Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 39 (1942-1950)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LA GÉOMÉTRIE SENSIBLE

Autor: Hjelmslev, Johannes

Kapitel: II. La géométrie de la chambre.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-515806

II. La géométrie de la chambre.

17. — Une chambre a la forme d'un cube dont l'arête est égale à 5 mètres. Par le milieu O du cube nous menons un plan horizontal, le plan médian; il divise la chambre en deux espaces symétriques, l'un supérieur, l'autre inférieur. Le plan médian joint les parois le long d'un carré dont le côté est égal à 5 mètres. Nous rapportons les points de ce carré à un système de coordonnées dont les axes x et y partent du milieu O parallèlement aux côtés du carré et munis de directions positives déterminées. Chacun de ces points est déterminé par deux coordonnées.

L'on peut maintenant indiquer la position d'autres points P dans la chambre, qu'ils appartiennent à l'espace supérieur ou inférieur de celle-ci, par leur projection P′ sur le plan médian et par la distance P′P au-dessus ou au-dessous de celui-ci. Cette distance est munie de signes, en effet $+$ ou $-$ selon qu'elle pointe vers le haut ou vers le bas.

Chaque point de la chambre est ainsi déterminé par trois coordonnées x_1, x_2, x_3 (ou x, y, z) dont les deux premières x_1 et x_2 sont les coordonnées de P′ dans le plan médian tandis que la troisième x_3 est la distance P′P orientée selon les indications ci-dessus. Si la coordonnée x_3 est égale à zéro, le point P est situé dans le plan médian. Les deux axes x et y ainsi qu'un axe vertical z par O orienté vers le haut, s'appellent les axes de coordonnées et forment avec les plans yz, zx et xy (les plans de coordonnées) un système de coordonnées.

Pour commencer nous ne considérons pas d'autres points dans la chambre que ceux dont les coordonnées s'expriment en un nombre entier de centimètres, de sorte que x_1, x_2, x_3 ne prennent que les valeurs entières de l'intervalle -250 à $+250$. Mais il faut toujours conserver la possibilité d'introduire, par fractionnement du centimètre, des nombres plus petits à mesure qu'on en aura besoin, tout en appliquant notre interprétation habituelle.

18. — Par une translation le long de l'axe Ox où l'origine O se déplace sur le point $(a, 0, 0)$, l'ensemble des points se déplace

sur d'autres points de telle sorte que les coordonnées y et z restent les mêmes tandis que les coordonnées x s'augmentent de a. Les translations le long des axes Oy et Oz sont caractérisées d'une manière analogue. Il s'ensuit qu'une translation qui déplace l'origine O sur le point (a, b, c) déplacera le point (x, y, z) sur $(x + a, y + b, z + c)$.

Pour une symétrie par rapport au plan Oxy, les coordonnées x et y restent les mêmes, tandis que les coordonnées z changent de signe. Il en est de même pour les symétries par rapport aux autres plans de coordonnées.

Une rotation de 90° autour de l'axe Oz déplace l'axe Ox sur Oy et le point (x, y, z) sur $(- y, x, z)$. Des changements analogues ont lieu pour les rotations autour des autres axes.

Considérons enfin une demi-rotation autour de l'axe Oz qui déplacera le point (x, y, z) sur $(- x, - y, z)$ ainsi que la symétrie (le mirage) par rapport à l'origine O qui transforme (x, y, z) en $(- x, - y, - z)$. On peut décomposer la dernière transformation en trois mirages consécutifs par rapport aux plans de coordonnées ou en un seul mirage par rapport au plan xy suivi d'une demi-rotation autour de l'axe Oz.

19. — Le carré de la distance de l'origine O à un point P (x, y, z) est — comme nous le savons déjà — égal à $x^2 + y^2 + z^2$, d'où l'on conclut immédiatement que le carré de la distance d'un point quelconque M (a, b, c) au point P (x, y, z) doit être

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 .$$

On a seulement à effectuer une translation qui déplace M sur O, et à appliquer ensuite le résultat précédent.

