Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 40 (1951-1954)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LA GÉOMÉTRIE DES SOUS-VARIÉTÉS D'UN ESPACE EUCLIDIEN A PLUSIEURS DIMENSIONS

Autor: Chern, Shiing-Shen

Kapitel: III

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-515809

de M au point x. On a évidemment $\tau(x) \leqq [n/p(x)]$, le dernier nombre étant le plus grand entier $\leqq n/p(x)$.

Cela étant, on a le théorème local suivant, qui est dû à M. Allendoerfer [1], [4]: Deux variétés isométriques, dont les premiers espaces normaux sont de même dimension, ne diffèrent que par un mouvement (propre ou impropre), si l'une d'entre elles est de type $\geqq 3$.

Ce théorème peut être considéré comme un théorème de rigidité locale. Bien entendu, la condition sur le type est très forte.

III

9. — Pour mieux comprendre la géométrie des sous-variétés, il serait utile d'étudier avec plus de détails le cas d'une surface dans $E^4 (n = N = 2)$. Nous faisons une autre hypothèse simplificatrice en supposant que M est orientée. Alors l'application tangentielle est $\tilde{T}: M \longrightarrow \tilde{G}(2, 2)$. Dans ce cas on peut donner de cette dernière variété une description simple. En effet, soient $p_{\alpha\beta}$, $1 \leqq \alpha, \beta \leqq 4$, les coordonnées plückeriennes dans $G(2, 2)$. Ce sont les coordonnées homogènes assujetties aux conditions

$$p_{\alpha\beta} + p_{\beta\alpha} = 0 \,, \qquad p_{12}p_{34} + p_{13}p_{42} + p_{14}p_{23} = 0 \,. \tag{36}$$

Nous les normalisons par la condition

$$\sum_{\alpha, \beta} p_{\alpha\beta}^2 = 2 \,. \tag{37}$$

Alors les coordonnées $p_{\alpha\beta}$ satisfaisant aux conditions (36), (37) peuvent être considérées des coordonnées dans $\tilde{G}(2, 2)$, de sorte que les deux plans orientés qui donnent le même plan non orienté aient des coordonnées différant par le signe. Introduisons des coordonnées nouvelles dans $\tilde{G}(2, 2)$ en posant

$$\begin{aligned} x_1 &= p_{12} + p_{34} \,, & x_2 &= p_{23} + p_{14} \,, & x_3 &= p_{31} + p_{24} \,, \\ y_1 &= p_{12} - p_{34} \,, & y_2 &= p_{23} - p_{14} \,, & y_3 &= p_{31} - p_{24} \,. \end{aligned} \tag{38}$$

Avec ces coordonnées x_λ, y_λ, $1 \leqq \lambda \leqq 3$, les conditions (36) et (37) sont équivalentes aux conditions

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 1 \,. \tag{39}$$

Ceci démontre que la variété $\tilde{G}(2, 2)$ est homéomorphe au produit cartésien de deux sphères S_x et S_y ordinaires. Comme $\tilde{G}(2, 2)$ peut être identifiée avec la variété des droites orientées de l'espace elliptique à trois dimensions, ce fait est à la base d'une représentation de Fubini et Study.

Fixons une orientation de S_x et S_y et désignons par M, S_x, S_y les cycles fondamentaux de ces variétés. Les invariants homologiques qu'on peut déduire de l'homomorphisme $\tilde{T}_*$ sont les entiers d_x, d_y définis par la condition $\tilde{T}_*(M) \sim d_x S_x + d_y S_y$, où $\tilde{T}_*$ désigne l'homomorphisme induit par $\tilde{T}$. On peut démontrer que [7], si les orientations de S_x et S_y sont convenablement choisies, on a $d_x = d_y$ et que la valeur commune est la moitié de la caractéristique d'Euler de M. La démonstration s'appuie sur l'étude de l'homéomorphisme σ introduit dans le n° 5, qui est dans notre cas un homéomorphisme de $\tilde{G}(2, 2)$ en elle-même. Son homomorphisme induit sur les cycles a l'effet de fixer un des cycles S_x et S_y et changer le signe de l'autre. Ce fait et le résultat $\overline{W}^2 = 0$ (à coefficients entiers) conduisent facilement à l'égalité $d_x = d_y$.

