

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 40 (1951-1954)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** LA GÉOMÉTRIE DES SOUS-VARIÉTÉS D'UN ESPACE EUCLIDIEN A PLUSIEURS DIMENSIONS  
**Autor:** Chern, Shiing-Shen  
**Kapitel:** III  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-515809>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 12.12.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

de  $M$  au point  $x$ . On a évidemment  $\tau(x) \leq [n/p(x)]$ , le dernier nombre étant le plus grand entier  $\leq n/p(x)$ .

Cela étant, on a le théorème local suivant, qui est dû à M. ALLENDOERFER [1], [4]: Deux variétés isométriques, dont les premiers espaces normaux sont de même dimension, ne diffèrent que par un mouvement (propre ou impropre), si l'une d'entre elles est de type  $\geq 3$ .

Ce théorème peut être considéré comme un théorème de rigidité locale. Bien entendu, la condition sur le type est très forte.

### III

9. — Pour mieux comprendre la géométrie des sous-variétés, il serait utile d'étudier avec plus de détails le cas d'une surface dans  $E^4$  ( $n = N = 2$ ). Nous faisons une autre hypothèse simplificatrice en supposant que  $M$  est orientée. Alors l'application tangentielle est  $\tilde{T}: M \rightarrow \tilde{G}(2, 2)$ . Dans ce cas on peut donner de cette dernière variété une description simple. En effet, soient  $p_{\alpha\beta}$ ,  $1 \leq \alpha, \beta \leq 4$ , les coordonnées plückeriennes dans  $G(2, 2)$ . Ce sont les coordonnées homogènes assujetties aux conditions

$$p_{\alpha\beta} + p_{\beta\alpha} = 0, \quad p_{12}p_{34} + p_{13}p_{42} + p_{14}p_{23} = 0. \quad (36)$$

Nous les normalisons par la condition

$$\sum_{\alpha, \beta} p_{\alpha\beta}^2 = 2. \quad (37)$$

Alors les coordonnées  $p_{\alpha\beta}$  satisfaisant aux conditions (36), (37) peuvent être considérées des coordonnées dans  $\tilde{G}(2, 2)$ , de sorte que les deux plans orientés qui donnent le même plan non orienté aient des coordonnées différant par le signe. Introduisons des coordonnées nouvelles dans  $\tilde{G}(2, 2)$  en posant

$$\begin{aligned} x_1 &= p_{12} + p_{34}, & x_2 &= p_{23} + p_{14}, & x_3 &= p_{31} + p_{24}, \\ y_1 &= p_{12} - p_{34}, & y_2 &= p_{23} - p_{14}, & y_3 &= p_{31} - p_{24}. \end{aligned} \quad (38)$$

Avec ces coordonnées  $x_\lambda, y_\lambda$ ,  $1 \leq \lambda \leq 3$ , les conditions (36) et (37) sont équivalentes aux conditions

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 1. \quad (39)$$

Ceci démontre que la variété  $\tilde{G}(2, 2)$  est homéomorphe au produit cartésien de deux sphères  $S_x$  et  $S_y$  ordinaires. Comme  $\tilde{G}(2, 2)$  peut être identifiée avec la variété des droites orientées de l'espace elliptique à trois dimensions, ce fait est à la base d'une représentation de Fubini et Study.

Fixons une orientation de  $S_x$  et  $S_y$  et désignons par  $M, S_x, S_y$  les cycles fondamentaux de ces variétés. Les invariants homologiques qu'on peut déduire de l'homomorphisme  $\tilde{T}_*$  sont les entiers  $d_x, d_y$  définis par la condition  $\tilde{T}_*(M) \sim d_x S_x + d_y S_y$ , où  $\tilde{T}_*$  désigne l'homomorphisme induit par  $\tilde{T}$ . On peut démontrer que [7], si les orientations de  $S_x$  et  $S_y$  sont convenablement choisies, on a  $d_x = d_y$  et que la valeur commune est la moitié de la caractéristique d'Euler de  $M$ . La démonstration s'appuie sur l'étude de l'homéomorphisme  $\sigma$  introduit dans le n° 5, qui est dans notre cas un homéomorphisme de  $\tilde{G}(2, 2)$  en elle-même. Son homomorphisme induit sur les cycles a l'effet de fixer un des cycles  $S_x$  et  $S_y$  et changer le signe de l'autre. Ce fait et le résultat  $\overline{W}^2 = 0$  (à coefficients entiers) conduisent facilement à l'égalité  $d_x = d_y$ .

