gemeinsam haben; mit andern Worten: durch Projektionsstrahlen parallel zu dieser Geraden bildet sich die Rechteckmenge auf einer Transversalen als Streckenmenge ab, die nach **16** einen Punkt gemeinsam hat. Der Projektionsstrahl durch ihn trifft alle Rechtecke der Menge.

26. P sei ein Peripheriepunkt eines Kreises. Zu jeder Geraden G der Ebene lege man eine Parallele durch P; ihr zweiter Durchstosspunkt mit dem Kreis sei das Bild der Geraden G. Bei dieser Abbildung geht die Menge der Geraden, welche zwei feste Eibereiche treffen, in einen Bogen über. Führt man dies für alle Bereichpaare einer Menge von Eibereichen, die zu je vier eine Treffgerade gemeinsam haben, durch, so erhält man eine Bogenmenge mit paarweise gemeinsamen Punkte. Dem antipodischen Punktepaar, das alle Bogen trifft (**19**), entsprechen zwei orthogonale Richtungen, so dass man findet: *Haben je vier Eibereiche einer Eibereichmenge eine gemeinsame Treffgerade, so gibt es zwei orthogonale Richtungen derart, dass je zwei Eibereiche der Menge eine gemeinsame Treffgerade mit einer dieser Richtungen aufweisen.* — Sind nun die Eibereiche dieser Menge zueinander homothetisch, so treffen die vier Geraden der erwähnten Richtungen, die ein einem Bereich der Menge umbeschriebenes Rechteck bilden, alle nichtkleinern Bereiche der Menge. Gibt es also in der Menge einen kleinsten Eibereich, so treffen die ihm derart umbeschriebenen Geraden alle Bereiche der Menge. Gibt es in der Menge keinen kleinsten Eibereich, so führen einige zusätzliche Überlegungen über das Konvergenzverhalten nach Grösse und Lage der Bereiche zum gewünschten Resultat. Sind die Eibereiche nicht nur homothetisch, sondern zudem kongruent, so lässt sich weiter einsehen, dass stets schon drei von diesen vier Treffgeraden alle Bereiche treffen.

27. Eine Gerade in der Separationsrichtung werde als x-Achse ausgezeichnet. Jede andere Gerade der Ebene bildet mit der x-Achse einen Winkel $0 \leqslant \varphi < \pi$ gemessen im positiven Drehsinn. Der Menge aller Geraden, welche zwei Eibereiche des Systems, etwa A und B treffen, entspricht auf einer φ-Achse ein Winkelintervall zwischen 0 und π, das wir mit (AB) bzw. analog bezeichnen. Wir behaupten, dass je zwei dieser Winkelintervalle Punkte gemeinsam haben. Dies vorausgesetzt, schliesst man mit **16**, dass ein Winkel φ_0 existiert, so dass je zwei Eibereiche des Systems durch eine Gerade der Richtung φ_0 getroffen werden können. Mit andern Worten: die Parallelprojektionen der Eibereiche in dieser Richtung auf die x-Achse bilden eine Streckenmenge mit paarweise gemeinsamen Punkten. Die projizierende Gerade durch den allen Strecken gemeinsamen Punkt (**16**) trifft dann alle Eibereiche des Systems. — Es bleibt nachzutragen, dass je zwei Winkelintervalle Punkte gemeinsam haben. Für die Intervalle (AB), (BC) (bzw. analog) wird dies durch die Voraussetzung gemeinsamer Treffgeraden zu A, B, C gesichert. Hätten aber zwei Intervalle, etwa (AB), (CD) keinen Punkt gemeinsam, so zeigt sich ein Widerspruch wie folgt: Jedes der Intervalle (AC), (AD), (BC), (BD) hat sowohl mit (AB) wie mit (CD) Punkte gemeinsam, so dass für einen Winkel φ' „zwischen" (AB) und (CD) folgende Sachlage eintritt: Durch Geraden der Richtung φ' sind die Eibereiche A und B, ebenfalls C und D separierbar (daraus folgt die Separierbarkeit eines weitern Paares durch jede dieser beiden Separationsgeraden!), nicht aber A und C, A und D, B und C, B und D. Dies ist offensichtlich ein Widerspruch.