Pour exprimer les relations de ces résultats avec les invariants différentiels de M dans E^4, il faut déterminer dans $\tilde{G}(2, 2)$ des formes différentielles extérieures fermées Φ_1, Φ_2 duales aux cycles S_x et S_y, c'est-à-dire telles que

$$\int_{S_\alpha} \Phi_\beta = \delta_\alpha^\beta, \quad 1 \leq \alpha, \beta \leq 2, \quad S_1 = S_x, \; S_2 = S_y, \tag{40}$$

ou δ_α^β est le symbole de Kronecker. Ces formes Φ_1, Φ_2 ne sont pas univoquement déterminées. Cependant on peut démontrer que les choix

$$\begin{aligned}\Phi_1 &= \frac{1}{4\pi}\left\{\omega_{13} \wedge \omega_{23} + \omega_{14} \wedge \omega_{24} - \omega_{13} \wedge \omega_{14} - \omega_{23} \wedge \omega_{24}\right\}, \\ \Phi_2 &= \frac{1}{4\pi}\left\{\omega_{13} \wedge \omega_{23} + \omega_{14} \wedge \omega_{24} + \omega_{13} \wedge \omega_{14} + \omega_{23} \wedge \omega_{24}\right\},\end{aligned} \tag{41}$$

satisfont aux conditions (40). On en déduit les formules intégrales suivantes

$$\frac{1}{2\pi}\int_M K\,dV = \chi(M)\ , \tag{42}$$

$$\int_M (A_{311}A_{412} - A_{312}A_{411} + A_{321}A_{422} - A_{322}A_{421})\,dV = 0\ .$$

Ces formules ont été données pour la première fois par M. Blaschke [3].

L'étude de la variété $\tilde{G}(2, 2)$ conduit aussi à un résultat, dû à M. Wu Wen-Tsun, qui a une conséquence géométrique intéressante. C'est le problème de considérer une courbe paramétrique fermée simple dans $G(2, 2)$ et de voir si elle est la projection d'une telle courbe dans $\tilde{G}(2, 2)$. Une telle courbe dans $\tilde{G}(2, 2)$ peut être donnée par $(x(t), y(t))$, $0 \leqq t \leqq 1$, où $x(t) \in S_x$, $y(t) \in S_y$, et $x(0) = \pm x(1)$, $y(0) = \pm y(1)$, en désignant par $-x(1)$, $-y(1)$ respectivement les points antipodes de $x(1)$, $y(1)$ dans S_x, S_y. M. Wu Wen-Tsun a démontré que si, pour deux valeurs différentes quelconques t', t'' de t, $(t', t'') \neq (0, 1)$, les plans correspondants dans $G(2, 2)$ n'ont que le point O en commun, alors la courbe est la projection d'une courbe fermée simple dans $\tilde{G}(2, 2)$. Interprété dans la géométrie elliptique réglée, cela veut dire qu'une surface réglée dans un espace elliptique à trois dimensions est toujours orientable. Elle est donc homéomorphe à un tore [1].

10. — Je termine cette conférence par quelques questions naturelles:

A) Trouvez des invariants des sous-variétés relatifs à l'homotopie régulière définie dans le nº 1. En particulier, y a-t-il des paires de sous-variétés homéomorphes à deux dimensions dans un espace euclidien à quatre dimensions qui ne sont pas régulièrement homotopes ?

B) Y a-t-il d'autres conditions nécessaires que les conditions déjà connues pour que l'application $T\colon M \longrightarrow G(n, N)$ soit une application tangentielle ?

C) Dans l'espace euclidien à quatre dimensions y a-t-il une surface compacte à courbure gaussienne toujours négative ?

[1] M. H. Hopf m'a fait remarquer que ce théorème est un corollaire d'un théorème plus général, à savoir qu'il n'est pas possible de plonger topologiquement la bouteille de Klein dans l'espace projectif réel à trois dimensions.