Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 40 (1951-1954)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LA NOTION DE VALUATION
Autor: Jaffard, Paul
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-515808

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 10.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

LA NOTION DE VALUATION

PAR

Paul JAFFARD (Paris)

K étant un corps commutatif, on appelait primitivement *valuation* de K [45] une application φ de K dans l'ensemble R_+ des nombres réels positifs telle que:

$$\varphi(x) = 0 \rightleftarrows x = 0 \ , \tag{1}$$

$$\varphi(xy) = \varphi(x)\,\varphi(y) \ , \tag{2}$$

$$\varphi(x+y) \leqslant \varphi(x) + \varphi(y) \ . \tag{3}$$

On considère comme équivalentes (et on est amené à identifier), deux valuations φ et ψ telles que:

$$\varphi(x) \geqslant 1 \rightleftarrows \psi(x) \geqslant 1 \ .$$

La valuation φ est dite *non archimédienne* si la condition (3) peut être remplacée par la condition plus forte:

$$\varphi(x+y) \leqslant \sup\,(\varphi(x)\,,\ \varphi(y)) \ . \tag{4}$$

Elle est dite *archimédienne* dans le cas contraire.

OSTROWSKI [59] a montré que si φ est une valuation archimédienne d'un corps K, K est un sous-corps du corps C des nombres complexes et φ est équivalente à la valuation ψ de K définie par $\psi(x) = |x|$ ($|x|$ étant la valeur absolue ordinaire du nombre complexe x). Plus précisément, on a $\varphi(x) = |x|^\rho$ avec $0 < \rho \leqslant 1$. La valuation ψ est dite parfois en arithmétique *valuation à l'infini.*

Par la suite, lorsque nous parlerons d'une valuation d'un corps K nous entendrons toujours, sauf avis contraire, valuation non archimédienne.

Si φ est une valuation (non archimédienne) on peut poser:

$$v(x) = -\operatorname{Log} \varphi(x) ,$$

v est alors une application de l'ensemble K*, formé par les éléments de K différents de O, dans l'ensemble R des nombres réels de signe quelconque telle que:

$$v(xy) = v(x) + v(y) , \tag{2'}$$

$$v(x + y) \geqslant \inf. (v(x), v(y)) . \tag{4'}$$

Réciproquement la donnée d'une telle application v permet de définir une valuation de K. On dit parfois que v est une valuation *exponentielle* de K mais la plupart des auteurs (Krull, Schilling) appellent encore v une valuation de K et c'est cette forme exponentielle qui s'avère la plus maniable et la plus capable de généralisations. C'est elle que nous emploierons par la suite.

On voit que deux valuations exponentielles v et w de K sont équivalentes si et si seulement il existe un nombre réel $\lambda \neq 0$ tel que $v(x) = \lambda w(x)$ pour tout $x \in$ K. L'ensemble v(K*) est un sous-groupe additif Γ de R qui est dit *groupe de valeurs* de la valuation v.

Q étant le corps de nombres rationnels et p un nombre premier, on définit la *valuation p-adique* v_p de la façon suivante:

Si $x \in$ Q, on peut poser $x = p^\alpha \frac{a}{b}$ où a et b sont deux entiers premiers à p, α étant un entier bien déterminé (positif, négatif ou nul). On pose alors $v_p(x) = \alpha$.

On montre que toute valuation (non archimédienne) de Q est équivalente à une valuation p-adique.

Soit k un corps (commutatif) quelconque et K $= k(x)$ le corps des fractions rationnelles à coefficients dans k. Si $a \in k$ et $f \in$ K*, on peut écrire $f = (x - a)^\alpha \frac{g(x)}{h(x)}$ où f et g sont deux polynomes premiers à $x - a$. α est un entier bien déterminé tel que $-\alpha$ définisse l'ordre d'infinitude de f au point a. Si on pose $v_a(f) = \alpha$, on définit ainsi une valuation de K.

Enfin on obtient une nouvelle valuation de K $= k(x)$ en posant pour tout $f = \frac{g}{h} \in$ K*, $w(f) =$ degré de h — degré de g.

Comme $-w(f)$ définit l'ordre d'infinitude de f à l'infini, on appelle encore w la *valuation à l'infini* de K.

φ étant une valuation (archimédienne ou non) d'un corps K prise sous la forme non exponentielle, on définit une distance sur K en posant pour tout couple $x, y \in K$:

$$d(x, y) = \varphi(x - y) \ . \tag{5}$$

L'inégalité (3) exprimant alors l'inégalité du triangle, on voit que cette distance définit sur K une structure d'espace métrique (on dit parfois *ultramétrique* si φ est non archimédienne).

Un corps valué K peut donc être considéré comme un espace topologique (uniforme). Deux valuations équivalentes induisent la même topologie et réciproquement. Une telle topologie est compatible avec la structure de corps de K [1]. L'anneau complété $\hat{K}$ est un corps sur lequel on peut prolonger par continuité la valuation de K. On voit d'ailleurs que si v est une valuation non archimédienne de K (prise sous forme exponentielle), la valuation de $\hat{K}$ est encore non archimédienne, et son groupe de valeurs est le même que celui de K. Ceci tient au fait que si $\mathcal{F}$ est un filtre de Cauchy sur K auquel O n'est pas adhérent, $\exists\, U \in \mathcal{F}$ tel que $x, y \in U \longrightarrow v(x) = v(y)$.)

Si v est une valuation (non archimédienne) de K et Γ le groupe de valeurs correspondants, on peut prendre comme système fondamental de voisinages de O dans K l'ensemble $(V_\xi)_{\xi \in \Gamma}$ défini par

$$x \in V_\xi \rightleftarrows (x = 0 \quad \text{ou} \quad v(x) > \xi) \ . \tag{6}$$

Si φ est une valuation archimédienne de K, le complété $\hat{K}$ est le corps R des nombres réels dans le cas où $K \subset R$, et le corps C des nombres complexes dans le cas contraire.

Si v_p est la valuation p-adique de Q, le complété $\hat{Q}$ de Q pour cette valuation est le corps des *nombres p-adiques* de Hensel.

---

[1] C'est-à-dire que les fonctions $f(x, y) = x - y$ et $g(x, y) = xy$ sont continues par rapport à l'ensemble des variables x et y et la fonction $h(x) = \frac{1}{x}$ est continue pour $x \neq 0$.

Enfin, pour les différentes valuations du corps $K = k(x)$ que nous avons définies, les complétés sont des corps de séries formelles. On obtient en particulier le corps $k((x))$ des séries formelles en x à coefficients dans k en prenant la valuation v_0 (celle pour laquelle $a = 0$).