20. — Pour que les deux droites joignant O aux points M (a, b, c) et P (x, y, z) soient perpendiculaires l'une à l'autre, il faut, selon le théorème de Pythagore, que le carré de MP soit égal à la somme des carrés de OM et OP, donc

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = (x^2 + y^2 + z^2) + (a^2 + b^2 + c^2)$$

ou

$$ax + by + cz = 0 .$$

Il s'ensuit que les points (x, y, z) situés dans un plan mené par O perpendiculairement à la droite OM doivent satisfaire à l'équation $ax + by + cz = 0$. On appelle donc cette équation l'équation du plan.

Si le plan ne passe pas par l'origine, mais par un autre point (p, q, r) l'on reconnaît facilement par une translation que son équation sera

$$a(x - p) + b(y - q) + c(z - r) = 0 \; .$$

21. — Nous introduisons à présent les vecteurs dans l'espace comme antérieurement nous l'avons fait dans le plan. La lettre a doit premièrement signifier le point (a_1, a_2, a_3), mais deuxièmement elle doit signifier une translation qui déplace l'origine sur ce point; troisièmement elle signifie enfin un vecteur, c'est-à-dire un chemin rectiligne qui va de l'origine au point. On appelle aussi a_1, a_2, a_3 les coordonnées de la translation ou du vecteur.

L'équation $a + b = c$ doit signifier que la composition des translations a et b produit la translation c; ceci revient aux relations $a_1 + b_1 = c_1$, $a_2 + b_2 = c_2$ et $a_3 + b_3 = c_3$.

On appelle vecteurs inverses deux vecteurs a et ($-a$) qui se détruisent par addition, c'est-à-dire qui produisent le vecteur zéro (0, 0, 0). Parfois on se sert aussi d'un vecteur du point a au point b. Il est désigné par $\overline{ab}$ et signifie le vecteur correspondant à la translation qui déplace le point a sur le point b, donc $\overline{ab} = b - a$.

22. — On dit que le vecteur a est multiplié par le nombre (le scalaire) λ, quand ses coordonnées sont multipliées par λ et l'on écrit

$$\lambda a = (\lambda a_1 \, , \; \lambda a_2 \, , \; \lambda a_3) \; .$$

Les vecteurs a et λa sont situés sur la même droite et sont dits linéairement dépendants (entre eux); ils ont la même direction ou des directions opposées selon que λ est positif ou négatif.

Si deux vecteurs a et b sont situés sur la même droite, il existe entre eux un rapport a/b ou $a \colon b$, c'est-à-dire un scalaire λ tel que $a = \lambda b$.

23. — Pour une droite passant par le point a et dont la direction est déterminée par le vecteur b, on a la représentation paramétrique

$$x = a + \lambda b .$$

Pour un plan passant par le point a et contenant des droites dont les directions sont déterminées par les vecteurs b et c, on a la représentation paramétrique

$$x = a + \lambda b + \mu c ;$$

ceci signifie que tout couple de valeurs des deux scalaires λ et μ détermine — en deça de certaines limites — un point x dans le plan.

24. — Le produit (scalaire) de deux vecteurs a et b est défini par la relation

$$ab = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 .$$

On reconnaît tout de suite les mêmes propriétés que pour le plan:

$$ab = ba , \quad a(b + c) = ab + ac .$$

$ab = 0$ signifie $a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0$, donc (§ 20) que les deux vecteurs sont perpendiculaires l'un à l'autre (à condition bien entendu qu'aucun d'eux ne soit le vecteur zéro).

Le produit reste le même quand l'extrémité d'un des vecteurs se déplace dans un plan perpendiculaire à l'autre, car $a(b + c) = ab$, quand $ac = 0$.

