Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 39 (1942-1950)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: RÉSOLUTION D'UN SYSTÈME D'ÉQUATIONS LINÉAIRES ALGÉBRIQUES PAR DIVISION

Autor: Banachiewicz, T.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-515795

RÉSOLUTION D'UN SYSTÈME D'ÉQUATIONS LINÉAIRES ALGÉBRIQUES PAR DIVISION

PAR

T. BANACHIEWICZ (Cracovie).

L'équation élémentaire du premier degré $kx = l$ se résout, quand $k \neq 0$, par la formule $x = l : k$. Une solution pareille peut-elle s'appliquer au système d'équations

$$\begin{aligned} k_{11}x_1 + k_{21}x_2 + \ldots + k_{m1}x_m &= l_1 \\ k_{12}x_1 + k_{22}x_2 + \ldots + k_{m2}x_m &= l_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ k_{1m}x_1 + k_{2m}x_2 + \ldots + k_{mm}x_m &= l_m \end{aligned} \qquad (1)$$

que nous supposons avoir une solution unique ? La réponse à cette question est affirmative, et nous allons voir qu'on obtient même de cette façon une solution du système (1) plus simple que celle à l'aide de l'élimination successive ou des déterminants.

Nous résolvons ce problème à l'aide de nombres tabulaires, connus aux astronomes et aux géodésiens sous le nom de *cracoviens*. Les cracoviens sont analogues aux nombres tabulaires appelés matrices, mais ils diffèrent de celles-ci par la définition du produit et ce qui en découle [1].

---

[1] Parmi les publications sur les cracoviens ou celles qui se servent effectivement de *cracoviens*, nous citons les suivantes, disposées par pays des auteurs:

Allemagne. — K. ILLIGNER, *Astron. Nachr.*, *253*, n° 16 (1934).

Angleterre. — *The Nautical Almanac*, depuis 1931, par ex. 1940, p. 819.

Belgique. — S. AREND, *Bull. Soc. Astr. Belge*, 1933, n° 1; *Bull. Astr. Brux.*, III, 1940, n° 3, 1941, n° 4.

Chine. — E. VILLEMARQUÉ, *Annales Observ. Zo-cé*, *19*, fasc. 3 (1936); aussi *19*, fasc. 1 (1934).

(Voir suite de la note, page suivante.)

§ 1. — *Généralités sur les cracoviens.* — 1. On désigne les cracoviens par des lettres grasses et des accolades. Par exemple

$$\mathbf{a} = \left\{ \begin{matrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \end{matrix} \right\} .$$

L'élément du cracovien $\mathbf{a}$ dans la colonne i et la ligne j est désigné a_{ij}. La colonne i de $\mathbf{a}$, envisagée comme cracovien, est désignée par $\mathbf{a}_i$. Par exemple

$$\mathbf{a}_2 = \left\{ \begin{matrix} a_{21} \\ a_{22} \end{matrix} \right\} .$$

2. Le produit $\mathbf{a} \,.\, \mathbf{b}$ de deux cracoviens $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$, ayant chacun le même nombre de lignes, est un cracovien $\mathbf{p}$ ayant comme élément général $p_{ij} = \mathbf{a}_i \,.\, \mathbf{b}_j$. On multiplie donc les cracoviens colonne par colonne et non lignes par colonnes. En désignant la transposition des éléments par τ, on a la formule $\mathbf{b} \,.\, \mathbf{a} = \tau (\mathbf{a} \,.\, \mathbf{b})$. Le produit $\mathbf{a} \,.\, \mathbf{b} \,.\, \mathbf{c}$ signifie $(\mathbf{a} \,.\, \mathbf{b}) \,.\, \mathbf{c}$. Pour l'association des facteurs dans le produit on a la formule $\mathbf{a} \,.\, \mathbf{b} \,.\, \mathbf{c} \,. = \mathbf{a} \,.\, (\mathbf{c} \,.\, \tau\mathbf{b})$, et pour la dissociation $\mathbf{a} \,.\, (\mathbf{b} \,.\, \mathbf{c}) = \mathbf{a} \,.\, \tau\mathbf{c} \,.\, \mathbf{b}$.