La notion de valuation se montre très fructueuse en géométrie algébrique. Nous n'aborderons pas ici ce point de vue, nous contentant de renvoyer pour cela le lecteur à une conférence de Van Der Waerden [77], où il trouvera également une bibliographie. Nous indiquerons seulement ici que si on considère une fonction algébrique y d'une variable x, satisfaisant à l'équation $f(x, y) = 0$, où $f(x, y)$ est un polynôme irréductible en x et y à coefficients complexes, la surface de Riemann relative à cette fonction est identique à l'ensemble (muni d'une topologie convenable) des valuations du corps $C(x, y)$ qui s'annulent sur C. C'est grâce à cette notion de valuation (non archimédienne) que l'on peut étendre la définition des surfaces de Riemann au cas des fonctions algébriques sur un corps quelconque (et non plus sur le corps des complexes). On trouvera dans l'ouvrage de Chevalley [11] une systématisation de ce point de vue algébrique inauguré par Dedekind et Weber [13] (voir aussi [19]). Une étude plus simple en est faite dans [52].

v étant une valuation (non archimédienne) d'un corps K, on voit que l'ensemble $\bar{\mathcal{O}}$ formé par O et par tous les éléments x de K* tels que $v(x) \geqslant 0$ est un *ordre* de K, c'est-à-dire un sous-anneau de K, contenant l'élément unité 1 et tel que K soit corps des quotients de cet anneau. C'est même un ordre maximal en ce sens que tout ordre de K contenant strictement $\mathcal{O}$ est confondu avec K. $\mathcal{O}$ est dit l'*anneau de la valuation* v. L'ensemble des éléments x de K tels que $x = 0$ ou $v(x) > 0$ forme un idéal maximal $\mathfrak{p}$ de l'anneau $\mathcal{O}$ qui est dit *idéal premier de la valuation*. Le corps $\mathcal{O}/\mathfrak{p} = \mathcal{K}$ est dit *corps résiduel* de la valuation v. $\mathcal{O}$ est un *anneau local*, c'est-à-dire que $\mathfrak{p}$ est son seul idéal maximal et qu'il est noethérien. Deux valuations équivalentes déterminent le même anneau de valuation et réciproquement. Etant donné un corps K et un ordre maximal $\mathcal{O}$ de K, il existe toujours une valuation v de K qui admette l'ordre $\mathcal{O}$ comme anneau de

valuation. En considérant le corps projectif $\mathcal{K}_\infty$ formé de la réunion $\mathcal{K} \cup \{\infty\}$ avec les règles:

$$a + \infty = \infty \quad \text{si} \quad a \neq \infty$$

$$a \times \infty = \infty \quad \text{si} \quad a \neq 0$$

$$1/0 = \infty \quad \text{et} \quad 1/\infty = 0$$

on voit que l'homomorphisme canonique f de $\mathcal{O}$ sur $\mathcal{K}$ se prolonge en une application (encore notée f) de K sur $\mathcal{K}_\infty$ à condition de poser $f(x) = \infty$ si $x \neq \mathcal{O}$.

f vérifie les formules suivantes (dans la mesure où elles ont un sens):

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \tag{7}$$

$$f(xy) = f(x)\, f(y) \tag{8}$$

$$f(1/x) = 1/f(x) \tag{9}$$

Une telle application f d'un corps K sur un corps projectif $\mathcal{K}_\infty$ est dite *spécialisation* de K sur $\mathcal{K}_\infty$ (ou sur $\mathcal{K}$).

On voit donc qu'à toute valuation de K correspond une spécialisation de K sur un corps $\mathcal{K}$, mais si on se donne une spécialisation f de K sur $\mathcal{K}$, il n'existe pas en général de valuation v de K qui définisse cette spécialisation f. Pour avoir cette réciproque il faut étendre, comme l'a fait KRULL [39] la notion de valuation:

On appelle valuation généralisée (ou valuation de Krull) d'un corps K (commutatif) une application v de K* sur un groupe totalement ordonné Γ [1] (groupe de valeurs) telle que l'on ait encore les égalités (2′) et (4′). Les valuations ordinaires sont celles pour lesquelles Γ est isomorphe (au sens des groupes ordonnés) à un sous-groupe du groupe additif des nombres réels. De tels sous-groupes sont dits *archimédiens* ou de *rang un*. Les valuations (non archimédiennes) ordinaires sont donc dites *valuations de rang un* ou à groupe de valeurs archimédien. Par valuation on entendra désormais une valuation généralisée.

---

[1] Un groupe abélien G est dit ordonné (resp. *totalement*) s'il existe une relation d'ordre partielle (resp. totale) sur G, notée $\leq$, telle que $a \leq b$ entraîne $a + x \leq b + x$ pour tout $x \in$ G.

Si v est une valuation (généralisée) d'un corps K, on définit encore un ordre $\mathcal{O}$ de K qui est dit anneau de la valuation v, un idéal premier $\mathfrak{p}$ (idéal premier de la valuation) et une spécialisation de K sur $\mathcal{K}_\infty = (\mathcal{O}/\mathfrak{p})_\infty$. $\mathcal{K}$ est dit le *corps résiduel* de la valuation. $\mathcal{O}$ est un anneau local au sens large, c'est-à-dire que $\mathfrak{p}$ est son seul idéal maximal, mais $\mathcal{O}$ n'est noethérien que si v est une valuation de rang un.

Deux valuations v et v' d'un corps K ayant pour groupes de valeurs respectifs Γ et Γ' sont considérées comme équivalentes s'il existe un isomorphisme de groupe ordonné, σ, de Γ sur Γ' tel que, pour tout $x \in K^*$, on ait $v'(x) = \sigma v(x)$. Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que les anneaux de ces deux valuations soient les mêmes.

Etant donné un ordre $\mathcal{O}$ d'un corps K, la condition nécessaire et suffisante pour qu'il soit l'anneau d'une valuation définie sur K est que pour tout $x \in K$, $x \in \mathcal{O}$ entraîne $1/x \in \mathcal{O}$. Krull ([40], § 5) donne des relations entre des propriétés de l'anneau de valuation $\mathcal{O}$ et la valuation correspondante.

Si v est une valuation d'un corps K, on peut encore définir une topologie sur K en prenant pour famille fondamentale de voisinages de O celle définie par la formule (6) qui s'étend sans difficulté au cas où la valuation n'est plus de rang un. Ici encore K est un corps topologique et son complété $\hat{K}$ est un corps. Mais ici deux valuations non équivalentes peuvent induire la même topologie.

Etant donnés un corps K muni d'une valuation v, et un surcorps quelconque K′ de K, le théorème sur le prolongement des spécialisations montre que l'on peut toujours trouver sur K′ une valuation v' qui prolonge v. Le corps résiduel $\mathcal{K}'$ de v' peut alors être considéré comme un surcorps du corps résiduel $\mathcal{K}$ de v et le groupe de valeurs Γ de v est un sous-groupe du groupe de valeurs Γ' de v'. Le degré $[\mathcal{K}' : \mathcal{K}]$ s'il est fini est appelé le *degré d'inertie* de l'extension K′/K pour la valuation v', et l'index $[\Gamma' : \Gamma]$, s'il est fini, est appelé l'*indice de ramification.*

La valuation v peut en général se prolonger de plusieurs manières à K′, et même d'un grand nombre de façons si K′ est une extension transcendante de K. Toutefois, si K′ est une extension algébrique, le prolongement ne peut se faire que

d'une manière si K vérifie le lemme de Hensel[1]. Un tel corps K est dit *relativement complet*. (On peut d'ailleurs montrer que si pour toute extension algébrique K′ de K, v ne peut se prolonger que d'une manière à K′, alors K est relativement complet.) Si v est une valuation de rang un, le complété $\hat{K}$ de K est relativement complet. Il n'en est plus toujours ainsi si v n'est plus de rang un, mais on peut montrer dans ce cas qu'il existe toujours une extension immédiate K′ de K (c'est-à-dire un surcorps K′ de K muni d'une valuation v' qui prolonge v et telle que le degré d'inertie et l'indice de ramification correspondants soient tous deux égaux à un) qui soit relativement complète.