La projection du vecteur a sur b est un vecteur a_b dont le rapport à b est le suivant

$$\frac{a_b}{b} = \frac{a_b b}{b^2} = \frac{ab}{b^2}, \qquad \text{donc} \qquad a_b = \frac{ab}{b^2} b .$$

25. — Correspondant au nombre-mesure de longueur que nous avons introduit dans le plan, nous choisissons dans l'espace comme nombre-mesure pour la longueur du vecteur a

$$|a| = \sqrt{a^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} .$$

A chaque vecteur a (différent de zéro) correspond ainsi un vecteur d'unité $a/\sqrt{a^2}$ (vecteur de longueur 1) dont les applications sont analogues à celles dans le plan.

La distance de deux points a et b, la longueur du vecteur $\overline{ab}$, possède le nombre-mesure

$$|\overline{ab}| = \sqrt{(a-b)^2} = \sqrt{(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2+(a_3-b_3)^2} \, .$$

26. — Un plan mené par le point p perpendiculairement au vecteur a est représenté par l'équation

$$a\,(x-p) = 0 \, .$$

Si a est un vecteur-unité, on dit que l'équation est mise sous la forme normale. La distance du plan à un point x_0 calculée conformément à l'orientation de a, sera égale à $a\,(x_0 - p)$. Ce résultat est tout à fait pareil à celui du problème correspondant dans le plan concernant la distance d'une droite à un point.

Si a n'est pas un vecteur-unité, il suffit de diviser par $\pm\sqrt{a^2}$ pour mettre l'équation sous la forme normale.

27. — *Vecteur perpendiculaire de deux vecteurs* a *et* b. — Nous cherchons un vecteur x qui soit perpendiculaire à a et b, ces derniers étant linéairement indépendants. Les coordonnées (x_1, x_2, x_3) sont déterminées par les deux équations

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0 \qquad (1)$$

$$b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 = 0 \, . \qquad (2)$$

Parmi les trois déterminants

$$\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix},$$

qu'on déduit de la matrice

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

en supprimant respectivement la première, la seconde ou la troisième colonne, il doit en exister au moins un qui soit différent de zéro, puisque nous avons supposé que a et b ne sont pas contenus dans la même droite.

Si, par exemple, le dernier des trois déterminants est différent de zéro, les équations (1) et (2) déterminent x_1 et x_2 en fonction de x_3; l'on reconnaît que le groupe (x_1, x_2, x_3) doit être proportionnel aux trois déterminants, celui du milieu étant multiplié d'abord par — 1.

On peut donc choisir le vecteur cherché x de telle façon que ses coordonnées soient égales aux trois valeurs proportionnelles multipliées par un nombre arbitraire λ. Si, en particulier, on pose $\lambda = 1$, nous appelons le vecteur ainsi défini, *vecteur viré* [1] *de* a *et* b. Il est désigné par $\widehat{ab}$, donc

$$\widehat{ab} = (a_2\, b_3 - a_3\, b_2\,, \quad a_3\, b_1 - a_1\, b_3\,, \quad a_1\, b_2 - a_2\, b_1)\ . \qquad (3)$$

On a immédiatement $\widehat{ab} = -\widehat{ba}$.

Le vecteur viré $\widehat{ab}$ s'appelle aussi le *produit vectoriel* de a et b (par opposition au produit scalaire ab).

Si a et b sont contenus dans la même droite, on définit toujours $\widehat{ab}$ par l'expression (3); il en résulte directement $\widehat{ab} = \widehat{ba} = 0$.

En multipliant un des vecteurs a ou b par le scalaire λ, on multiplie aussi le produit vectoriel par λ.

28. — Le produit vectoriel $\widehat{ab}$ est distributif par rapport aux deux vecteurs a et b, c'est-à-dire

$$\widehat{a(b+c)} = \widehat{ab} + \widehat{ac}\,, \quad \widehat{(b+c)a} = \widehat{ba} + \widehat{ca}\ .$$

Ceci résulte directement du fait que $\widehat{ab}$ est représenté par des expressions linéaires et homogènes des deux groupes de coordonnées de a et b.

Le produit vectoriel reste invariable quand l'extrémité de l'un des vecteurs se déplace parallèlement à l'autre. Car

$$\widehat{a(b+\lambda a)} = \widehat{ab} + \lambda\widehat{aa} = \widehat{ab}\ .$$

[1] Voir deuxième article, p. 303.

