Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 39 (1942-1950)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: DE L'ADAPTATION DE L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES A LA RÉCEPTIVITÉ MENTALE DE L'ÉLÈVE

Autor: Drenckhahn, Fr.

Kapitel: 3.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-515807

Les réflexions conduisant à ces résultats n'ont rien de commun avec la loi psychogénétique; ils apparaissent forcément à celui qui cherche à comprendre dans leur sens exact les écrits mathématiques.

Le sens du développement historique des mathématiques quant à l'objectivité des faits et des modes de recherche de propositions incite à les caractériser selon ces différents niveaux de connaissance. Même en admettant des transitions, on peut distinguer trois niveaux bien déterminés:

a) le niveau réaliste ou expérimental-inductif,
b) le niveau intermédiaire intuitif, où le terme intuitif se rapporte aussi bien aux notions qu'aux procédés,
c) le niveau formel ou logico-déductif.

Les domaines (et la systématique) des trois niveaux ne se recouvrent nullement. Tout ce qui est naturellement expérimental-inductif appartient au premier niveau. Ainsi, ni la division d'une fraction par une fraction, ni le théorème de la somme des angles d'un triangle n'y appartiennent. Au deuxième niveau appartient, en plus de toute la matière du premier, tout ce qui est accessible à l'intuition prise dans le sens qu'on donne communément à ce terme dans l'expression « enseignement intuitif », par exemple la règle de division d'une fraction par une autre et les nombres relatifs, mais pas l'irrationnel, le théorème de la somme des angles d'un triangle, mais pas celui de Pascal ni celui de Brianchon. Le troisième niveau enfin englobe la totalité des mathématiques.

3.

Le passage de considérations historiques à des considérations épistémologiques rend nécessaire une remarque préliminaire.

Dans la totalité du complexe « les mathématiques comme science de l'ordre et de l'orientation et comme fonction ordonnatrice et de direction de notre être conscient », deux groupes d'expressions jouent un rôle particulier: perception (Anschauung) et concept, ainsi que perception et pensée. Perception et concept désignent deux pôles de la connaissance qui ne peuvent se manifester de façon indépendante l'un de l'autre, c'est-à-dire que toute perception contient des éléments non perceptifs, des éléments conceptuels, et de même, chaque concept contient des éléments extra-logiques, perceptifs. Perception et pensée représentent en outre des pôles de nos moyens de connaissance ou de prise de conscience qui également ne se rencontrent jamais totalement séparés l'un de l'autre. La perception du concret comme activité sensorielle a besoin de représentations la précédant au même titre que la pensée conceptuelle, comme activité du cerveau, utilise la perception précédant la pensée.

Nous passons de la perception à la pensée et de la perception au concept de façon continue par des changements d'accentuation. Dans tous les cas on ne parlera pas, selon nos vues, de concept uniquement lorsqu'une définition correcte est présentée ou lorsqu'il est précisé par des concepts plus élémentaires, mais déjà lorsque la quantité d'éléments conceptuels dans sa perception, c'est-à-dire dans ses représentations vicariantes, garantit un emploi adéquat sans tout cela. Selon nos vues, la notion de nombre est un « ens rationis cum fundamento in re » au développement de laquelle ont participé des éléments intuitifs sous forme de suites d'abstractions sans pour autant que ceux-ci soient entièrement suffisants à former la notion de nombre; le point final doit être posé par une participation de la pensée sous forme d'un apport génétique-opératoire.

Grâce à sa genèse, la notion de nombre permet en tout temps des objectivations, mais finalement il n'a plus besoin de ces dernières pour se justifier. La même chose est valable pour les concepts géométriques.