L'étude des extensions algébriques d'un corps relativement complet (étude de l'inertie et des divers groupes de ramification) se trouve exposée par Ostrowski [60] dans le cas d'une valuation de rang un. Schilling ([68] et [70]) a poursuivi cette étude dans le cas d'une valuation de rang quelconque. Dans le cas où K est un *corps local*, c'est-à-dire un corps valué, complet, tel que sa valuation soit de rang un, discrète (cas où le groupe de valeurs est isomorphe au groupe additif des entiers ordinaires) et où le corps résiduel est fini, pour toute extension abélienne finie Ω de K le groupe de Galois de Ω/K est isomorphe au groupe quotient de K* par le sous-groupe des normes des éléments de Ω*. Ce théorème se généralise au cas où Ω est une extension algébrique infinie de K en munissant K* d'une certaine topologie et en le complétant. C'est la théorie du corps de classe local. On la trouvera exposée par Schilling [70] et Artin [2]. Des tentatives ont été faites pour étendre cette théorie au cas des extensions galoisiennes non abéliennes de K. (Voir Shafarevitch [73] et Krasner [34] et [35].)

Dans le cas où K n'est pas relativement complet par rapport à la valuation v, l'étude des prolongements de v à une extension algébrique K′ de K (et l'étude des extensions correspondantes du corps résiduel) permettent de connaître la manière dont l'idéal premier $\mathfrak{p}$ de la valuation se décompose dans le corps K′.

---

[1] Le lemme de Hensel peut s'énoncer de la façon suivante: Soit $f(x)$ un polynôme irréductible dont les coefficients sont situés dans $\mathcal{O}$ mais non pas tous dans $\mathfrak{p}$: le polynôme correspondant $f(x)$ à coefficients dans $\mathcal{K}$ est puissance d'un polynôme irréductible (dans l'anneau des polynômes à coefficients dans $\mathcal{K}$).

Cette étude généralise celle faite par Hilbert à propos des corps algébriques. Les méthodes de démonstrations sont néanmoins assez différentes (DEURING [14], OSTROWSKI [60]).

Soit K une extension algébrique finie du corps des rationnels ou un corps de fonctions algébriques de degré de transcendance 1 sur un corps fini: Les seules valuations possibles de K sont les valuations archimédiennes et les valuations non archimédiennes de rang un. Si dans chaque classe d'équivalence de valuations (archimédiennes ou non) on choisit convenablement un représentant (en notation non exponentielle), on obtient une famille $(\varphi_\iota)_{\iota \in I}$ de valuations de K telle que pour tout $x \in K^*$, $\prod_{\iota \in I} \varphi_\iota(x)$ ait un sens et soit égal à 1. Une telle propriété caractérise d'ailleurs les corps en question, c'est la *formule du produit* d'ARTIN-WHAPLES [3]. Elle caractérise les corps pour lesquels est valable la théorie du corps de classe. Elle joue d'ailleurs un rôle important dans cette théorie sous la forme qui lui a été donnée par CHEVALLEY [10]: Si, à chaque valuation φ_ι de la famille $(\varphi_\iota)_{\iota \in I}$, on associe le complété $\hat{K}_\iota$ de K pour cette valuation, on peut définir un groupe des *idéles* [1] et un groupe de classes d'idéles (quotient du groupe des idéles par le sous-groupe des idéles principaux). La théorie du corps de classe décrit alors le groupe de Galois de l'extension abélienne maximale de K comme quotient du groupe des classes d'idéles par un certain sous-groupe (voir par exemple WEIL [78]).

On voit donc toute l'importance qu'ont les valuations dans la théorie des nombres. On en trouvera une utilisation systématique dans l'ouvrage de HASSE [16].

Nous voudrions dans ce qui suit donner des indications sur une autre catégorie de problèmes pour laquelle l'utilisation des valuations (ou de conceptions les généralisant) ont permis de faire d'importants progrès, ce sont les problèmes concernant la divisibilité.

---

[1] Soit P le produit direct $\prod_{\iota \in I} \hat{K}_\iota$. Un élément a de P est dit un idéle si pour tous les $\iota \in I$, sauf un nombre fini, on a $\varphi_\iota(a_\iota) = 1$ et si pour tout $\iota \in I$ on a $\varphi_\iota(a_\iota) \neq 0$. Les idéles forment un groupe multiplicatif.

Un groupe abélien $\mathfrak{G}$ est dit *préordonné* si on a défini entre certains éléments de $\mathfrak{G}$ une relation que l'on note $\leqslant$ et qui vérifie les propriétés suivantes:

$$x \leqslant x \quad \text{pour tout} \quad x \in \mathfrak{G} \tag{10}$$

$$x \leqslant y \quad \text{et} \quad y \leqslant z \quad \text{entraîne} \quad x \leqslant z \tag{11}$$

$$x \leqslant y \quad \text{entraîne} \quad xz \leqslant yz \quad \text{pour tout} \quad z \in \mathfrak{G} \ . \tag{12}$$

La relation d'équivalence sur $\mathfrak{G}$:

$$x \equiv y \rightleftarrows x \leqslant y \quad \text{et} \quad y \leqslant x \tag{13}$$

est alors compatible avec la structure de groupe. L'ensemble quotient G de $\mathfrak{G}$ par cette relation d'équivalence est donc muni canoniquement d'une structure de groupe ordonné. Le groupe ordonné G est dit *associé* au groupe préordonné $\mathfrak{G}$.

$\mathfrak{G}$ étant un groupe abélien quelconque, se donner sur $\mathfrak{G}$ une structure de préordre (compatible avec sa structure de groupe) revient à se donner l'ensemble $\mathfrak{G}_+$ formé par tous les éléments x de $\mathfrak{G}$ tels que $1 \leqslant x$ (grâce à la relation $x \leqslant y \rightleftarrows yx^{-1} \in \mathfrak{G}_+$). On voit que $\mathfrak{G}_+$ est un sous-semi groupe de $\mathfrak{G}$. Réciproquement la donnée d'un sous-semigroupe $\mathcal{O}$ de $\mathfrak{G}$ permet de définir une structure de préordre sur $\mathfrak{G}$ (c'est une structure d'ordre si et si seulement $\mathcal{O} \cup \mathcal{O}^{-1} = \{1\}$). Le groupe ordonné associé G est filtrant[1] si et si seulement $\mathfrak{G}$ est groupe des quotients de $\mathcal{O}$. On voit par suite qu'étudier la divisibilité des éléments de $\mathfrak{G}$ par rapport au sous-semigroupe $\mathfrak{G}_+$ revient à étudier la structure de préordre définie par $\mathfrak{G}_+$ sur $\mathfrak{G}$ ou la structure d'ordre du groupe ordonné associé G.

Si maintenant on se donne un ordre A d'un corps K, A* est un sous-semi-groupe multiplicatif de K* et définit donc sur K* une structure de préordre. Le groupe ordonné associé G (qui est filtrant) est dit *groupe de divisibilité* de K par rapport à l'ordre A.