Comme $\widehat{ab}$ est perpendiculaire et à a et à b, on a

$$\widehat{ab} \cdot a = 0 \,, \quad \widehat{ab} \cdot b = 0 \,.$$

29. — Considérons trois vecteurs a, b, c et formons le produit

$$\widehat{abc} = \widehat{ab} \cdot c \,.$$

Ce produit à trois est un scalaire dont la valeur exprimée par les coordonnées des vecteurs, est égale à

$$\widehat{abc} = (a_2\, b_3 - a_3\, b_2)\, c_1 + (a_3\, b_1 - a_1\, b_3)\, c_2 + (a_1\, b_2 - a_2\, b_1)\, c_3 \,.$$

Il s'ensuit immédiatement de la définition que le *produit à trois est égal à zéro quand les trois vecteurs sont situés dans le même plan* (sont linéairement dépendants), car le vecteur c est alors perpendiculaire à $\widehat{ab}$. De ceci résulte encore: *Le produit à trois reste invariable si l'extrémité de l'un des vecteurs se déplace dans un plan parallèle aux deux autres.*

A l'aide de cette proposition on peut transformer de plusieurs façons un groupe de trois vecteurs (a, b, c) en un autre dont le produit à trois est le même, car l'on peut successivement faire varier les vecteurs. Pendant toutes ces transformations l'orientation de a, b par rapport à c (c'est-à-dire le sens de rotation que représente le mouvement de a à b dans le plan de ces vecteurs pour un spectateur placé du même côté du plan que le vecteur c) reste invariable; ensuite le volume contenu dans un parallélépipède aux arêtes a, b, c restera invariable aussi, d'après les règles élémentaires mentionnées plus haut (n° 6).

Pour examiner le rapport entre le produit à trois et ce volume nous choisissons d'abord le cas spécial où a, b, c sont les vecteurs-unité sur les axes de coordonnées, donc (1, 0, 0), (0, 1, 0) et (0, 0, 1). On en déduit $\widehat{ab} = c$, donc $\widehat{abc} = c^2 = 1$, c'est-à-dire le produit à trois est exactement égal au nombre-mesure pour le volume du cube formé par les trois vecteurs-unité.

Si au lieu des vecteurs-unité nous considérons trois vecteurs sur les axes de coordonnées aux longueurs α, β et γ, ces nombres étant positifs, le produit à trois sera égal à $\alpha\beta\gamma$, c'est-à-dire au volume de la brique formée par les trois vecteurs.

Si l'un des vecteurs est remplacé par le vecteur opposé, le produit à trois change de signe.

Comme on peut toujours transformer un groupe à trois vecteurs (a, b, c) en un autre dont les vecteurs sont contenus dans les axes de coordonnées tout en se bornant aux changements décrits plus haut, il en résulte que le produit à trois $\widehat{abc}$ représente toujours le volume du parallélépipède aux arêtes a, b, c, muni de signe plus ou minus selon que l'orientation (abc) est conforme ou non à l'orientation du système des coordonnées xyz, c'est-à-dire l'orientation des trois vecteurs $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ et $(0, 0, 1)$.

On voit que le produit à trois change de signe quand on permute deux vecteurs voisins, car ceci est évident quand les vecteurs sont situés sur les axes de coordonnées. Il en résulte ensuite que le produit à trois change de signe quand deux vecteurs quelconques sont permutés, d'où le résultat final:

Les trois permutations *abc*, *bca* et *cab* ont le même produit à trois; les trois permutations *cba*, *bac* et *acb* ont le produit opposé.

La valeur $\widehat{abc}$ représente le nombre-mesure pour le volume du vecteur à trois a, b, c, muni de signe conformément à l'orientation (abc).

Pour le volume du tétraèdre orienté aux arêtes a, b, c nous serons ainsi obligés de fixer le nombre-mesure $^1/_6\ \widehat{abc}$ (d'après les raisonnements établis aux n^os^ 14 et 15).