3. Le symbole τ désigne aussi un cracovien carré, ayant des unités sur la diagonale principale et des zéros partout ailleurs. Ainsi

$$\tau = \left\{ \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \right\} , \qquad \tau = \left\{ \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \right\} , \quad \text{etc.}$$

Etats-Unis. — ECKERT and BROUWER, *Astr. Journ.*, n° 1069 (1937).
Italie. — F. ZAGAR, *Mem. del R. Istit. Veneto*, *29*, n° 8 (1928).
Lettonie. — K. STEINS, *Acta Astronomica*, sér. *a*, *3* (1936).
Pologne. — A. CHROMINSKI (applications à l'analyse pratique), *Bull. Acad. Pol. d. Sc.*, A, 1938.
F. KOEBCKE (monographie), *Pozn. Tow. Przyj. Nauk, Kom. Mat.*, A, *4*, 3 (1937).
L. ORKISZ, *Mém. Acad. Pol. d. Sc.*, A, 1933; *Warsaw Obs. Repr.*, *21*.
E. WARCHALOWSKI (monographie). Varsovie, 1939.
Nombreux travaux dans les *Acta Astronomica.* et *Bull. Acad. Pol. et Sc.*, A (L. STANKIEWICZ).
Russie. — I. BELKOVITSCH, *Russ. Astr. Journal*, 1931, VIII, 2 (article monographique).
Personne, à notre connaissance, n'a jusqu'à présent employé les *matrices* dans les calculs astronomiques.

On prend dans τ autant de lignes qu'il faut pour que l'expression contenant τ ait un sens. Le produit $\tau \,.\, \mathbf{a}$, qu'on écrit plus simplement $\tau\mathbf{a}$, désigne $\mathbf{a}$ transposé, comme on l'a déjà dit.

On se sert parfois de τ pour économiser la place. Par exemple

$$\mathbf{x} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_m \end{Bmatrix}$$

peut s'écrire

$$\mathbf{x} = \tau \left\{ x_1 x_2 \dots x_m \right\} .$$

4. Le quotient

$$\mathbf{q} = \mathbf{a} : \mathbf{b} \tag{2}$$

est un cracovien tel que

$$\mathbf{a} = \mathbf{q} \,.\, \mathbf{b} \tag{3}$$

($\mathbf{a}$ doit avoir autant de lignes que $\mathbf{b}$ a de colonnes).

Si l'on désigne par $\mathbf{b}^{-1}$ (l'inverse de $\mathbf{b}$) un cracovien tel que $\mathbf{b} \,.\, \mathbf{b}^{-1} = \tau$ (ou $\mathbf{b}^{-1} \,.\, \mathbf{b} = \tau$), on trouve en multipliant les deux membres de (3) par $\tau\mathbf{b}^{-1}$

$$\mathbf{a} \,.\, \tau\mathbf{b}^{-1} = \mathbf{q} \;. \tag{4}$$

On peut donc remplacer la division par $\mathbf{b}$ par la multiplication par $\tau\mathbf{b}^{-1}$ (si $\mathbf{b}$ a son inverse), mais un pareil procédé exige la connaissance de l'inverse et n'est pas en général recommandable au point de vue du calcul.

L'auteur préfère maintenant la définition du quotient à l'aide de l'équation $\mathbf{a} = \mathbf{q} \,.\, \tau\mathbf{b}$, au lieu de (3).