D'après KRULL [39], pour que A soit intégralement clos[2] dans K, il faut et il suffit que A soit l'intersection de tous les sur-

---

[1] C'est-à-dire que pour tout couple (a, b) éléments de G, il existe un élément x de G tel que $a, b \leqq x$.

[2] A est dit *intégralement clos* dans K si tout élément de K vérifiant une équation de la forme $x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$ avec $a_i \in A (1 \leqq i \leqq n)$ est lui-même continu dans A.

anneaux de valuation (contenus dans K) qui le contiennent. Ceci revient à dire qu'il existe une famille de valuations $(v_\iota)_{\iota \in I}$ de K telle que:

$$x \in A \rightleftarrows (\text{pour tout } \iota \in I \text{ on a } v_\iota(x) \geqslant 0) . \tag{14}$$

Par suite, si pour tout $\iota \in I$ Γ_ι désigne le groupe de valeurs de la valuation v_ι, dans le cas où A est intégralement clos dans K, on a obtenu une *réalisation* du groupe de divisibilité G correspondant comme sous-groupe du produit direct ordonné

$$\prod_{\iota \in I} \Gamma_\iota = \Gamma .$$

Si A est entièrement clos dans son corps des quotients K, la donnée d'une famille de valuations de K telle que la relation (14) soit vérifiée, permet parfois d'obtenir non seulement des renseignements sur la divisibilité des éléments de K par rapport à A, mais encore sur la divisibilité des A-idéaux fractionnaires de K. En effet, si à tout sous-ensemble $\mathfrak{a}$ de K borné inférieurement (c'est-à-dire tel qu'il existe un élément a de K tel que $\mathfrak{a} \subset (a)$, (a) désignant le A-idéal principal engendré par a) on fait correspondre le sous-ensemble $\mathfrak{a}_I$ défini de la façon suivante:

$$x \in \mathfrak{a}_I \rightleftarrows \text{pour tout } \iota \in I, \exists\, a_\iota \in \mathfrak{a} \text{ tel que } v_\iota(x) \geqslant v_\iota(a_\iota) \tag{15}$$

on voit qu'on définit ainsi une opération de fermeture qui obéit aux règles suivantes:

$$\mathfrak{a} \subset \mathfrak{a}_I \tag{16}$$

$$\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b}_I \longrightarrow \mathfrak{a}_I \subset \mathfrak{b}_I \tag{17}$$

$$\text{Si } a \in K^*, \{a\}_I = (a) = aA \tag{18}$$

$$a\,\mathfrak{a}_I = (a\mathfrak{a})_I \tag{19}$$

On a donc ici des lois qui sont formellement les mêmes que celles qui lient un sous-ensemble (borné inférieurement) de K à l'idéal engendré par cet ensemble. On appellera donc $\mathfrak{a}_I$ le I-*idéal* engendré par $\mathfrak{a}$. Dans le cas où un I-idéal peut être engendré par un nombre fini d'éléments, on dira qu'il est *fini*. On dira qu'un I-idéal $\mathfrak{a}_I$ est *principal* s'il est de la forme (a).

On peut remarquer de plus que si on désigne par $\mathfrak{a}_d$ l'idéal ordinaire (ou idéal de Dedekind) engendré par $\mathfrak{a}$, on a toujours $\mathfrak{a}_d \subset \mathfrak{a}_I$. Les I-idéaux sont donc des d-idéaux particuliers.

Comme pour les idéaux ordinaires, on peut définir la somme et le produit de deux I-idéaux en posant:

$$\mathfrak{a}_I + \mathfrak{b}_I = (\mathfrak{a} \cup \mathfrak{b})_I \tag{20}$$

$$\mathfrak{a}_I \times \mathfrak{b}_I = (\mathfrak{a}\,\mathfrak{b})_I \tag{21}$$

On voit que la somme et le produit de deux I-idéaux finis est encore un I-idéal fini et que l'idéal $A = (1)$ est unité pour la multiplication.

A la suite de l'introduction des v-idéaux par Artin et Van der Waerden, Prüfer [61] a étudié systématiquement les propriétés d'un système général de *r-idéaux* finis, c'est-à-dire d'une correspondance qui à tout sous-ensemble fini $\mathfrak{a}$ de K fait correspondre un sous-ensemble $\mathfrak{a}_r$ de K tel que $\mathfrak{a}_d \subset \mathfrak{a}_r$ et que les relations (16) à (19) se trouvent vérifiées (en remplaçant partout le symbole I par r). Prüfer a été amené à introduire les opérations sur ces r-idéaux et à envisager les quatre propriétés suivantes:

$r - \alpha$ Tout r-idéal (fini) est principal,

$r - \beta$ Les r-idéaux (finis) forment un groupe multiplicatif,

$r - \gamma$ Les *r-idéaux* finis forment un semi-groupe, c'est-à dire que: $\mathfrak{a}_r \times \mathfrak{b}_r = \mathfrak{a}_r \times \mathfrak{c}_r$ entraîne $\mathfrak{b}_r = \mathfrak{c}_r$,

$r - \delta$ L'anneau A est r-clos, c'est-à-dire que $\mathfrak{a}_r \times (b) \supset \mathfrak{a}_r \times (c)$ entraîne $(b) \supset (c)$.

Chacune de ces propriétés est moins forte que la précédente. De plus A est d-clos si et si seulement il est intégralement clos. Prüfer montra en outre que les propriétés $d - \beta$ et $d - \gamma$ sont équivalentes. Un anneau vérifiant la propriété $d - \beta$ (les idéaux finis forment un groupe ou encore tout idéal fini est inversible) est appelé par Krull *anneau de multiplication*.

Krull [41] a donné une importante caractérisation des anneaux de multiplication: A est anneau de multiplication si et si seulement il est *arithmétiquement utilisable*, c'est-à-dire intégralement clos dans son corps des quotients K et tel que,

si on considère la famille $(v_\iota)_{\iota \in I}$ de *toutes* les valuations de K compatibles avec l'anneau A (une valuation v de K sera dite *compatible* avec un ordre A de K si et si seulement son anneau de valuation contient A), les I-idéaux finis correspondants se confondent avec les d-idéaux finis. Dans un tel anneau on peut donc attribuer à tout idéal fini $\mathfrak{a}_d$ une valeur

$$v_\iota(\mathfrak{a}_d) = \inf (v_\iota(\mathfrak{a})) \in \Gamma_\iota$$

pour tout $\iota \in I$ et on a:

$$x \in \mathfrak{a}_d \rightleftarrows v_\iota(x) \geqslant v_\iota(\mathfrak{a}_d) \quad \text{pour tout} \quad \iota \in I . \tag{22}$$

Pour décrire les idéaux infinis, il faut recourir à la notion de *surclasse* d'un groupe totalement ordonné (introduite par Krull [39]).

Si Γ est un groupe totalement ordonné, on appelle surclasse de Γ un sous-ensemble Ω de Γ borné inférieurement et tel que:

$$\alpha \in \Omega \quad \text{et} \quad \beta \geqslant \alpha \longrightarrow \beta \in \Omega . \tag{23}$$

Une surclasse Ω est dite *principale* si elle contient un plus petit élément ω. On la note alors (ω).