Pour exprimer les relations de ces résultats avec les invariants différentiels de  $M$  dans  $E^4$ , il faut déterminer dans  $\tilde{G}(2, 2)$  des formes différentielles extérieures fermées  $\Phi_1, \Phi_2$  duales aux cycles  $S_x$  et  $S_y$ , c'est-à-dire telles que

$$\int_{S_\alpha} \Phi_\beta = \delta_\alpha^\beta, \quad 1 \leq \alpha, \beta \leq 2, \quad S_1 = S_x, \quad S_2 = S_y, \quad (40)$$

ou  $\delta_\alpha^\beta$  est le symbole de Kronecker. Ces formes  $\Phi_1, \Phi_2$  ne sont pas univoquement déterminées. Cependant on peut démontrer que les choix

$$\Phi_1 = \frac{1}{4\pi} \{ \omega_{13} \wedge \omega_{23} + \omega_{14} \wedge \omega_{24} - \omega_{13} \wedge \omega_{14} - \omega_{23} \wedge \omega_{24} \}, \quad (41)$$

$$\Phi_2 = \frac{1}{4\pi} \{ \omega_{13} \wedge \omega_{23} + \omega_{14} \wedge \omega_{24} + \omega_{13} \wedge \omega_{14} + \omega_{23} \wedge \omega_{24} \},$$

satisfont aux conditions (40). On en déduit les formules intégrales suivantes

$$\frac{1}{2\pi} \int_M K dV = \chi(M) , \quad (42)$$

$$\int_M (A_{311} A_{412} - A_{312} A_{411} + A_{321} A_{422} - A_{322} A_{421}) dV = 0 .$$

Ces formules ont été données pour la première fois par M. BLASCHKE [3].

L'étude de la variété  $\tilde{G}(2, 2)$  conduit aussi à un résultat, dû à M. Wu WEN-TSUN, qui a une conséquence géométrique intéressante. C'est le problème de considérer une courbe paramétrique fermée simple dans  $G(2, 2)$  et de voir si elle est la projection d'une telle courbe dans  $\tilde{G}(2, 2)$ . Une telle courbe dans  $\tilde{G}(2, 2)$  peut être donnée par  $(x(t), y(t))$ ,  $0 \leq t \leq 1$ , où  $x(t) \in S_x$ ,  $y(t) \in S_y$ , et  $x(0) = \pm x(1)$ ,  $y(0) = \pm y(1)$ , en désignant par  $-x(1)$ ,  $-y(1)$  respectivement les points antipodes de  $x(1)$ ,  $y(1)$  dans  $S_x$ ,  $S_y$ . M. Wu WEN-TSUN a démontré que si, pour deux valeurs différentes quelconques  $t', t''$  de  $t$ ,  $(t', t'') \neq (0, 1)$ , les plans correspondants dans  $G(2, 2)$  n'ont que le point O en commun, alors la courbe est la projection d'une courbe fermée simple dans  $\tilde{G}(2, 2)$ . Interprété dans la géométrie elliptique réglée, cela veut dire qu'une surface réglée dans un espace elliptique à trois dimensions est toujours orientable. Elle est donc homéomorphe à un tore <sup>1</sup>.

10. — Je termine cette conférence par quelques questions naturelles:

A) Trouvez des invariants des sous-variétés relatifs à l'homotopie régulière définie dans le n° 1. En particulier, y a-t-il des paires de sous-variétés homéomorphes à deux dimensions dans un espace euclidien à quatre dimensions qui ne sont pas régulièrement homotopes ?

B) Y a-t-il d'autres conditions nécessaires que les conditions déjà connues pour que l'application  $T: M \rightarrow G(n, N)$  soit une application tangentielle ?

C) Dans l'espace euclidien à quatre dimensions y a-t-il une surface compacte à courbure gaussienne toujours négative ?

<sup>1</sup> M. H. HOPF m'a fait remarquer que ce théorème est un corollaire d'un théorème plus général, à savoir qu'il n'est pas possible de plonger topologiquement la bouteille de Klein dans l'espace projectif réel à trois dimensions.