30. — L'expression $\widehat{abc}$ dépend de trois groupes de nombres (a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3) et (c_1, c_2, c_3). On la désigne directement en les inscrivant dans un schéma (une matrice) de la façon suivante

$$\widehat{abc} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} .$$

Ce schéma s'appelle déterminant de troisième ordre. Son calcul et les règles pour sa transformation et pour le calcul avec les compléments découlent très simplement de ce qui précède, et c'est pourquoi nous n'entrerons pas dans plus de détails.

Nous mentionnons seulement la résolution des trois équations scalaires:

$$
\begin{aligned}
a_1 x_1 + b_1 x_2 + c_1 x_3 &= d_1 \\
a_2 x_1 + b_2 x_2 + c_2 x_3 &= d_2 \qquad (1) \\
a_3 x_1 + b_3 x_2 + c_3 x_3 &= d_3
\end{aligned}
$$

aux inconnues x_1, x_2 et x_3. En introduisant les vecteurs

$$a = (a_1 , a_2 , a_3) \ , \quad b = (b_1 , b_2 , b_3) \ , \quad c = (c_1 , c_2 , c_3) \ , \quad d = (d_1 , d_2 , d_3) \ ,$$

on peut réunir les trois équations scalaires en une équation vectorielle

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 = d \ .$$

A condition que $\widehat{abc}$ soit différent de zéro, on résout facilement cette équation en multipliant successivement par $\widehat{bc}$, $\widehat{ca}$ et $\widehat{ab}$, ce qui donne

$$x_1 = \frac{\widehat{dbc}}{\widehat{abc}} \ , \qquad x_2 = \frac{\widehat{adc}}{\widehat{abc}} \ , \qquad x_3 = \frac{\widehat{abd}}{\widehat{abc}} \ .$$

31. — *Longueur du vecteur viré* $\widehat{\mathrm{ab}}$. — Le carré du vecteur perpendiculaire $\widehat{ab}$ est égal à

$$(\widehat{ab})^2 = (a_2 b_3 - a_3 b_2)^2 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)^2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 \ ,$$

d'où l'on déduit

$$(\widehat{ab})^2 = (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)\,(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)^2 \ ,$$

ou

$$(\widehat{ab})^2 = a^2 b^2 - (ab)^2 \ .$$

Le nombre-mesure du vecteur viré $\widehat{ab}$ s'exprime donc par

$$|\,\widehat{ab}\,| = \sqrt{a^2 b^2 - (ab)^2} \ .$$

Au cas où les deux vecteurs a et b sont perpendiculaires l'un à l'autre, on a $ab = 0$ et, par conséquent,

$$|\widehat{ab}| = \sqrt{a^2}\,\sqrt{b^2}\,.$$

Le nombre-mesure pour la longueur du vecteur viré est donc égal au produit des nombres-mesure pour les longueurs des deux vecteurs, c'est-à-dire égal au nombre-mesure pour l'aire du rectangle formé par a et b.

Dans le cas général on peut — en déplaçant l'extrémité de l'un des vecteurs parallèlement à l'autre — transformer le parallélogramme des vecteurs en un rectangle qui — selon les règles élémentaires pour les aires planes — possède la même aire que le parallélogramme. Cette transformation laisse invariable le vecteur viré $\widehat{ab}$, d'où il s'ensuit dans tous les cas que le nombre-mesure pour la longueur du vecteur viré est égal au nombre-mesure pour l'aire du parallélogramme formé par les deux vecteurs. Dans ce qui précède nous avons déjà rendu compte de l'orientation du vecteur viré $\widehat{ab}$ par rapport à l'orientation des deux vecteurs a et b dans leur plan.

Ce résultat s'accorde avec la règle élémentaire selon laquelle le volume d'un parallélépipède est égal au produit de la hauteur par l'aire de la base. Car si $\overset{\frown}{abc} = \widehat{ab} \cdot c$ doit représenter le nombre-mesure pour le volume du parallélépipède, il faut que le nombre-mesure pour la longueur de $\widehat{ab}$ soit égal au nombre-mesure pour l'aire du parallélogramme a, b.