Lorsque A est un anneau de multiplication, on peut dans certains cas montrer que les I-idéaux (en prenant pour I un ensemble convenable de valuations de K compatibles avec A) coïncident avec les d-idéaux (et non plus seulement les I-idéaux finis). Un idéal $\mathfrak{a}_d$ est alors défini en lui faisant correspondre pour tout indice ι une surclasse $\Omega_\iota = (v_\iota(\mathfrak{a}_d))$ de Γ_ι. On a plus précisément:

$$x \in \mathfrak{a}_d \rightleftarrows v_\iota(x) \in \Omega_\iota \quad \text{pour tout} \quad \iota \in I . \tag{24}$$

Le problème qui se pose alors est de savoir quelles conditions doit remplir un système de surclasses arbitraires $(\Omega_\iota)_{\iota \in I}$ pour qu'il existe un idéal $\mathfrak{a}_d$ tel que $(v_\iota(\mathfrak{a}_d)) = \Omega_\iota$ pour tout $\iota \in I$. Ce problème a été résolu par Krull dans le cas où A est l'anneau des entiers d'un corps algébrique infini [36]. Les valuations étant alors de rang un, il a pu en déduire des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'étant donnés deux idéaux $\mathfrak{a}_d$ et $\mathfrak{b}_d$ il existe un idéal $\mathfrak{c}_d$ avec $\mathfrak{a}_d = \mathfrak{b}_d \times \mathfrak{c}_d$. Nous l'avons résolu [25]

dans le cas où A est un anneau du *type de Dedekind* (c'est-à-dire tel que tout idéal entier non nul de A ne soit contenu que dans un nombre fini d'idéaux maximaux de A et que tout idéal premier de A ne soit contenu que dans un idéal maximal). Dans le cas où l'anneau A est de plus *uniforme*, c'est-à-dire dans le cas où les valuations qui interviennent sont de rang un, les résultats de Krull permettent alors de donner des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'étant donnés deux idéaux $\mathfrak{a}_d$ et $\mathfrak{b}_d$, il existe un idéal $\mathfrak{c}_d$ tel que $\mathfrak{a}_d = \mathfrak{b}_d \times \mathfrak{c}_d$.

Nous avons récemment pu étendre cette étude au cas où A, étant toujours supposé anneau de multiplication du type de Dedekind, n'est plus supposé uniforme [26]. Pour cela nous avons été amené à étudier la divisibilité des idéaux dans un anneau de valuation. Si v est une valuation de K, $\mathcal{O}$ l'anneau de valuation correspondant et Γ le groupe de valeurs, on sait [39] qu'il y a correspondance biunivoque entre les $\mathcal{O}$-idéaux (entiers et fractionnaires) de K et les surclasses de Γ, la surclasse Ω correspondant à l'idéal $\mathfrak{a}_d$ étant $v(\mathfrak{a}_d)$. Tout $\mathcal{O}$-idéal fini est alors principal. Il en est ainsi si et si seulement la surclasse correspondante est principale. Au produit $\mathfrak{a}_d \times \mathfrak{b}_d$ correspond la somme $A + B$ des surclasses A et B relatives à $\mathfrak{a}_d$ et $\mathfrak{b}_d$. $A + B$ est principale si et si seulement A et B le sont. Si Γ est archimédien, il est soit un groupe discret (auquel cas toute surclasse est principale), soit un sous-groupe dense dans le groupe additif R des nombres réels. A toute surclasse non principale A on peut alors faire correspondre un nombre réel α (et réciproquement) tel que:

$$\xi \in A \rightleftarrows \xi > \alpha \tag{25}$$

On pose dans ce cas $A = ((\alpha))$. (α n'est pas nécessairement contenu dans Γ).

Ceci permettait à Krull de montrer que si Γ est archimédien, étant données deux surclasses A et B, il existe une surclasse C telle que $A = B + C$ si et si seulement on est dans l'un des deux cas suivants:

1) B est une surclasse principale,
2) Ni A ni B n'est principale.

La situation est plus complexe si Γ n'est plus supposé archimédien. Il faut alors considérer l'ensemble $(P_\iota)_{\iota \in \Pi}$ des surclasses premières de Γ. (Une surclasse P de Γ est dite *première* si $P \subset (O) = \Gamma_+$ et si $a, b \not\equiv P$ entraînent $a + b \not\equiv P$.) $(P_\iota)_{\iota \in \Pi}$ (et par suite Π) est totalement ordonné par la relation:

$$P_\alpha \leqslant P_\beta \rightleftarrows P_\beta \subset P_\alpha \tag{26}$$

A une surclasse première P_ι on fait correspondre le sous-groupe H_ι de Γ engendré par les éléments positifs de Γ qui ne sont pas contenus dans P_ι. H_ι est un sous-groupe *isolé* de Γ [39], c'est-à-dire que $\Gamma_\iota = \Gamma/H_\iota$ peut être considéré comme totalement ordonné par la relation:

$$\varphi_\iota(x) \geqslant \varphi \geqslant (y) \rightleftarrows \exists\, h \in H_\iota \text{ avec } x + h \in y \tag{27}$$

($_\iota$ désigne ici l'homomorphisme canonique de Γ sur Γ_ι).

Nous avons montré qu'à toute surclasse A correspond un indice $\alpha \in \Pi$ appelé *indice caractéristique* de A qui est le plus grand possible tel que:

$$x \in A \rightleftarrows \varphi_\iota(x) \in \varphi_\iota(A) \tag{28}$$

($\varphi_\iota(A)$ est une surclasse de Γ_ι).

Si Γ est totalement ordonné on peut le munir d'une topologie (compatible avec sa structure de groupe) en prenant pour système fondamental de voisinages de O l'ensemble: $(\mathfrak{U}_a)_{\Gamma \ni a > 0}$ défini par:

$$x \in \mathfrak{U}_a \rightleftarrows -a < x < a\,. \tag{29}$$

On peut prolonger au complété $\hat{\Gamma}$ la structure d'ordre total de Γ. Si α est l'indice caractéristique de la surclasse A, la surclasse $\varphi_\alpha(A)$ de Γ_α est soit principale, soit telle qu'il existe $a_\alpha \in \hat{\Gamma}_\alpha$ avec $x_\alpha \in \varphi_\alpha(A) \rightleftarrows x_\alpha > a_\alpha$.

Toute surclasse de Γ se trouve alors parfaitement décrite et à partir de là on peut trouver les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'étant données deux surclasses A et B, il existe une surclasse C telle que $A = B + C$.

Au moyen d'une famille de valuations qui sont compatibles avec cet anneau, on peut facilement caractériser les ordres

d'un corps qui sont des *anneaux factoriels* (tout élément est produit d'éléments premiers), et les *anneaux de Dedekind* (tout idéal est produit d'idéaux premiers), et démontrer à partir de là certains théorèmes de permanence (par exemple si A est factoriel, l'anneau de polynomes $A[x]$ l'est aussi, si A est un anneau de Dedekind et si Ω est une extension algébrique finie de l'anneau des quotients K de A, l'ensemble B des éléments de Ω entiers sur A est aussi un anneau de Dedekind). On pourra consulter à ce sujet [6], [25], [55], [57] et le chapitre 4 de [70].