Perception et pensée n'apparaissent pas ici isolément l'une à côté de l'autre comme activités sensorielles qui suivraient des impulsions périphériques, d'une part, et comme activités du cerveau provoquées centralement et dont on ne sait pas quand elles entrent en réaction mutuelle, mais comme des activités de notre conscience dans laquelle d'emblée elles ont d'étroites relations. Il y a lieu de supposer un centre particulier dirigeant l'activité cognitive qui coordonne perception et pensée et qui leur soit antérieur. En lui, on pourra aussi se représenter réunies les deux possibilités de manière qu'il en résulte une façon moyenne de concevoir les choses qui ne puisse être désignée ni par perception ni par pensée. Nous avons choisi pour elle le terme « intuition ». Nous décrivons sa façon d'agir en disant qu'elle se rapproche aussi bien de la perception dans ce qu'elle a d'immédiat et d'original sans en avoir ses défauts — car elle ne vise pas le phénomène isolé, mais le concept — que de la pensée dans sa rigoureuse nécessité, sans toutefois avoir besoin d'analyser complètement le fait ni d'élaborer une suite de conclusions. Le terme « niveau intuitif » est ainsi suffisamment expliqué.

Je serai bref dans la caractérisation des trois niveaux et je renvoie, pour des détails, à d'autres publications antérieures et actuelles plus explicites.

Le premier niveau. — La notion de nombre du premier niveau peut être caractérisée en citant John-Stewart Mill: « Chaque nombre 1, 2, 3, etc. désigne un phénomène physique. » « 10 doit signifier 10 corps ou 10 sons ou 10 battements de cœur. »

La notion de nombre est dominée par l'idée de dénombrement: Les nombres sont des quantités, au contraire des nombres du calcul définis par des opérations arithmétiques (nombres algorithmiques), tels les nombres négatifs.

Le procédé expérimental-inductif est approprié à cette conception réaliste des nombres. John-St. Mill remarque à ce sujet: « Les vérités de cette science reposent entièrement sur la preuve sensible; elles sont démontrées par le fait que nos yeux ou nos doigts apprennent qu'un certain nombre d'objets, par exemple 10 balles, reste le même quels que soient les différents nombres obtenus en séparant de façon quelconque et en réunissant ensuite à nouveau ces objets. » De la même manière, on établit encore par exemple la commutativité de l'addition $a + b = b + a$.

La notion réaliste du nombre et sa déduction expérimentale-inductive se conditionnent mutuellement très étroitement. Le résultat en est une notion du nombre tout à fait particulière. La notion obtenue concrètement est appliquée finalement en dehors de ce domaine à des nombres plus grands — conséquence de la méthode inductive — et auxquels il manque toute base concrète.

Les fractions appartiennent à ce niveau pour autant qu'elles soient accessibles à cette façon de les concevoir. C'est le cas pour l'addition et la soustraction, la multiplication et la division par un nombre entier, mais pas plus loin. Au-delà, c'est le caractère de nombre opératoire qui prend le dessus.

En ce qui concerne leur déduction, les propositions de ce niveau ne sont jamais concluantes, tout au plus ont-elles un caractère d'assertion.

La géométrie s'adapte facilement au cadre esquissé pour l'arithmétique.

Elle est réaliste: ses notions sont tributaires du domaine manuel-perceptif: un triangle en bois ou en carton, ou un triangle dessiné n'a pas seulement une fonction de remplacement, mais il *est* un triangle, le triangle de ce niveau. Les notions sont aussi étroites: Le quadrilatère est un carré ou un rectangle, mais pas le quadrilatère général.

Son procédé est expérimental-inductif; il est déterminé par la construction et la mesure. Comme géométrie de la congruence, elle enregistre des procédés de construction et de calcul qui découlent des propriétés manifestes des objets géométriques. La façon de dessiner un rectangle suit les représentations obtenues en pliant un rectangle dans une feuille de papier: Le dessin se fait dans la succession exacte des actions du pliage. La formule pour le calcul de la longueur de la circonférence est obtenue en prenant la moyenne de nombreuses mesures, sans que soit reconnue la nécessité de la constance du rapport de la longueur de la circonférence à son diamètre.

La systématique suit les caractères extérieurs de la forme géométrique.

Pour terminer, nous ferons remarquer qu'aussi bien en arithmétique qu'en géométrie de ce niveau, on obtient des relations fonctionnelles simples de façon toute naturelle.