28. Durch die beim Beweis **26** benutzte Abbildung wird **28** auf die beim Beweis **18** erwähnte Sachlage zurückgeführt, dass Kreisbogen mit paarweise gemeinsamen Punkten, jeder kleiner als ein Drittelskreis, einen Peripheriepunkt unbedeckt lassen.

29. Spezialfall von **21**.

30. Die Geraden können durch ausreichend lange Strecken ersetzt werden, wodurch ein Spezialfall von **21** entsteht.

31. Bei Berücksichtigung von **29** genügt es, die Aussage für eine dreipunktige Menge vom Durchmesser 1 zu beweisen. Bildet diese ein stumpfwinkliges Dreieck, so ist dessen längste Seite Deckkreisdurchmesser, so dass hier sogar $R \leqslant 1/2$ zutrifft. Bestimmt die dreipunktige Menge ein spitzwinkliges Dreieck, so wird der Deckkreis vom Umkreis gebildet, dessen Durchmesser bekanntlich durch $2R = a/\sin\alpha$ bestimmt ist; a ist irgend eine Dreieckseite, α der gegenüberliegende Winkel. In jedem Dreieck gibt es einen Winkel $\alpha \geqslant \pi/3$, so dass zugleich $\sin\alpha \geqslant 1/2\sqrt{3}$ und $a \leqslant 1$ gilt. Also ist $2R = a/\sin\alpha \leqslant 2/\sqrt{3}$.

32 braucht ebenfalls nur noch für drei Geraden mit Durchmesser 1 bewiesen zu werden. Diese bilden ein Dreieck mit Umfang $U \leqslant 3$, das dem kleinsten Treffkreis umbeschrieben ist. Da das reguläre Dreieck mit Umfang $6r\sqrt{3}$ das umfangkleinste Dreieck ist, das sich einem Kreis mit Radius r umbeschreiben lässt, gilt $6r\sqrt{3} \leqslant U \leqslant 3$, also $r \leqslant 1/2\sqrt{3}$.

33. Die Punktmenge darf als abgeschlossen vorausgesetzt werden. Ist S ein reguläres Umdreieck (so dass jede Seite einen Mengenpunkt enthält) und S* ein solches in gespiegelter Lage, so ist entweder S oder S* ein reguläres Dreieck der Seitenlänge $s \leqslant \sqrt{3}$. Fällt man nämlich von irgend einem Punkt, der in S und S* enthalten ist, die Lote auf die Seiten von S bzw. S*, so ist deren Summe nach einem planimetrischen Satz gleich der Höhe von S bzw. S*. Die Summe je eines Lotes auf S und des entsprechenden auf S* ist wegen der Durchmesserbedingung $\leqslant 1$, so dass eines der Dreiecke eine Höhe $\leqslant 3/2$ aufweist. Seine Seiten betragen höchstens $\sqrt{3}$.

34. Anschliessend an den Beweis **33** stellen wir fest, dass die Seitenlänge des regulären Umdreiecks S eine stetige Funktion der Basisrichtung ist und bei Drehung um π in die von S* übergeht. Daher sind S und S* für eine spezielle Richtung gleich gross; ihr Durchschnitt, in dem die Menge mit $D = 1$ enthalten ist, bildet dann ein (eventuell entartetes) zentralsymmetrisches Sechseck, bei dem parallele Seiten einen Abstand $\leqslant 1$ haben. Es ist ganz im regulären Sechseck mit demselben Symmetriezentrum und denselben Seitenrichtungen enthalten, dessen parallele Seiten den Abstand 1 aufweisen. Dieses reguläre Sechseck besitzt die Seitenlänge $1/\sqrt{3}$ und enthält die gegebene Menge.