Dans un mémoire paru en 1939 [46], LORENZEN a jeté les bases d'une étude systématique des groupes préordonnés (abéliens). Il a défini pour un groupe préordonné $\mathfrak{G}$ la notion de système de r-idéaux dans toute sa généralité ainsi que la notion de système de r-idéaux finis. Il a étendu à un tel système les résultats de PRÜFER sur les propriétés $r - \alpha$, $r - \beta$, $r - \gamma$ et $r - \delta$. Enfin il a étudié les réalisations du groupe ordonné associé G comme sous-groupe d'un produit direct de groupes totalement ordonnés en étendant la méthode utilisée par KRULL dans le cas du groupe de divisibilité d'un anneau intégralement clos. Etant donné un système de r-idéaux (finis ou non), il a été pour cela amené à considérer les homomorphismes croissants φ de $\mathfrak{G}$ sur un groupe totalement ordonné Γ tels que:

$$\varphi(\mathfrak{a}) \subset \Gamma_+ \quad \text{entraîne} \quad \varphi(\mathfrak{a}_r) \subset \Gamma_+ \,. \tag{30}$$

Nous proposons d'appeler un tel homomorphisme une *r-valuation* de $\mathfrak{G}$.

On voit que si A est un ordre du corps K, les d-valuations de K sont les valuations de K compatibles avec A. On définit alors la notion de *semi-groupe de r-valuation*. Le théorème de KRULL s'étend de la manière suivante: $\mathfrak{G}$ vérifie la propriété $r - \delta$ finie si et si seulement $\mathfrak{G}_+$ est intersection de semi-groupes de r-valuation. LORENZEN en déduit en particulier qu'un groupe ordonné G est réalisable comme sous-groupe d'un produit direct de groupes totalement ordonnés si et si seulement il est *semi-clos*, c'est-à-dire si pour tout entier strictement positif n et tout $x \in G$ la relation $nx \geqslant 0$ entraîne $x \geqslant 0$.

Si le groupe G est réticulé, un homomorphisme croissant φ de G sur un groupe totalement ordonné est dit *propre* si:

$$\varphi(\inf(x, y)) = \inf(\varphi(x), \varphi(y)) \quad \text{pour tout} \quad x, y \in G \qquad (31)$$

Or de tels homomorphismes de G sont précisément les t-valuations de G, le t-système étant le r-système particulier défini par:

$$x \in \mathfrak{a}_t \rightleftarrows \exists\, a_1, \ldots, a_n \in \mathfrak{a} \quad \text{avec} \quad x \geqslant \inf(a_1, \ldots, a_n) \qquad (32)$$

Comme un groupe réticulé vérifie la propriété $t - \delta$ finie, Lorenzen en déduit qu'un groupe réticulé G est toujours réalisable d'une manière propre comme sous-groupe d'un produit direct G′ de groupes totalement ordonnés, c'est-à-dire de manière que les opérations sup. et inf. coïncident sur G et sur G′.

Dieudonné [15] a complété sur certains points la théorie de Lorenzen et a montré que le résultat sur les groupes semi-clos pouvait s'obtenir en considérant certaines s-valuations particulières [1] d'un groupe ordonné G qui sont les affinements de sa structure d'ordre.

Nous avons obtenu des précisions sur les réalisations d'un groupe réticulé en introduisant pour de tels groupes la notion de *réalisation irréductible* ([22] et [24]): Etant donnée une réalisation propre de G dans $\prod_{\iota \in I} \Gamma_\iota$, la composante $\alpha \in I$ sera dite *essentielle* si l'homomorphisme croissant de G dans $\prod_{\iota \neq \alpha} \Gamma_\iota$ ne définit plus une réalisation de G. La réalisation de G dans $\prod_{\iota \in I} \Gamma_\iota$ sera dite *irréductible* si toutes les composantes $\iota \in I$ sont essentielles. Nous avons montré que deux réalisations irréductibles d'un groupe réticulé sont identiques. On en déduit en particulier qu'un groupe réticulé ne peut être réalisé que d'une manière comme somme ou produit direct de groupes totalement ordonnés. Pour cela nous avons été amenés à introduire dans

---

[1] Le s-système est défini par:

$$x \leqslant \mathfrak{a}_s \rightleftarrows \exists\, a \leqslant \mathfrak{a} \quad \text{avec} \quad a \leq x\,.$$

un groupe réticulé la notion de *filet*. Les filets de G sont les classes d'équivalence définies dans G_+ par:

$$x \equiv y \rightleftarrows (\text{pour tout } z \in G_+ , \inf(x, z) = 0 \rightleftarrows \inf(y, z) = 0) \text{ . [1]} \quad (33)$$

En désignant par $\bar{x}$ le filet qui contient $x \in G_+$, on voit que l'ensemble $\mathcal{F}$ des filets est ordonné par la relation :

$$\bar{x} \geqslant \bar{y} \rightleftarrows (\text{pour tout } z \in G_+ , \inf(x, z) = 0 \longrightarrow \inf(y, z) = 0) \text{ .} \quad (34)$$

L'ensemble $\mathcal{F}$ admet le plus petit élément $\bar{O} = \{0\}$. Un filet $\bar{x}$ sera dit *minimal* s'il est différent de $\bar{O}$ et si $\bar{y} < \bar{x}$ entraîne $\bar{y} = \bar{0}$.

G admet une réalisation irréductible si et si seulement tout filet de G différent de $\bar{O}$ est supérieur ou égal à un filet minimal. Les t-valuations essentielles de G sont alors définies simplement à partir des filets minimaux correspondants.

Lorsque le groupe ordonné G n'est plus réticulé, de nombreux problèmes se posent encore sur les réalisations de G comme sous-groupe d'un produit direct de groupes totalement ordonnés.

Les valuations non archimédiennes ont été étendues au cas où le corps considéré n'est plus commutatif. (Schilling [69] et [70].) Le groupe de valeurs peut alors ne plus être abélien. Toutefois, d'après un théorème d'H. Cartan, le groupe de valeurs est sûrement abélien s'il est archimédien [8]. Lorenzen [46] a étendu de même sa théorie au cas d'un groupe préordonné non abélien.

Enfin toute une série de recherches sur la topologie des corps valués ont été entreprises. Les travaux de Shafarevitch [72], Kaplansky [29] et Zelinsky [80] ont permis de donner des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un corps topologique ait sa topologie induite par une valuation:

Soit K un corps commutatif possédant une topologie compatible avec sa structure d'anneau (la fonction $1/x$ n'est pas

[1] Cette relation d'équivalence est un cas particulier des équivalences principales dans les demi-groupes qui jouent un rôle important dans cette théorie. (Voir par exemple P. Dubreil: Contribution à la théorie des demi-groupes, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 63 (1941), pp. 1-52.)

supposée continue). Un sous-ensemble A de K sera dit *borné* si pour tout ensemble ouvert V contenant O on peut trouver un ouvert U contenant O tel que $AU \subset V$.

Un élément x de K sera dit *nilpotent* si x^n tend vers O lorsque n croit indéfiniment. Pour que la topologie de K puisse être définie par une valuation non archimédienne, il faut et il suffit que les deux conditions suivantes se trouvent réalisées:

1° Si A est un sous-ensemble de K auquel O n'est pas adhérent, A^{-1} est borné.

2° Il existe un sous-groupe additif de K qui soit à la fois borné et ouvert.