5. Le système (1) peut s'écrire

$$\mathbf{x} \,.\, \tau\mathbf{k} = \mathbf{l} \tag{1 bis}$$

en posant

$$\{\mathbf{x}\,\mathbf{l}\} = \tau \begin{Bmatrix} x_1 x_2 \dots x_m \\ l_1 l_2 \dots l_m \end{Bmatrix} \qquad \mathbf{k} = \begin{Bmatrix} k_{11} k_{21} & \dots & k_{m1} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot \\ k_{1m} k_{2m} & \dots & k_{mm} \end{Bmatrix} .$$

Nous supposons les équations (1) arrangées de façon que $k_{11} \neq 0$ et qu'en général chaques n premières équations ($n = 1, 2, \ldots m$) puissent être résolues univoquement par rapport aux n premières inconnues $x_1, x_2, \ldots x_n$. Cette supposition générale n'est point gênante, parce qu'il serait superflu de chercher à la satisfaire dès le début des calculs: le cas échéant on remarquerait qu'elle n'est pas satisfaite au cours des opérations et on y remédierait en changeant l'ordre des inconnues (ou des équations) sans avoir à refaire les calculs déjà effectués.

Il vient de (1 *bis*)

$$\mathbf{x} = \mathbf{l} : \tau\mathbf{k} \,. \tag{5}$$

Cette formule est en principe bien connue. Mais nous allons voir que loin d'être, comme jusqu'à présent, un pur symbole, elle permettra de déterminer $\mathbf{x}$, et ceci sans calculer l'inverse $\mathbf{k}^{-1}$ (ce qui présente un problème numériquement plus difficile que la solution cherchée).

§ 2. — *Division par cracoviens triangulaires.* — Soit $\mathbf{b}$ un cracovien (à m colonnes) triangulaire, c'est-à-dire tel que $b_{ij} = 0$, ou bien pour $i < j$ (s'il est « supérieur » de la forme ◹), ou bien pour $i > j$ (s'il est « inférieur » de la forme ◺), tandis que tous les $b_{ii} \neq 0$ ($i = 1, 2, \ldots m$) .

On aura pour une colonne quelconque i de $\mathbf{a}$ et la colonne correspondante de $\mathbf{q} = \mathbf{a} : \mathbf{b}$

$$\mathbf{a}_i = \mathbf{q}_i \cdot \mathbf{b} \,, \qquad \text{d'où} \qquad a_{ij} = \mathbf{q}_i \cdot \mathbf{b}_j \tag{6}$$

Pour un triangle « supérieur » posons successivement dans (6) $j = 1, 2, \ldots m$. On aura les relations

$$a_{i1} = \{q_{i1}\}\{b_{11}\} \,, \qquad a_{i2} = \tau\{q_{i1}\, q_{i2}\} \cdot \tau\{b_{21}\, b_{22}\} \,,$$
$$a_{i3} = \tau\{q_{i1}\, q_{i2}\, q_{i3}\} \cdot \tau\{b_{31}\, b_{32}\, b_{33}\}$$

qui donneront successivement $q_{i1}, q_{i2}, \ldots q_{im}$, $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ étant supposés connus.

Pour un triangle « inférieur » on poserait dans (6) successivement $j = m, m - 1, \ldots 1$, et on trouverait pareillement q_{im}, $q_{i,m-1}, \ldots q_{i1}$.

Dans l'un ou l'autre cas on obtient de cette manière $\mathbf{q}_i$ d'après $\mathbf{a}_i$, c'est-à-dire chaque colonne de $\mathbf{q}$ d'après chaque colonne de $\mathbf{a}$, c'est ce qui nous donne tout le quotient $\mathbf{q}$.

§ 3. — *Décomposition en un produit de deux cracoviens triangulaires.* — Si $\mathbf{k}$ était un cracovien triangulaire, nous saurions déjà appliquer (5). Dans le cas contraire, qui est le cas général, nous décomposons $\mathbf{k}$ en un produit

$$\mathbf{k} = \mathbf{g} \cdot \mathbf{h} \,, \qquad \text{d'où} \qquad k_{ij} = \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{h}_j \,, \tag{7}$$

de deux cracoviens triangulaires $\mathbf{g}$ et $\mathbf{h}$ « supérieurs », et nous allons effectuer la division demandée par (5) en deux étapes. La première équation (7) s'écrit d'une manière plus explicite:

$$\begin{Bmatrix} k_{11} & k_{21} & \cdots & k_{m1} \\ k_{12} & k_{22} & \cdots & k_{m2} \\ k_{13} & k_{23} & \cdots & k_{m3} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ k_{1m} & k_{2m} & \cdots & k_{mm} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} g_{11} & g_{21} & g_{31} & \cdots & g_{m1} \\ 0 & g_{22} & g_{32} & \cdots & g_{m2} \\ 0 & 0 & g_{33} & \cdots & g_{m3} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & g_{mm} \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} h_{11} & h_{21} & h_{31} & \cdots & h_{m1} \\ 0 & h_{22} & h_{32} & \cdots & h_{m2} \\ 0 & 0 & h_{33} & \cdots & h_{m3} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & h_{mm} \end{Bmatrix} \tag{7 bis}$$

Le nombre d'éléments non zéros de $\mathbf{g}$ et $\mathbf{h}$ étant $m^2 + m$ et le nombre de conditions à satisfaire étant m^2, on a un excès m de quantités à déterminer dans la décomposition de $\mathbf{k}$. On peut en profiter en prenant par exemple pour les g_{ii} ($i = 1, 2, \ldots m$) des nombres arbitraires différents de zéro, par exemple des unités, de sorte qu'on peut considérer les g_{ii} comme connus. Posons maintenant dans (7) $i = 1$, $j =$ successivement $1, 2, \ldots m$. Il vient

$$\{ g_{11} \} \cdot \{ h_{11} \, h_{21} \ldots h_{1m} \} = \tau \{ k_{11} \, k_{12} \ldots k_{m1} \} \,,$$

et il en ressort la première ligne de $\mathbf{h}$. En posant dans (7) $i = 2, 3, \ldots m$ et $j = 1$ on trouve

$$\{ g_{21} \, g_{31} \ldots g_{m1} \} \cdot \{ h_{11} \} = \{ k_{21} \, k_{31} \ldots k_{m1} \} \,,$$

ce qui donne à son tour la première ligne de $\mathbf{g}$, pourvu que $h_{11} \neq 0$. On pourra continuer en supposant successivement $n = 2, 3, \ldots m$, et en posant dans (7)

$$i = n \qquad\qquad j = n \,, \; n + 1 \,, \ldots m$$

d'où ressort la ligne n de **h**,

$$i = n + 1 \, , \, n + 2 \, , \, \dots \, m \qquad\qquad j = n$$

d'où ressort la ligne n de **g**, pourvu que $h_{nn} \neq 0$.

On obtiendra ainsi la décomposition cherchée [1], pourvu qu'on ne rencontre pas un élément $h_{nn} = 0$, ce qui arrêterait les opérations.

Or il est facile à voir que tous les h_{nn} sont $\neq 0$. En effet, tout d'abord

$$h_{11} = k_{11} : g_{11} \neq 0 \quad , \quad \text{parce que } k_{11} \neq 0 \; .$$

Supposons maintenant que $h_{nn} = 0$ est le premier coefficient de la diagonale principale de h égal à zéro. Les n expressions

$$\begin{array}{c} k_{11}\, x_1 + k_{21}\, x_2 + \dots + k_{n1}\, x_n \\ k_{12}\, x_1 + k_{22}\, x_2 + \dots + k_{n2}\, x_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ k_{1n} x_1 + k_{2n} x_2 + \dots + k_{nn} x_n \end{array}$$

seraient alors des fonctions linéaires de $n - 1$ seulement formes linéaires

$$\begin{array}{r} g_{11}\, x_1 + g_{21} x_2 + g_{31} x_3 + \dots + g_{n1} x_n \\ g_{22} x_2 + g_{32} x_3 + \dots + g_{n2} x_n \\ \dots\dots\dots\dots \\ g_{n-1,\, n-1}\, x_{n-1} + g_{n,\, n-1}\, x_n \end{array}$$

comme on le voit d'après (7 *bis*), et l'on ne pourrait pas résoudre les n premières équations (1) par rapport aux n inconnues x_1, x_2, ... x_n, ce qui est contraire à notre supposition.