35 ergibt sich ausgehend von **34**, wenn in dem der Menge vom Durchmesser 1 umbeschriebenen regulären Sechseck der Seitenlänge $1/\sqrt{3}$ vom Zentrum aus drei Lote mit Zwischenwinkeln $2\pi/3$ auf drei Seiten gefällt werden. Dadurch zerfällt das Sechseck in drei kongruente Fünfecke vom Durchmesser $\sqrt{3}/2$, die die gegebene Menge überdecken.

36. Es sei $n \geqslant 4$ und die Menge $P_1, \ldots, P_n$ habe den Durchmesser $D = 1$. Zu zwei Punkten P_i, P_k mit Abstand 1 zeichne man stets die Verbindungsstrecke $P_i\, P_k$. Gehen dann von jedem P_i höchstens zwei Strecken aus, so ist die Streckenzahl $\leqslant n$, wie behauptet. Existiert aber ein Punkt, etwa P_1, von dem mindestens 3 Strecken, etwa zu P_i, P_j, P_k, auslaufen, so sei P_j im spitzen Winkelraum $P_i\, P_1\, P_k$ enthalten. Ist nun $d\,(P_j, P_m) = 1$, so muss $P_j\, P_m$ sowohl $P_1\, P_i$ wie auch $P_1\, P_k$ treffen, da andernfalls $D > 1$ wäre. Daraus folgt $P_m = P_1$, d.h. P_j kann nur von P_1 den Abstand 1 haben. Lässt man P_j weg, so fällt eine einzige Verbindungsstrecke dahin. Durch vollständige Induktion folgt daraus **36.** — Da also unter n Punkten mit $D = 1$ stets einer von höchstens zwei andern den Abstand 1 hat, so folgt durch Induktion auch der Borsuksche Satz. Denn jener Punkt lässt sich derjenigen der drei Teilmengen der restlichen $n - 1$ Punkte zugesellen, die die beiden weitferntesten Punkte nicht enthält; dadurch bleiben alle Durchmesser < 1.

37. Die Mittelpunkte der Kreise vom Radius $R = 1$ mit paarweise gemeinsamen Punkten bilden eine Punktmenge vom Durchmesser $D \leqslant 2$. Diese kann nach **34** durch ein reguläres Sechseck der Seitenlänge $2/\sqrt{3}$ überdeckt werden. In diesem Sechseck lassen sich drei Punkte vom gegenseitigen Abstand 1, nämlich drei Diagonalenmittelpunkte, angeben, so dass jeder Sechseckpunkt, speziell jedes der Kreiszentren, von einem dieser drei Punkte einen Abstand $\leqslant 1$ aufweist. Demnach ist stets mindestens einer dieser Punkte in jedem der gegebenen Kreise enthalten.

LITERATURVERZEICHNIS

[1] Altwegg, M. Ein Satz über Mengen von Punkten mit ganzzahliger Entfernung. *Elemente der Math.*, *7*, 56-58, 1952.

[2] Anning, N. H. and P. Erdös. Integral distances. *Bull. Amer. Math. Soc.*, *51*, 598-600, 1945.

[3] Balasubramanian, N. A theorem on sets of points. *Proc. Nat. Inst. Sci. India*, *19*, 839, 1953.

[4] Bernheim, B. and Th. Motzkin. A criterium for divisibility of n-gons into k-gons. *Comment. Math. Helvetici*, *22*, 93-102, 1949.

[5] Borsuk, K. Drei Sätze über die n-dimensionale euklidische Sphäre. *Fundamenta Math.*, *20*, 177-190, 1933.

[6] de Bruijn, N. G. and P. Erdös. On a combinatorial problem. *Indagationes Math.*, *10*, 421-423, 1948.

[7] Coxeter, H. S. M. A problem of collinear points. *Amer. Math. Monthly*, *55*, 26-28, 1948.

[8] Delachet, A. *La géométrie contemporaine*. Paris 1950, 128 S.

[9] Dirac, G. A. Collinearity properties of sets of points. *Quart. J. Math. Oxford*, Ser. (2), *2*, 221-227, 1951.