Pour que la topologie de K puisse être définie par une valuation archimédienne ou par une valuation non archimédienne de rang un, il faut et il suffit que la condition 1° se trouve vérifiée ainsi que:

2° L'ensemble des éléments nilpotents est ouvert.

Les corps topologiques (non nécessairement commutatifs) vérifiant la condition 1° ont été étudiés par KAPLANSKY sous le nom de corps du *type V* [29]. Ils possèdent déjà certaines propriétés des corps valués. Les résultats de SHAFAREVITCH et KAPLANSKY montrent que tout corps (commutatif ou non) localement compact a sa topologie induite par une valuation (non exponentielle). BRACONNIER [7] a établi ce résultat directement en remarquant que dans un tel corps la multiplication par un élément x multiplie la mesure de HAAR par un facteur constant $\varphi(x)$ qui se trouve être la valuation cherchée. On trouvera dans [30] un exposé et une bibliographie détaillée de ces questions.

BIBLIOGRAPHIE

[1] E. ARTIN. — Über die Bewertungen algebraischer Zahlkörper. *J. reine angew. Math.*, Vol. 167 (1930), pp. 157-159.

[2] —— *Algebraic Numbers and Algebraic Functions.* Notes miméographiées d'un cours fait à l'Université de Princeton (1950-1951) — I, New-York (1951).

[3] E. ARTIN et G. WHAPLES. — Axiomatic Characterisation of Fields by the Product formula for Valuations. *Bull. Amer. Math. Soc.*, Vol. 51 (1945), pp. 469-492.

[4] G. Birkhoff. — Lattice-Ordered Groups. *Annals of Math.*, Vol. 43 (1942), pp. 298-331.

[5] —— *Lattice Theorie*, 2e édition, New-York (1948).

[6] N. Bourbaki. — *Spécialisations et valuations*, à paraître.

[7] J. Braconnier. — Groupes d'automorphismes d'un groupe localement compact. *C. R. Acad. Sci. Paris*, Vol. 220 (1945), pp. 382-384.

[8] H. Cartan. — Un théorème sur les groupes ordonnés, *Bull. Sci. Math.* Vol. 63 (1939), pp. 201-205.

[9] C. Chevalley. — Sur la thérie du corps de classe dans les corps finis et les corps locaux. *J. Fac. Sci. Imp. Univ. Tokyo* (1933). Série 2, pp. 366-476.

[10] —— La théorie du corps de classe. *Ann. of Math.*, Vol. 41 (1940), pp. 394-418.

[11] —— Introduction to the Theory of Algebraic Functions of One Variable. *Mathem. Surveys*, Vol. 6, New-York (1951).

[12] A. H. Clifford. — Partially ordered Abelian Groups. *Ann. of Math.* Vol. 1 (1940), pp. 465-473.

[13] R. Dedekind et H. Weber. — Theorie der Algebraischen Functionen einer Veränderlichen. *J. reine ang. Math.*, Vol. 92 (1882), pp. 181-290.

[14] M. Deuring. — Verzweigungstheorie bewerteter Körper. *Math. Ann.*, Vol. 105 (1931), pp. 277-307.

[15] J. Dieudonné. — Sur la théorie de la divisibilité. *Bull. Soc. Math. Franç.*, Vol. 49 (1941), pp. 133-144.

[16] H. Hasse. — *Zahlentheorie*, Berlin (1949).

[17] H. Hasse et F. K. Schmidt. — Die Struktur diskret bewerteter Körper. *J. reine ang. Math.*, Vol. 170 (1934), pp. 4-63.

[18] K. Hensel. — *Theorie der algebraischen Zahlen*, Leipzig (1908).

[19] K. Hensel et G. Landsberg. — *Theorie der algebraischen Funktionen einer Variabeln und ihre Anwendung auf algebraische Kurven und abelsche Integrale*, Leipzig (1902).

[20] G. Hochschild. — Local Class field Theory. *Ann. of Math.*, Vol. 51 (1950), pp. 331-347.

[21] N. Jacobson. — Totally disconnected Locally Compact Rings. *Amer. J. of Math.*, Vol. 58 (1936), pp. 433-449.

[22] P. Jaffard. — Nouvelles applications de la théorie des filets. *C. R. Acad. Sci. Paris*, Vol. 230 (1950), pp. 1631-1632.

[23] —— Corps demi-valués. *C. R. Acad. Sci. Paris*, Vol. 231 (1950), pp. 1401-1403.

[24] —— *Contribution à la théorie des groupes ordonnés*. Thèse, Paris (1951), *J. Math. pures et appl.* Vol. 32 (1953) pp. 203-280.

[25] —— Théorie arithmétique des anneaux du type de Dedekind, I. *Bull. Soc. Math. Franç.*, Vol. 80 (1952), pp. 61-100.

[26] —— Théorie arithmétique des anneaux du type de Dedekind, II. *Bull. Soc. Math. Franç.* Vol. 81 (1953) pp. 41-61.

[27] I. Kaplansky. — Maximal Fields with Valuations, I. *Duke J.*, Vol. 9 (1942), pp. 303-321.

[28] —— Maximal Fields with Valuations, II. *Duke J.*, Vol. 12 (1945), pp. 243-248.

[29] —— Topological Methods in Valuation Theory. *Duke J.*, Vol. 14 (1947), pp. 527-541.

[30] I. Kaplansky. Topological Rings. *Bull. Amer. Math. Soc.*, Vol. 54 (1948), pp. 809-826.

[31] I. Kaplansky et O.F.G. Schilling. — Some Remarks on Relatively Complete Fields. *Bull. Amer. Math. Soc.*, Vol. 48 (1942), pp. 744-747.

[32] M. Krasner. — Sur la théorie de ramification des idéaux de corps de nombres algébriques. *Mém. Acad. de Belgique*, Vol. 9 (1936), pp. 1-110.

[33] —— Sur la primitivité des corps P-adiques. *Mathematica*, Vol. 13 (1937), pp. 72-191.

[34] —— Quelques méthodes nouvelles dans la théorie des corps valués complets. *Colloque d'Algèbre et de Théorie des Nombres*, Paris (1949), pp. 117-122.

[35] —— *Généralisations non abéliennes de la théorie locale des corps de classe.* Notes polycopiées du Séminaire Bourbaki, Paris (1951).

[36] W. Krull. — Idealtheorie in unendlichen algebraischen Zahlkörpern, II. *Math. Zeitsch.*, Vol. 31 (1930), pp. 527-557.

[37] —— Ein Hauptsatz über umkehrbare Ideale. *Math. Zeitsch.*, Vol. 31 (1930), p. 558.

[38] —— Galoische Theorie bewerteter Körper. *Sitz. Ber. Akad. Munchen* (1930), pp. 225-238.

[39] —— Allgemeine Bewertungstheorie. *J. reine ang. Math.*, Vol. 167 (1932), pp. 160-196.

[40] —— Idealtheorie. *Ergebnisse der Math.*, Vol. 4 (1935).

[41] —— Beiträge zur Arithmetik kommutativer Integritätsbereiche, I. *Math. Zeitsch.*, Vol. 41 (1936), pp. 544-577.

[42] —— Beiträge zur Arithmetik kommutativer Integritätsbereiche, IV. *Math. Zeitsch.*, Vol. 42 (1937), pp. 767-773.