§ 4. — *Solution du problème.* — L'équation (1 *bis*) s'écrit maintenant

$$\mathbf{x} \, . \, (\mathbf{h} \, . \, \mathbf{g}) = \mathbf{l} \quad , \qquad \text{ou} \qquad \mathbf{x} \, . \, \tau\mathbf{g} \, . \, \mathbf{h} = \mathbf{l} \; ,$$

---

[1] Le lecteur qui s'intéresserait aux formules plus développées les trouverait dans notre travail: Etudes d'analyse pratique, *Bull. Acad. Pol. d. Sc.*, A, 1938, pp. 393-404; *Crac. Obs. Repr.*, *22*; mais tout le procédé est extrêmement simple et élémentaire.

d'où, en divisant, d'abord par $\mathbf{h}$ et ensuite par $\tau\mathbf{g}$,

$$\mathbf{x} = \{\mathbf{l} : \mathbf{h}\} : \tau\mathbf{g}\ . \tag{8}$$

Cette équation permet de calculer $\mathbf{x}$ et donne ainsi la solution du problème. La clef de la méthode est donc la décomposition du diviseur en deux facteurs simples, par lesquels on sait diviser directement.

Exemple numérique. — Soit à résoudre le système

$$\begin{aligned}
2x_1 + \ \ 6x_2 + 14x_3 + 10x_4 &= \ \ 60\ ,\\
7x_1 + 26x_2 + 39x_3 + 85x_4 &= 310\ ,\\
6x_1 + 14x_2 + 51x_3 - \ \ 8x_4 &= 105\ ,\\
5x_1 + 13x_2 + 42x_3 + 12x_4 &= 127\ .
\end{aligned}$$

On effectue d'abord la décomposition (7 *bis*), en prenant arbitrairement $g_{11} = g_{22} = g_{33} = g_{44} = 1$:

$$\underset{\mathbf{k}}{\begin{Bmatrix} +2 & +\ 6 & +14 & +10 \\ +7 & +26 & +39 & +85 \\ +6 & +14 & +51 & -\ 8 \\ +5 & +13 & +42 & +12 \end{Bmatrix}} = \underset{\mathbf{g}}{\begin{Bmatrix} +1 & +3 & +7 & +\ 5 \\ 0 & +1 & -2 & +10 \\ 0 & 0 & +1 & +\ 2 \\ 0 & 0 & 0 & +\ 1 \end{Bmatrix}} \cdot \underset{\mathbf{h}}{\begin{Bmatrix} +2 & +7 & +6 & +5 \\ 0 & +5 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & +1 & +3 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \end{Bmatrix}}$$

et on a ensuite, d'après (8):

$$\mathbf{x} = \left[\begin{Bmatrix} +\ \ 60 \\ +310 \\ +105 \\ +127 \end{Bmatrix} : \begin{Bmatrix} +2 & +7 & +6 & +5 \\ 0 & +5 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & +1 & +3 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \end{Bmatrix} \right] : \tau\mathbf{g} =$$

$$= \begin{Bmatrix} +30 \\ +20 \\ +\ 5 \\ +\ 2 \end{Bmatrix} : \begin{Bmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 \\ +3 & +\ 1 & 0 & 0 \\ +7 & -\ 2 & +1 & 0 \\ +5 & +10 & +2 & +1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} +7 \\ +2 \\ +1 \\ +2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix}.$$

En comparaison avec la résolution usuelle par la méthode d'élimination (ou son équivalent dans le langage des matrices [1])

1 Frazer, Duncan and Collar, *Elementary matrices*. Cambridge, 1938, p. 125.

la méthode nouvelle offre l'avantage d'être plus simple en principe, comme généralisation immédiate de la solution de l'équation du premier degré à une inconnue. Elle est plus simple aussi que la méthode d'élimination parce qu'elle opère avec des nombres tabulaires (cracoviens), tandis que la méthode usuelle s'occupe d'équations, conception mathématique logiquement plus composée. Enfin, au point de vue de l'exécution numérique, il est important que la méthode de division ne demande que $m^2 + m$ quantités auxiliaires à déterminer pour m inconnues, tandis que la méthode usuelle en emploie $\frac{1}{6}(2m + 1)(m + 1)m$. Pour $m = 10$ cela donne

110 auxiliaires pour la méthode de division.
385 » » » » usuelle.