[10] Eggleston, H. G. Covering a three-dimensional set with sets of smaller diameter. *J. London Math. Soc.*, *30*, 11-24, 1955.

[11] Erdös, P. Problem No. 4065. *Amer. Math. Monthly*, *51*, 169-171 1944.

[12] —— Integral distances. *Bull. Amer. Math. Soc.*, *51*, 996, 1945.

[13] —— On sets of distances of n points. *Amer. Math. Monthly*, *53*, 248-250, 1946.

[14] Fejes Tóth, L. *Lagerungen in der Ebene, auf der Kugel und im Raum.* Berlin, Göttingen, Heidelberg 1953, 198 S.

[15] Gale, D. On inscribing n-dimensional sets in a regular n-simplex. *Proc. Amer. Math. Soc.*, *4*, 222-225, 1953.

[16] Gupta, H. Non-concyclic sets of points. *Proc. Nat. Inst. Sci. India*, *19*, 315-316, 1953.

[17] Gustin, W. On the interior of the convex hull of an euclidean set. *Bull. Amer. Math. Soc.*, *53*, 299-301, 1947.

[18] Hadwiger, H. Über die rationalen Hauptwinkel der Goniometrie. *Elemente der Math.*, *1*, 98-100, 1946.

[19] —— Eulers Charakteristik und kombinatorische Geometrie. *J. reine angew. Math.* *194*, 101-110, 1955.

[20] Hanner, O. and H. Radström. A generalization of a theorem of Fenchel. *Proc. Amer. Math. Soc.*, *2*, 589-593, 1951.

[21] Helly, E. Über Mengen konvexer Körper mit gemeinschaftlichen Punkten. *Jber. Deutsch. Math. Verein.*, *32*, 175-176, 1923.

[22] Hopf, H. Über Zusammenhänge zwischen Topologie und Metrik im Rahmen der elementaren Geometrie. *Math. Phys. Semesterber.*, *3*, 16-29, 1953.

[23] —— und E. Pannwitz. Aufgabe Nr. 167. *Jahresber. Deutsch. Math. Verein.*, *43*, 114 kursiv, 1934; *45*, 33 kursiv, 1936.

[24] Horn, A. Some generalizations of Helly's theorem on convex sets. *Bull. Amer. Math. Soc.*, *55*, 923-929, 1949.

[25] Horn, A. and F. A. Valentine. Some properties of L-sets in the plane. *Duke Math. J.*, *16*, 131-140, 1949.

[26] Jung, H. W. E. Über die kleinste Kugel, die eine räumliche Figur einschliesst. *J. reine angew. Math.*, *123*, 241-257, 1901.

[27] Karlin, S. and L. S. Shapley. Some applications of a theorem on convex functions. *Ann. Math. Princeton*, Ser. (2), *52*, 148-153, 1950.

[28] Kelly, L. M. Covering problems. *Nat. Math. Mag.*, *19*, 123-130, 1944.

[29] Kirchberger, P. Über Tschebyschefsche Annäherungsmethoden. *Math. Ann.*, *57*, 509-540, 1903.

[30] Klee, V. L., jr. On certain intersection properties of convex sets. *Canadian J. Math.*, *3*, 272-275, 1951.

[31] —— Brief an H. Hadwiger vom 20. Februar 1953.

[32] —— The critical set of a convex body. *Amer. J. of Math.*, *75*, 178-188, 1953.

[33] —— Brief an P. Vincensini vom 27. September 1954.

[34] —— Common secants for plane convex sets. *Proc. Amer. Math. Soc.*, *5*, 639-641, 1954.

[35] König, D. Über konvexe Körper. *Math. Z.*, *14*, 208-210, 1922.

[36] Levi, F. W. On Helly's theorem and the axioms of convexity. *J. Indian. Math. Soc.*, *15*, 65-76, 1951.

[37] —— Eine Ergänzung zum Hellyschen Satze. *Archiv der Math.*, *4*, 222-224, 1953.

