Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 40 (1951-1954)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR L'« INDÉFINIMENT» MATHÉMATIQUE

Autor: Lorent, Henri

Kapitel: NOTE AU N° 7

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-515810

Le postulat impliquerait que, dans le cas de l'aire S et les cas analogues, tout élément de l'ensemble continu (E) peut être atteint par des sous-ensembles (E_1), quel que soit le mode de prélèvement de ces sous-ensembles.

Dans son livre cité (p. 232-235), E. Borel témoigne d'une certaine inquiétude quant à la validité des raisonnements par lesquels on cherche à mesurer un ensemble qui a la puissance du continu. Le postulat ci-dessus est-il de nature à formuler cette inquiétude, et, peut-être à exprimer un caractère hypothétique ou empirique (aurait peut-être dit Riemann) de l'état actuel de la théorie des ensembles ?

NOTE AU N° 7

Peut-on épuiser l'ensemble dénombrable des nombres entiers en en détachant des sous-ensembles dénombrables ? Son dédoublement en termes pairs et termes impairs, en termes multiples de n et termes non multiples de n semble justifier une réponse affirmative; mais le second sous-ensemble est défini par un caractère négatif. Procédons par un mode positif de formation des sous-ensembles dénombrables.

Formons les sous-ensembles de multiples des nombres premiers (ceux-ci termes d'un ensemble transfini). Nous aurons successivement le sous-ensemble des nombres pairs: 2, 4, 6, 8, ...; celui des multiples de 3 non multiples de 2: 3, 9, 15, 21, ...; celui des multiples de 5 non multiples ni de 2, ni de 3: 25, 35, 55, 65, ...; et ainsi de suite.

Le sous-ensemble des multiples de n premier non multiples des nombres premiers moindres que n commence par n^2; on voit que, quel que soit le nombre premier auquel on est arrivé, le sous-ensemble correspondant reste dénombrable. Pour ce mode de formation des sous-ensembles, la réponse à notre question est donc négative.

Mais cette réponse est positive pour un autre mode de formation de ces sous-ensembles: car l'ensemble des nombres entiers dont l'expression chiffrée est terminée par 1 est transfini dénombrable; de même celui des nombres terminés par 2, 3, ..., 9, 0, et ces dix sous-ensembles épuisent l'ensemble des nombres entiers. Ils seraient douze si l'on écrivait les entiers dans la numération à base 12.

Les considérations précédentes donneraient-elles à un jeune lecteur une première idée de la richesse de la notion d'ensemble transfini dénombrable ? Nous l'espérons. Exprimons les faits exemplaires que nous venons de constater: *un ensemble dénombrable peut n'être pas épuisé par l'extraction d'un ensemble dénombrable de ses sous-ensembles dénombrables*, tandis qu'*il peut l'être par un nombre fini de pareils sous-ensembles*. Enoncé à rapprocher de celui du n° 7 emprunté à E. Borel.