Un cas particulier, très important dans les applications, est celui du système symétrique, c'est-à-dire quand

$$\mathbf{k} = \tau\mathbf{k}\ .$$

On pourra alors poser $\mathbf{g} = \mathbf{h}$ et la décomposition de $\mathbf{k}$ en deux facteurs se fait par l'extraction de la racine carrée de $\mathbf{k}$. C'est le cas des équations normales de la méthode des moindres carrés que nous traitons ailleurs.

En pratique, les calculs jusqu'à présent souvent longs et pénibles, se font rapidement, et, avec des contrôles convenables, forment une source d'un vrai plaisir pour quiconque les exécute avec un arithmomètre.

§ 5. — *Résolution indéterminée.* — Dans ce qui précède on supposait que $\mathbf{l}$ consiste en une seule colonne, mais la formule (8) est de même juste pour un cracovien $\mathbf{l}$ à un nombre de colonnes quelconque.

Le cas particulier très important est celui de l'équation

$$\mathbf{Q} \cdot \mathbf{k} = \tau \qquad (9)$$

où l'on cherche $\mathbf{Q} = \mathbf{k}^{-1}$, qui est appelé solution indéterminée de l'équation (1 *bis*). En effet, en multipliant les deux membres de (1 *bis*) par **Q** et en tenant compte de (9) on obtient pour chaque **l**

$$\mathbf{x} = \mathbf{l} \, . \, \mathbf{Q} \tag{10}$$

D'après (9) et (7) il vient

$$\mathbf{Q} = \left\{ \tau : \mathbf{g} \right\} : \tau\mathbf{h} \; . \tag{11}$$

Pour notre exemple numérique on a

$$\mathbf{Q} = \left\{ \left\{ \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix} \right\} : \left\{ \begin{matrix} +1 & +3 & +7 & +5 \\ 0 & +1 & -2 & +10 \\ 0 & 0 & +1 & +2 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \end{matrix} \right\} \right\} : \tau\mathbf{h} =$$

$$= \left\{ \begin{matrix} +1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & +1 & 0 & 0 \\ -13 & +2 & +1 & 0 \\ +51 & -14 & -2 & +1 \end{matrix} \right\} : \left\{ \begin{matrix} +2 & 0 & 0 & 0 \\ +7 & +5 & 0 & 0 \\ +6 & -4 & +1 & 0 \\ +5 & -2 & +3 & +1 \end{matrix} \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{matrix} +766.5 & -201.3 & -32.8 & +13.5 \\ -113.0 & +29.8 & +4.8 & -2.0 \\ -166.0 & +44.0 & +7.0 & -3.0 \\ +51.0 & -14.0 & -2.0 & +1.0 \end{matrix} \right\} .$$

On retrouve le tableau de notre travail antérieur [1], où **Q** était calculé par la formule $\mathbf{Q} = \mathbf{g}^{-1} \, . \, \mathbf{h}^{-1}$, demandant la détermination non seulement de $\mathbf{g}^{-1}$, comme (11), mais aussi de $\mathbf{h}^{-1}$. Aux dépens de la simplicité du procédé on peut même calculer **Q** d'après **g** et **h** sans aucune auxiliaire excepté les g_{ii}^{-1} qui ne comptent pas d'ailleurs, si l'on prend les $g_{ii} = 1$.