[38] Moser, L. On the different distances determined by *n* points. *Amer. Math. Monthly*, *59*, 85-91, 1952.

[39] Motzkin, Th. The lines and planes connecting the points of a finite set. *Trans. Amer. Math. Soc.*, *70*, 451-464, 1951.

[40] Müller, A. Auf einem Kreis liegende Punktmengen ganzzahliger Entfernungen. *Elemente der Math.*, *8*, 37-38, 1953.

[41] Nagy, B. Sz.-. Ein Satz über Parallelverschiebungen konvexer Körper. *Acta Scient. Math.*, *15*, 169-177, 1954.

[42] Pál, J. Über ein elementares Variationsproblem. *Math.-fys. Medd., Danske Vid. Selsk.*, *3*, 1920, 35 S.

[43] Pólya, G. und G. Szegö. *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis.* Berlin 1925, Bd. 1, 338 S.; Bd. 2, 408 S.

[44] Rademacher, H. and I. J. Schoenberg. Helly's theorems on convex domains and Tchebycheff's approximation problem. *Canadian J. Math.*, *2*, 245-256, 1950.

[45] —— und O. Toeplitz. *Von Zahlen und Figuren.* Berlin 1930, 164 S.

[46] Rado, R. Theorems on the intersection of convex sets of points. *J. London Math. Soc.*, *27*, 320-328, 1952.

[47] —— A theorem on sequences of convex sets. *Quart. J. Oxford*, Ser. (2), *3*, 183-186, 1952.

[48] Radon, J. Mengen konvexer Körper, die einen gemeinsamen Punkt enthalten. *Math. Ann.*, *83*, 113-115, 1921.

[49] Robinson, C. V. Spherical theorems of Helly's type and congruence indices of spherical caps. *Amer. J. of Math.*, *64*, 260-272, 1942.

[50] Santaló, L. A. Un teorema sobre conjuntos de paralelepipedos de aristas paralelas. *Publ. Inst. Mat. Univ. Nac. Litoral*, *2*, 49-60, 1940; *3*, 202-210, 1942.

[51] —— Sobre pares de figuras convexas. *Gaz. Mat. Lisboa*, *12*, 7-10, 1951; *14*, 6, 1953.

[52] Scherrer, W. Die Einlagerung eines regulären Vielecks in ein Gitter. *Elemente der Math.*, *1*, 97-98, 1946.

[53] Steiger, F. Zu einer Frage über Mengen von Punkten mit ganzzahliger Entfernung. *Elemente der Math.*, *8*, 66-67, 1953.

[54] Steinitz, E. Bedingt konvergente Reihen und konvexe Systeme. *J. reine angew. Math.*, *143*, 128-175, 1913; *144*, 1-40, 1914; *146*, 1-52, 1916.

[55] Sylvester, J. J. Question No. 11851. *Educational Times*, *59*, 98, 1893.

[56] Trevisan, G. Una condizione di allineamento per gli insiemi infiniti di punti del piano euclideo. *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova*, *18*, 258-261, 1949.

[57] Trost, E. Bemerkung zu einem Satz über Mengen von Punkten mit ganzzahligen Entfernungen. *Elemente der Math.*, *6*, 59-60, 1951.

[58] Vincensini, P. Sur une extension d'un théorème de M. J. Radon sur les ensembles de corps convexes. *Bull. Soc. Math. France*, *67*, 115-119, 1939.

[59] —— Les ensembles d'arcs d'un même cercle dans leurs relations avec les ensembles de corps connexes du plan euclidien. *Atti IV. Congr. Un. Mat. Ital.*, *2*, 456-464, 1953.

[60] —— Sur certains ensembles d'arcs de cercle ou de calottes sphériques. *Bull. Sci. Math.*, (2), *77*, 120-128, 1953.

PROBLÈMES CHOISIS DE GÉOMÉTRIE COMBINATOIRE DANS LE PLAN

H. Hadwiger et H. Debrunner, Berne

La traduction en français paraîtra dans un des prochains fascicules.

---

vide-leer-empty