[43] —— Beiträge zur Arithmetik kommutativer Integritätsbereiche, VIII. *Math. Zeitsch.*, Vol. 48 (1942-1943), pp. 533-552.

[44] —— Über geschlossene Bewertungssysteme. *J. reine ang. Math.*, Vol. 190 (1952), pp. 75-92.

[45] J. Kürschak. — Über Limesbildung und allgemeine Körpertheorie. *J. reine ang. Math.*, Vol. 142 (1913), pp. 211-253.

[46] P. Lorenzen. — Abstrakte Begründung der multiplicativen Idealtheorie. *Math. Zeitsch.*, Vol. 45 (1939), pp. 533-552.

[47] —— Überhalbgeordnete Gruppen. *Math. Zeitsch.*, Vol. 52 (1949), pp. 483-526.

[48] S. Mac-Lane. — A Construction for Absolute Values in Polynomials Rings. *Trans. Amer. Math. Soc.*, Vol. 40 (1936), pp. 363-395.

[49] —— A Construction for Prime Ideals as Absolute Values of an Algebraic Field. *Duke J.*, Vol. 2 (1936), pp. 492-510.

[50] —— The Uniqueness of the Power Series Representation of Certain Fields with Valuations. *Ann. of Math.*, Vol. 39 (1938), pp. 368-382.

[51] —— Subfields and Automorphism Groups of p-adic Fields. *Ann. of Math.*, Vol. 40 (1933), pp. 423-442.

[52] —— Algebraic Functions. Notes miméographiées d'un cours fait à l'Université Harvard en 1939 (Cambridge, Massachussets, 1947).

[53] —— Note on the Relative Structure of p-adic Fields. *Ann. of Math.*, Vol. 41 (1940), pp. 751-753.

[54] S. Mac-Lane et O.F.G. Schilling. — Infinite Number Fields with Noether Ideal Theorie. *Amer. J. of Math.*, Vol. 61 (1939), pp. 771-782.

[55] K. Matusita. — Über ein bewertungstheoretisches Axiomensystem für die Dedekind-Noethersche Idealtheorie. *Japanese J. of Math.*, Vol. 19 (1944), pp. 97-110.

[56] M. Moriya. — Klassenkörpertheorie im kleinen für die unendlichen algebraischen Zahlkörper. *J. Fac. Sci. Hokkaido Imp. Akad.*, Vol. 5 (1936), pp. 9-66.

[57] —— Bewertungstheoretischer Aufbau der multiplicativen Idealtheorie. *J. Fac. Sci. Hokkaido Imp. Acad.*, Vol. 8 (1940), pp. 109-144.

[58] T. Nakayama. — On Krull's Conjecture. *Proc. Imp. Acad. Tokyo*, Vol. 18 (1942), pp. 1-4.

[59] A. Ostrowski. — Über einige Lösungen der Funktionalgleichung $\varphi(x)\,\varphi(y) = \varphi(xy)$. *Acta Mathematica*, Vol. 41 (1918), pp. 271-284.

[60] —— Untersuchungen zur arithmetischen Theorie der Körper. *Math. Zeitsch.*, Vol. 39 (1935), pp. 269-404.

[61] H. Prüfer. — Untersuchungen über die Teilbarkeitseigenschaften in Körpern. *J. reine ang. Math.*, Vol. 168 (1932), pp. 1-36.

[62] K. Rychlik. — Zur Bewertungstheorie der algebraischen Körper. *J. reine ang. Math.*, Vol. 153 (1924), pp. 94-107.

[63] O.F.G. Schilling. — Arithmetic in Fields of Formal Power Series in Several Variables. *Ann. of Math.*, Vol. 38 (1937), pp. 551-576.

[64] —— Class Fields of Infinite Degree over p-Adic Number Fields. *Ann. of Math.*, Vol. 38 (1937), pp. 469-476.

[65] —— A Generalization of Local Class Field Theory. *Amer J. of Math.*, Vol. 60 (1938), pp. 667-704.

[66] —— The Structure of Local Class Field Theory. *Amer J. of Math.*, Vol. 60 (1938), pp. 667-704.

[67] —— Regular Normal Extensions over Complete Fields. *Trans. Amer. Math. Soc.*, Vol. 47 (1940), pp. 440-454.

[68] —— Normal Extensions of Relatively Complete Fields. *Amer J. of Math.*, Vol. 65 (1943), pp. 309-334.

[69] —— Non Commutative Valuations. *Bull. Amer. Math. Soc.*, Vol. 51 (1945), pp. 297-304.

[70] —— The Theory of Valuations. *Mathem. Surveys*, Vol. 4, New-York (1950).

[71] F. K. Schmidt. — Mehrfach perfekte Körper. *Math. Ann.*, Vol. 108 (1933), pp. 457-472.

[72] I. R. Shafarevitch. — On the Normalizability of Topological Fields, C.R. (Doklady). *Acad. Sci. U.R.S.S.*, Vol. 29 (1940), pp. 83-84.

[73] —— On p-Extensions. *Rec. Math.* (Math. Sbornik) N.S., Vol. 20 (1947), pp. 351-363.

[74] O. Teichmüller. — Discret bewertete perfekte Körper mit unvollkommenen Restklassenkörpern. *J. reine ang. Math.*, Vol. 176 (1936), pp. 141-152.

[75] —— Über die Struktur discret bewerteter perfekten Körper. *Gött. Nach.*, N.F. 1, Vol. 1 (1936).

[76] B. L. Van der Waerden. — *Moderne Algebra*, Vol. 1 et 2, Berlin (1930 et 1931).

[77] B. L. VAN DER WAERDEN. Les valuations en géométrie algébrique. *Colloque d'Algèbre et de Théorie des Nombres*, Paris (1949), pp. 117-122.
[78] A. WEIL. — Sur la théorie du corps de classe. *J. Math. Soc. Japan*, Vol. 3 (1951), pp. 1-35.
[79] E. WITT. — Zyclische Körper und Algebren der Characteristik p vom Grad p^n. *J. reine ang. Math.*, Vol. 176 (1936).
[80] D. ZELINSKY. — Topological Characterisation of Fields with Valuations. *Bull. Amer. Math. Soc.*, Vol. 54 (1948), pp. 1145-1150.

LA GÉOMÉTRIE DES SOUS-VARIÉTÉS D'UN ESPACE EUCLIDIEN A PLUSIEURS DIMENSIONS [1]

PAR

Shiing-Shen CHERN (Chicago).

La géométrie des sous-variétés d'un espace euclidien de dimension quelconque contient naturellement comme cas particuliers l'étude des courbes et des surfaces de l'espace euclidien ordinaire. Cependant, malgré l'histoire très ancienne du sujet, nos renseignements dans le cas général sont assez maigres. Dans cette conférence je me propose de parler de quelques progrès qui ont été accomplis récemment.

I

1. — Soient E^{n+N} l'espace euclidien à $n+N$ dimensions et M une variété différentiable à n dimensions régulièrement plongée dans E^{n+N}. Cela signifie que tout point de M a un voisinage dans lequel la variété peut être définie en exprimant N coordonnées de E^{n+N} comme des fonctions des n autres coordonnées ayant des dérivées partielles continues d'un ordre assez

[1] Conférence faite à la séance de la Société mathématique suisse, tenue à Berne le 7 juin 1953.