En effet la formule (11) donne

$$\mathbf{Q} \, . \, \tau\mathbf{h} = \mathbf{g}^{-1} \tag{11 a}$$

et l'on tire de l'équation $\tau\mathbf{Q} = \mathbf{h}^{-1} \, . \, \mathbf{g}^{-1}$

$$\tau\mathbf{Q} \, . \, \tau\mathbf{g} = \mathbf{h}^{-1} \; . \tag{11 b}$$

Contrairement à ce qui pourrait paraître à première vue, $\mathbf{g}^{-1}$ et $\mathbf{h}^{-1}$ ne sont point nécessaires pour utiliser ces formules, les éléments zéros et les

---

[1] *Loc. cit.*

éléments de la diagonale principale du cracovien g étant suffisants. En effet on voit facilement que d'abord (11 *a*) donne la dernière colonne m de **Q** en donction de g_{mm}^{-1}, ensuite (11 *b*) la ligne m de **Q**. Après ceci (11 *a*) donne la colonne $m - 1$ de **Q**, et (11 *b*) la ligne $m - 1$ de **Q**, etc. De proche en proche on calcule ainsi **Q** tout entier.

§ 6. — *Relation entre la solution nouvelle et celle de Cramer. Calcul des déterminants.* — D'après (8) on a $\mathbf{x} \,.\, \tau\mathbf{g} = \{\mathbf{l} : \mathbf{h}\}$ ou, ce qui revient au même, $\mathbf{x} = \{\mathbf{l} : \mathbf{h}\} \,.\, \mathbf{g}^{-1}$, ou encore

$$x_i = \{\mathbf{l} : \mathbf{h}\} \,.\, \{\mathbf{g}_i^{-1}\} = \{\mathbf{l} : \mathbf{h}\} \,.\, \{|\mathbf{g}|\, \mathbf{g}_i^{-1}\} : |\mathbf{g}| \qquad (i = 1, 2, \ldots m) \,.$$

Mais $|\mathbf{g}|\, \mathbf{g}_i^{-1}$ peut être considéré comme la colonne i des mineurs du premier ordre du déterminant $|\mathbf{g}|$ et, en supposant dans $|\mathbf{g}|$ la colonne i remplacée par $\mathbf{l} : \mathbf{h}$, la formule qui donne la valeur d'un déterminant en fonction de cette colonne et de ses cofacteurs permet d'écrire

$$x_i = |\mathbf{g}_1 \mathbf{g}_2 \ldots \mathbf{g}_{i-1}, \ \mathbf{l} : \mathbf{h} \,, \ \mathbf{g}_{i+1} \ldots \mathbf{g}_m| : |\mathbf{g}| \,.$$

En multipliant toutes les colonnes du premier déterminant par **h**, ce qui fait augmenter sa valeur $|\mathbf{h}|$ fois, et en tenant compte de ce que

$$\{\mathbf{k}\} = \{\mathbf{g}\} \,.\, \{\mathbf{h}\} \,, \qquad \text{d'où} \qquad |\mathbf{k}| = |\mathbf{g}|\,|\mathbf{h}| \,,$$

il vient

$$x_i = |\mathbf{k}_1 \ldots, \ \mathbf{k}_{i-1} \,, \ \mathbf{l} \,, \ \mathbf{k}_{i+1} \,, \ \ldots \mathbf{k}_m| : \ \mathbf{k}| \quad (i = 1, 2, \ldots m) \,, \tag{12}$$

c'est-à-dire la solution de Cramer.

Inversement on passerait pareillement de (12) à (8), ce qui mène d'ailleurs à la façon la plus avantageuse connue du calcul de (12). Il est donc confirmé ainsi qu'on peut utiliser numériquement, dans un sens assez borné, les formules de Cramer, comme nous l'avons indiqué dans notre travail antérieur [1], mais on est conduit alors à la transformation des déterminants en expressions très élémentaires, qui peuvent être obtenues beaucoup plus rapidement par la voie directe, sans l'intermédiaire des déterminants.

---

[1] Zur Berechnung der Determinanten, etc. *Acta Astron.*, sér. *c*, *3*, 41-72 (1937).