Le deuxième niveau. — Il est plus difficile de caractériser l'ensemble notionnel du deuxième niveau que celui du premier. Les nombres de ce niveau sont les nombres rationnels. Aux nombres entiers pris comme nombres quantitatifs viennent s'ajouter les nombres négatifs et les fractions comme nombres algorithmiques. A ceux-ci manque en grande partie une base concrète. Ils ne sont donc plus accessibles à un procédé expérimental-inductif. On ne peut pas obtenir $\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{8}{15}$ ou $(-2)(-2) = +4$ par une action.

Ce fait exige une nouvelle définition du nombre à partir de l'opération. Il exige aussi un nouveau procédé. La notion de nombre dans sa nouvelle signification doit englober l'ancienne et doit, de par sa nature, être basée sur une règle de construction.

Dans l'addition et la soustraction des fractions, la notion de nombre a, en partie, perdu sa signification première, mais a gardé son sens opératoire. Il en va autrement dans la multiplication de deux fractions. Si le problème $\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5}$ doit garder un sens se rapportant à celui de la multiplication de deux nombres entiers, il se présente le principe de la permanence des opérations formelles de HANKEL qui, appliqué à notre problème, conduit par exemple à la suite

$$6 \cdot \frac{4}{5} = \frac{24}{5}, \qquad 2 \cdot \frac{4}{5} = \frac{8}{5}, \qquad \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{8}{15},$$

où le dernier produit est obtenu par prolongement fonctionnel au delà de la définition primitive de la multiplication. La définition de la multiplication de deux fractions a en outre pour résultat une plus grande précision et un approfondissement de la notion de fraction.

Le procédé de ce niveau dépasse le procédé inductif précédent qui se rapportait toujours en fin de compte à des objets concrets, alors qu'il s'agit maintenant de données formelles. La part de la réflexion dans ce procédé cognitif formel-inductif est donc beaucoup plus grande que dans le cas concret-inductif — et avant tout: il va très profondément et est essentiel, comme le montre le développement de l'arithmétique scientifique du XIXe siècle.

Non seulement les nouveaux nombres demandent à être soumis à une nouvelle perspective, mais aussi les nombres naturels. Ainsi, par exemple, la justification expérimentale-inductive de la commutativité de l'addition et de la multiplication ne correspond plus à ce niveau de la connaissance.

Ainsi, on peut faire au sujet de la commutativité de la multiplication les réflexions suivantes:

Si l'on ordonne sur une feuille de papier 3 lignes superposées de 4 points chacune, alors 3.4 points est leur nombre total. Si l'on tourne la feuille dans son plan de 90°, on aura 4 lignes de 3 points, leur nombre total étant de 4.3 points. Aucun point n'étant venu s'ajouter ni aucun n'ayant été perdu pendant la rotation, on aura $3.4 = 4.3$. Contrairement au procédé expérimental-inductif, la relation $3.4 = 4.3$ est obtenue directement sans avoir calculé les deux produits.

La répétition de ce procédé, en posant un nombre quelconque de points par ligne — que nous désignons par b pour pouvoir en parler — et un nombre quelconque de lignes que nous désignons par a, donnera $a.b = b.a$. Les lettres a et b représentent tous les nombres 1, 2, 3, ... La commutativité a donc une portée générale non seulement de fait, mais nécessairement.

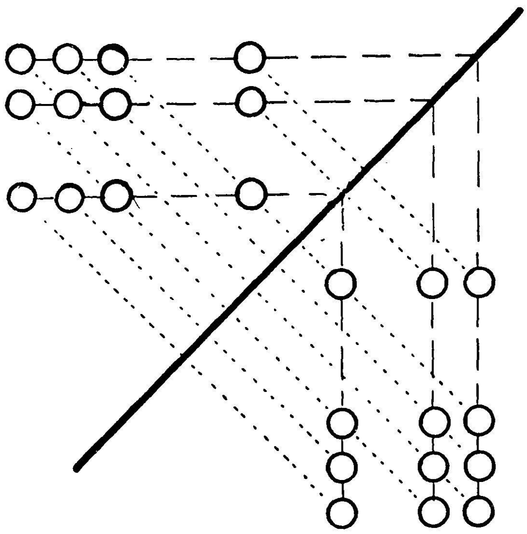

Fig. 1.

