

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 40 (1951-1954)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** LA GÉOMÉTRIE DES SOUS-VARIÉTÉS D'UN ESPACE EUCLIDIEN A PLUSIEURS DIMENSIONS  
**Autor:** Chern, Shiing-Shen

**Bibliographie**  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-515809>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 17.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

miers vecteurs. Dans le cas présent où  $\nu$  est un vecteur normal en  $x \in M$  nous choisissons  $a_i = e_i(x)$  et posons

$$a_r = \sum_s u_{rs} e_s(x) ,$$

de sorte que  $u_{n+N, s} = \nu_s$ . On trouve alors

$$da_{n+N} = d\nu = \sum_s d\nu_s \cdot e_s + \sum_s \nu_s de_s ,$$

d'où on déduit

$$d\nu \cdot a_i = \sum_s \nu_s \omega_{si} = - \sum_{s,j} \nu_s A_{sij} \omega_j ,$$

$$d\nu \cdot a_r = \sum_s d\nu_s u_{rs} + \sum_{s,t} \nu_s u_{rt} \omega_{st} .$$

Il s'en suit que

$$\prod_{1 \leq t \leq n+N-1} (a_t d\nu) = \pm \left| \sum_s \nu_s A_{sij} \right| d\sigma_{N-1} dV .$$

Il s'agit d'intégrer la valeur absolue de cette expression pour tous les vecteurs normaux unitaires en tous les points  $x \in M$ . Notre discussion dans le n° 6 implique que cette intégrale est  $\geq 2c_{n+N-1}$ . Utilisant l'expression (30) pour la courbure totale  $K^*(x)$ , on obtient l'inégalité (31).

Maintenant supposons que l'inégalité (32) soit valable. Cela implique que les directions auxquelles la fonction coordonnée n'a qu'un maximum et un minimum ont une mesure positive. Il s'ensuit qu'il y a une fonction coordonnée non constante qui n'a qu'un maximum et un minimum. Des inégalités de Morse résulte alors l'énoncé au début de cet appendice.

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] ALLENDOERFER, C. B., Rigidity for spaces of class greater than one, *Amer. J. Math.* 61, 633-44 (1939).
- [2] — and WEIL, A., The Gauss-Bonnet theorem for Riemannian polyhedra, *Trans. Amer. Math. Soc.* 53, 101-129 (1943).
- [3] BLASCHKE, W., Sulla geometria differenziale delle superficie  $S_2$  nello spazio euclideo  $S_4$ , *Ann. Math. Pura Appl.* (4), 28, 205-209 (1949).
- [4] CHERN, S., On a theorem of algebra and its geometrical application, *J. Indian Math. Soc.* 8, 29-36 (1944).

- [5] CHERN, S., Topics in differential geometry, mimeographed notes, Princeton, 1951.
  - [6] ——— and KUIPER, N. H., Some theorems on the isometric imbedding of compact Riemannian manifolds in Euclidean space, *Annals of Math.* 56, 422-430 (1952).
  - [7] ——— and SPANIER, E., A theorem on orientable surfaces in four-dimensional space, *Comm. Math. Helv.* 25, 205-209 (1951).
  - [8] EHRESMANN, C., Sur la topologie de certaines variétés algébriques réelles, *J. Math. Pures Appl.* (9) 16, 69-100 (1937).
  - [9] FARY, I., Sur la courbure totale d'une courbe gauche faisant un nœud, *Bull. Soc. Math. France* 77, 128-138 (1949).
  - [10] FENCHEL, W., On total curvatures of Riemannian manifolds, *J. London Math. Soc.* 15, 15-22 (1940).
  - [11] KILLING, W., Die nicht-euklidischen Raumformen in analytischer Behandlung, Leipzig 1885.
  - [12] MILNOR, J. W., On the total curvature of knots, *Annals of Math.* 52, 248-257 (1950).
  - [13] OTSUKI, T., On the existence of solutions of a system of quadratic equations and its geometrical application, *Proc. Japan Acad.* 29, 99-100 (1953).
  - [14] PONTRJAGIN, L., Characteristic cycles on differentiable manifolds, *Rec. Math. (N.S.)*, 21, 233-284 (1947), *Amer. Math. Soc. Trans.* No. 32.
  - [15] ——— Some topological invariants of closed Riemannian manifolds, *Izvestiya Akad. Nauk SSSR, Ser. Math.* 13, 125-162 (1949), *Amer. Math. Soc. Trans.* No. 49.
  - [16] SEIFERT, H., Algebraische Approximation von Mannigfaltigkeiten, *Math. Z.* 41, 1-17 (1936).
  - [17] ——— und THRELFALL, W., Variationsrechnung im Grossen.
  - [18] THOM, R., Sur les variétés plongées et  $i$ -carrés, *C. R. Acad. Paris* 230, 507-508 (1950).
  - [19] WHITNEY, H., On regular closed curves in the plane, *Comp. Math.* 4, 276-284 (1937).
  - [20] ——— Differentiable manifolds, *Annals of Math.* 37, 645-680 (1936).
  - [21] ——— On the topology of differentiable manifolds, Lectures on topology, 101-141, Univ. of Mich. Press (1941).
  - [22] WU WEN-TSUN, Sur les classes caractéristiques des structures fibrées sphériques, *Act. Sci. Indus.* No.1183, Paris (1952).
-