Si l'on veut calculer $|\mathbf{k}|$, la méthode de décomposition s'y prête parfaitement, parce que

$$|\mathbf{k}| = (g_{11} g_{22} \dots g_{mm}) (h_{11} h_{22} \dots h_{mm}) . \qquad (13)$$

§ 7. — *Remarque finale.* — Le lecteur demandera peut-être pourquoi nous n'avons pas employé les matrices dont l'algèbre est pourtant plus simple. Ce n'est pas ici le lieu de discuter les différents avantages et désavantages relatifs des matrices et des cracoviens, mais l'essentiel c'est la grande facilité des calculs effectifs, tant numériques que littéraux, des produits des cracoviens, grâce à la conformité de ces opérations fondamentales au principe de la juxtaposition des éléments correspondants. La difficulté presque prohibitive de pareils calculs avec les matrices semble avoir retardé sensiblement l'emploi tellement utile des nombres tabulaires dans les différents domaines des Mathématiques.

Cracovie, mars 1941.

ADDENDA

Dans le laps du temps de sept années qui durent s'écouler, par suite de la guerre, entre la composition et l'impression de cet article, l'auteur a développé différents résultats ci-dessus.

La supposition (p. 4) que les équations soient spécialement arrangées et puissent être résolues univoquement n'est point nécessaire, parce que la solution s'applique dans le cas le plus général de n équations à m inconnues. Il suffit de chercher la décomposition du $\mathbf{k}$ en un produit de deux facteurs « élémentaires ». Un cracovien est *élémentaire* si dans chacune de ses lignes « s'éteint » au moins un colonne, et l'on dit qu'une colonne d'un cracovien *s'éteint* dans la ligne s, si l'élément de cette colonne dans la ligne s est différent de zéro, les éléments suivants dans cette colonne étant zéros ou n'existant pas (si la ligne est la dernière).

On démontre facilement le théorème (fondamental) que chaque cracovien $\mathbf{k}$ (carré ou non) non zéro peut être décomposé en un produit $\mathbf{k} = \mathbf{g} \,.\, \mathbf{h}$ de deux cracoviens élémentaires $\mathbf{g}$ et $\mathbf{h}$.

Le nombre de pareilles décompositions peut être très grand (sans compter le facteur banal de proportionnalité), mais le nombre r de lignes du **g** et **h** est le même pour toutes ces décompositions: c'est *le rang* du **k**. On a dès lors une méthode très simple de la détermination de ce qu'on appelle le rang d'une matrice.

Avec la nouvelle définition du quotient (§ 1, fin du passage 4), en posant

$$\{\mathbf{k}\,\mathbf{l}\} = \mathbf{g}'.\mathbf{h}\ , \quad \mathbf{x}' = \tau\{x_1\,,\ x_2\,,\ \ldots\ x^m\,,\ -1\}\,,$$

la solution (8) se simplifie encore et devient

$$\mathbf{x}' = \mathbf{0} : \mathbf{g}' \tag{8*}$$

$\mathbf{x}'$ existe si **g** et $\mathbf{g}'$ sont du même rang, c'est-à-dire ont le même nombre de lignes, et n'existe pas dans le cas contraire. La solution, quand elle existe, a $m - r + 1$ degrés de liberté.

On évite ainsi complètement l'emploi des déterminants dans la résolution numérique d'équations linéaires arbitraires, ainsi que dans la détermination du rang d'un tableau.

Quant à la propagation non astronomique des cracoviens, notons que le Conseil national de l'Office central des mesures du pays en Pologne les a recommandés, en 1946 et 1947, pour les calculs géodésiques, et ils sont enseignés maintenant brièvement dans les principales écoles polytechniques de Pologne. Dans son *Algèbre nucléaire* (non publiée), M. T. Kochmański (Cracovie) donne une application importante des cracoviens aux calculs des séries; le même auteur publia entre autres plusieurs exposés didactiques. A Varsovie, M. S. Husbrandt, de la Polytechnique, les applique aux divers problèmes du calcul numérique (nombreux manuscrits photocopiés). Le livre *Scienza delle Costruzioni*, vol. 2, Bologne 1946, de M. Odone Belluzzi, pp. 287-298, enseigne l'emploi des cracoviens dans la résolution des équations linéaires. M. W. Sierpiński en parle dans plusieurs endroits de ses *Fondements d'Algèbre supérieure*, Varsovie 1946 (en polonais).

Cracovie, juillet 1948. T. Banachiewicz.