$a \,.\, b = b \,.\, a$

Le procédé peut encore être affiné et devenir une véritable démonstration par correspondance biunivoque des points des deux ensembles (voir fig. 1).

En se rapportant aux points visibles, ce procédé intuitif est proche du procédé expérimental qui actionne des objets concrets et par la correspondance des points de $a.b$ et de ceux de $b.a$ du procédé inductif. Il y a la différence essentielle que la démonstration intuitive ne se contente pas de montrer par quelques exemples la justesse de $a.b = b.a$, mais permet, par une construction réfléchie, de saisir ce fait dans sa généralité et de passer ainsi du problématique à l'apodictique.

Par opposition à la démonstration logico-discursive de cette proposition, la démonstration par correspondance exige que le tout soit pris en considération dès le début jusqu'à la fin et elle conduit ainsi au résultat par une vision simultanée des différents éléments (Wesensschau) de sorte qu'on est enclin à parler d'un procédé global pour marquer ce qui le différencie du procédé discursif qui s'attache aux éléments vus isolément. Nous avons déjà signalé que la démonstration intuitive utilise la réflexion, mais dans la démonstration logique celle-ci est plus dépendante du système scientifique.

En géométrie tout se passe de façon analogue.

Dans ses concepts prédomine le moment géométrique-constructif qui se forme à la suite de représentations idéalisées de mouvements (par exemple retournement, rotation, translation) et de certaines formes fondamentales (par exemple point, segment, partie de plan). Les concepts atteignent un degré suffisant de généralité qui est obtenu par étapes: après, et à la suite de triangles particuliers, se développe la notion de « triangle » qui s'applique à tout triangle.

A cette formation des concepts par étapes correspond un échelonnement de propositions et de connaissances. Un théorème trouvé tout d'abord pour un cas spécial est progressivement étendu à des cas plus généraux et devient finalement tout à fait

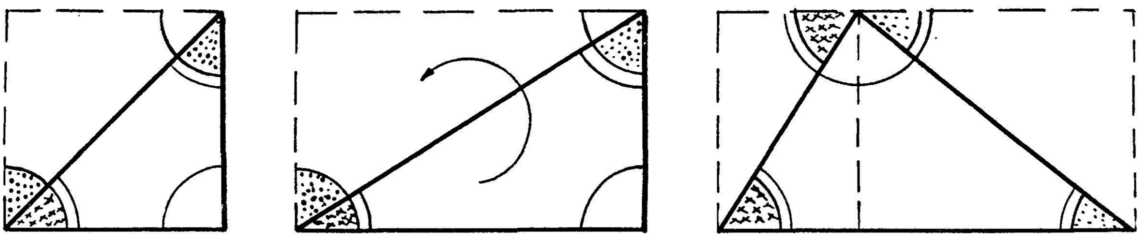

Fig. 2.

$$\alpha = 45^\circ\,,\quad \beta = 45^\circ\,,\quad \gamma = 90^\circ$$

$$\alpha + \beta = 90^\circ\,[= \gamma] \qquad \alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

général. Recherche et démonstration d'une propriété marchent ensemble et se pénètrent mutuellement; chaque étape prépare la suivante (voir fig. 2).

La part principale dans la recherche de nouvelles relations revient — à côté de l'imagination et du pouvoir combinatoire — à la pensée fonctionnelle, alors que la perception spatiale — et non la pensée formelle — assure la valeur de vérité des trouvailles. En un mot : le procédé est global dans le sens donné à ce terme pour l'arithmétique et authentiquement intuitif par la liaison intime de concept et fonction. Ceci est encore accentué par le fait que lors de la formation d'un concept certaines représentations, comme par exemple celle d'un mouvement déterminé, jouent un rôle décisif dans la découverte d'une propriété. Le caractère apodictique des connaissances ne peut pas être nié.