Donc, si nous introduisons dans la géométrie analytique de l'espace les deux conditions que voici:

1° Le nombre-mesure pour le volume d'un parallélépipède orienté, formé par trois vecteurs a, b, c est représenté par $\overset{\frown}{abc}$; et de même, le nombre-mesure pour un tétraèdre orienté abc — O dont les arêtes sont les vecteurs a, b, c est représenté par $^1/_6\,\overset{\frown}{abc}$;

2° Le nombre-mesure pour l'aire d'un parallélogramme formé de deux vecteurs a et b est représenté par

$$\sqrt{a^2 b^2 - (ab)^2}\,,$$

toutes les règles pour les déterminations de mesure seront satisfaites.

32. — La dernière condition mentionnée est une condition numérique car elle ne tient pas compte de l'orientation (l'ordre) des deux vecteurs a et b. Nous voulons cependant fixer aussi une condition concernant le signe du parallélogramme formé par a et b. Elle correspond au choix d'un vecteur normal positif n pour le plan dans lequel sont situés le parallélogramme et les autres figures dont nous voulons déterminer l'aire. Nous posons, en effet, l'aire du parallélogramme formé par a et b égale à $\widehat{ab}/n$. Pour l'aire d'un triangle Oab, dont les deux côtés sont a et b, nous fixons le nombre-mesure à $\frac{1}{2}\,\widehat{ab}/n$, et pour l'aire d'un polygone $abc \ldots ik$ dans le plan le nombre-mesure sera

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\widehat{ab}}{n} + \frac{\widehat{bc}}{n} + \cdots + \frac{\widehat{ik}}{n} + \frac{\widehat{ka}}{n}\right) .$$

On vérifie que cette détermination renferme comme cas particulier la stipulation antérieurement introduite dans le plan Oxy.

33. — *Déplacements dans l'espace.* — Un déplacement qui laisse fixe le point O est déterminé par la position du trièdre normal sur lequel est placé le trièdre de coordonnées. Cette position est déterminée par les trois vecteurs-unité e, f et g qui correspondent aux vecteurs (1, 0, 0) (0, 1, 0) et (0, 0, 1).

On a pour ces vecteurs

$$e^2 = f^2 = g^2 = 1 \; ; \quad fg = ge = ef = 0 \; ; \quad \widehat{fg} = e \; , \; \widehat{ge} = f \; , \; \widehat{ef} = g \; .$$

Pour déterminer le point x' (x'_1, x'_2, x'_3) qui correspond au point x (x_1, x_2, x_3) nous avons

$$x' = x_1\, e + x_2\, f + x_3\, g \; .$$

Les points y' et z' qui correspondent aux deux points y et z sont déterminés par

$$y' = y_1\, e + y_2\, f + y_3\, g$$
$$z' = z_1\, e + z_2\, f + z_3\, g \; .$$

On vérifie maintenant par de simples calculs que

$$x'^2 = x^2 \,, \quad (x' - y')^2 = (x - y)^2 \,, \quad x' y' = xy \,,$$

puis

$$\widehat{x' y'} = (x_2 y_3 - x_3 y_2)\, e + (x_3 y_1 - x_1 y_3)\, f + (x_1 y_2 - x_2 y_1)\, g = \widehat{(xy)}' \,,$$

et

$$\widehat{x' y' z'} = \widehat{x' y'} . z' = (x_2 y_3 - x_3 y_2)\, z_1 + (x_3 y_1 - x_1 y_3)\, z_2 + (x_1 y_2 - x_2 y_1)\, z_3$$

ou

$$\widehat{x' y' z'} = \widehat{xyz} \,.$$

34. — Il ressort de ces équations que tous les nombres-mesure pour les longueurs, les aires et les volumes restent invariables pourvu que le déplacement laisse fixe le point O. Il importe donc maintenant de vérifier qu'ils restent invariables pendant une translation, car leur invariabilité serait alors assurée quel que soit le déplacement. Ceci se vérifie immédiatement pour le nombre-mesure pour la longueur; pour le nombre-mesure de l'aire le fait se déduit de la formule du nº 32. Par contre le problème concernant le nombre-mesure pour le volume nécessite un examen un peu plus détaillé, joint à une extension finale des nombres-mesure déjà introduits pour le volume.

