Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 39 (1942-1950)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LA GÉOMÉTRIE SENSIBLE

Autor: Hjelmslev, Johannes

Kapitel: III. L'espace arithmétique

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-515806

donc

$$-\sin a \sin b \cos C = \begin{vmatrix} \cos a & \cos c \\ 1 & \cos b \end{vmatrix}$$

ou

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C\,,$$

c'est-à-dire la formule générale des cosinus.

En appliquant la formule III, nº 37, nous avons

$$\widehat{\widehat{BC}\,\widehat{CA}} = \begin{vmatrix} C & A \\ 0 & \widehat{BCA} \end{vmatrix} = C \cdot \widehat{BCA}\,,$$

ou

$$C\,(\sin a \sin b \sin C) = C\,.\,\widehat{ABC}$$

$$\sin a \sin b \sin C = \widehat{ABC}\,,$$

ce qui constitue la formule des sinus dans l'espace. En exécutant un mouvement circulaire en A, B, C on obtient

$$\sin b \sin c \sin A = \sin c \sin a \sin B = \sin a \sin b \sin C$$

ou par division par $\sin a \sin b \sin c$

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c}\,,$$

ce qui représente la formule des sinus pour le triangle sphérique.

Ces deux formules constituent la base de la trigonométrie sphérique.

III. L'espace arithmétique.

40. — Dans ce qui précède nous avons introduit toute l'analyse calculatoire pour étudier la géométrie de la chambre; maintenant nous allons élargir cette analyse de façon à y renfermer tous les nombres réels, qu'ils soient grands ou petits, rationnels ou irrationnels. Nous définissons en effet comme suit:

Un point arithmétique est un ensemble de nombres (a_1, a_2, a_3) où a_1, a_2 et a_3 sont des nombres réels arbitraires (les coordonnées du point). Le point O (0, 0, 0) s'appelle l'origine. Un ensemble de deux points arithmétiques a et b pris dans cet ordre, s'appelle un vecteur $\overline{ab}$; le vecteur $\overline{Oa}$ est cependant désigné par la lettre a seule. Chaque vecteur a détermine une translation, c'est-à-dire une transformation qui déplace le point (x_1, x_2, x_3) sur le point correspondant $(x_1 + a_1, x_2 + a_2, x_3 + a_3)$. La somme et la différence de deux vecteurs se définissent comme plus haut, d'où résulte $\overline{ab} = b - a$. On multiplie un vecteur a par un scalaire λ en multipliant ses coordonnées par λ. Une droite est définie par le point variable $x = a + \lambda b$, où a et b sont deux vecteurs fixes tandis que λ est un paramètre arbitrairement variable. On définit le produit ab par la relation

$$ab = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

et des vecteurs perpendiculaires l'un à l'autre par la condition $ab = 0$. Un plan est défini par la représentation paramétrique $x = a + \lambda b + \mu c$, où a, b et c sont des vecteurs fixes, λ et μ sont des paramètres. Le vecteur viré $\widehat{ab}$ de deux vecteurs a et b est défini par

$$\widehat{ab} = (a_2 b_3 - a_3 b_2\,, \quad a_3 b_1 - a_1 b_3\,, \quad a_1 b_2 - a_2 b_1)\ .$$

La distance entre deux points a et b est définie par $\sqrt{(a - b)^2}$, les aires et les volumes comme précédemment ainsi que les notions trigonométriques.

Il est immédiatement évident que tous les résultats et locutions antérieurs sont applicables dans notre domaine élargi (l'espace arithmétique).

41. — Nous ferons, en dernier lieu, encore cette remarque que la transition au domaine encore plus général qu'est le domaine complexe est fort simple. Toutes les définitions et locutions s'appliquent directement avec la réserve qu'il faut prendre, comme dans le plan (voir article 2) pour les vecteurs à longueur zéro, c'est-à-dire tous les vecteurs (k_1, k_2, k_3) où $k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 = 0$. Les droites qui contiennent de tels vecteurs s'appellent des lignes isotropes; elles n'ont pas de vecteur d'orientation et doivent donc être exclues des recherches dans lesquelles celui-ci est indispensable, telles que les recherches sur les relations trigonométriques qui d'ailleurs, à part cette exception, s'appliquent au domaine complexe sans aucune modification.