Au centre des préoccupations se trouvent les propriétés de forme des figures parmi lesquelles les surfaces rectangulaires et les corps polyédriques occupent une place en vue (voir fig. 3).

La systématique suit le principe de la forme.

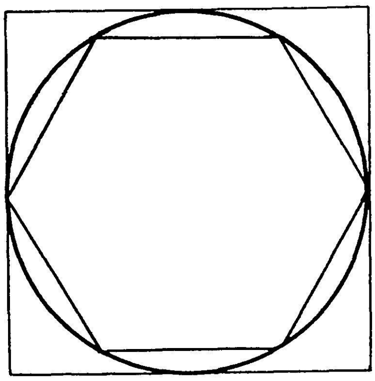

Fig. 3.

$3\,d < \text{circ.} < 4\,d$

$\text{circ.} = 3,\ \ldots\ d$

Le troisième niveau. — Celui-ci a été caractérisé comme formel par rapport aux concepts et comme logique par rapport aux procédés. Ceux-ci sont « élémentaires ». Il est superflu d'entrer ici dans des détails.

La subdivision des mathématiques en trois niveaux suivant leur logique objective manifeste un pouvoir de modulation des matières qui nous permet de choisir ce qui est le mieux adapté aux exigences de l'enseignement.

La mathématique du premier niveau a été développée par la pratique de façon à peu près satisfaisante. Des divergences règnent encore au sujet de sa limite supérieure. Le troisième niveau a été élaboré par la science. Le niveau moyen n'est pas encore bien développé et je vois dans ce fait l'une des causes primordiales de l'enseignement actuel peu satisfaisant des écoles primaires supérieures et des classes correspondantes de l'école secondaire.

Il est évident que chacun des trois niveaux peut encore être subdivisé quant à la « rigueur » de ses conceptions. En principe, la mathématique est à même, grâce à sa capacité de modulation, de satisfaire les vœux de la pédagogie. Il appartient essentiellement à la didactique des mathématiques de développer dans le détail le premier et le deuxième niveaux sans, tout d'abord, ainsi que nous l'avons déjà fait remarquer ailleurs, prendre égard à la possibilité d'utilisation dans l'enseignement.

4.

Quant à savoir lequel des trois niveaux des mathématiques sera mis à la base de l'enseignement, cela dépendra de *considérations d'ordre psychologique.* Il y va du développement intellectuel de l'élève qui, dans ses états momentanés, est la résultante de facteurs intérieurs et extérieurs. Les deux composantes agissent étroitement l'une sur l'autre: les impulsions intérieures vont à la rencontre des excitations et impressions extérieures et celles-ci à leur tour appellent peut-être de nouvelles forces.

Ce qui nous intéresse, ce sont les changements intervenant au cours du développement, aussi bien ceux qui concernent l'attitude générale réceptive et assimilatrice de l'enfant face à des faits nouveaux, par exemple ses motifs et ses formes de travail, que ceux qui se rapportent plus particulièrement aux mathématiques. Cependant, nous nous limitons aux derniers, et encore pour autant qu'il s'agisse du temps de l'école obligatoire, c'est-à-dire de la 6^{e} à la 15^{e} année.

D'après mes expériences, le développement psychique de l'individu présente dans cette période deux coupures importantes, à savoir vers la 7^{e} et la 12^{e} (jusqu'à la 13^{e}) année. Je vois encore une autre coupure dans la 15^{e} année, qui se manifeste donc comme telle pendant l'enseignement secondaire. Le comportement général dans l'élaboration des connaissances mathématiques pendant la 6^{e} année étant sensiblement le même que pour la période de la 7^{e} à la 12^{e} année, malgré certaines particularités, nous en arrivons, ici aussi, à considérer trois étapes: de la 6^{e} à la 12^{e} année, de la 12^{e} à la 15^{e} année et la période au-dessus de la 15^{e} année. On ne peut passer sous silence que ces indications approximatives contiennent une large part de généralisation. Mais elles permettent d'établir de nombreuses relations avec nos développements mathématiques précédents.

Car, du point de vue de la conception mathématique, la période allant de la 6^{e} à la 12^{e} année correspond essentiellement