35. — Au nº 29 nous avons fixé le nombre-mesure pour le volume du tétraèdre orienté *abc* — 0 à

$$\frac{1}{6} \widehat{ab} \,.\, c = \frac{1}{6} \widehat{abc} \,.$$

Nous généralisons maintenant cette condition en fixant le nombre-mesure pour le volume du tétraèdre *abcp* à

$$\frac{1}{6} \widehat{b - a \,,\, c - a} \,.\, (p - a) = \frac{1}{6} (\widehat{bc} + \widehat{ca} + \widehat{ab})\, (p - a) \,.$$

qui — comme on le voit immédiatement — satisfait à la condition concernant l'invariabilité du nombre-mesure pendant une translation.

D'après ceci la différence entre les deux tétraèdres *abcp* et *abcq* sera la suivante

$$abcp - abcq = \frac{1}{6}(\widehat{bc} + \widehat{ca} + \widehat{ab})(p - q) \ ,$$

d'où l'on reconnaît que pour un polyèdre quelconque limité entièrement par des triangles *abc*, *cbd*, ... — ceux-ci étant parcourus selon une orientation fixe sur la surface du polyèdre telle que les parcours de deux triangles voisins soient opposés sur le côté commun (comme plus haut *abc* et *cbd*) — la somme de tous les tétraèdres au sommet commun p et avec bases dans les faces du polyèdre sera indépendante de la position de p. Si, en effet, on déplace p sur un autre point q, la différence entre les deux sommes correspondantes sera la suivante

$$\frac{1}{6}(\widehat{bc} + \widehat{ca} + \widehat{ab} + \widehat{cb} + \widehat{bd} + \widehat{dc} + \ldots)(p - q) \ ,$$

où les termes dans la parenthèse s'annullent deux à deux de sorte que la somme est égale à zéro.

Il sera donc naturel de définir le nombre-mesure pour le volume du polyèdre conformément au parcours choisi sur la surface, c'est-à-dire comme la somme des tétraèdres énumérés *abcp*, *cbdp*, ...; ici on peut, bien entendu, choisir p à l'origine aussi bien qu'en n'importe quel autre point.

Il en résulte que les nombres-mesure ainsi définis sont invariables pendant tout déplacement.

36. — Si les faces du polyèdre ne sont pas des triangles mais des polygones, on peut diviser chacun de ces polygones *abcde* en un système de triangles *abs*, *bcs*, *cds*, *des*, *eas*, s étant un point quelconque dans le plan du polygone. On reconnaît que la position de s dans le plan n'influencera aucunement le nombre-mesure pour le volume.

Finalement on vérifie sans difficulté que le nombre-mesure pour le volume d'un polyèdre composé de deux autres est égal à la somme des nombres-mesure pour les volumes de ces deux polyèdres.

37. — *Formules contenant 3 ou 4 vecteurs.* — Nous cherchons d'abord une formule pour $\widehat{a\widehat{bc}}$. Si b et c sont sur la même droite, l'expression est égale à zéro; si a et $\widehat{bc}$ sont sur la même droite, l'expression est aussi égale à zéro. Dans les autres cas on obtient un vecteur situé dans le plan de b et c de sorte qu'on peut poser

$$\widehat{a\,\widehat{bc}} = \lambda b + \mu c \ .$$

En multipliant par a on aura

$$0 = \lambda ab + \mu ac \ ,$$

d'où l'on reconnaît que λ et μ sont proportionnels à ac et $-ab$. On peut donc poser $\lambda = \alpha ac$ et $\mu = -\alpha ab$, c'est-à-dire

$$\widehat{a\,\widehat{bc}} = \alpha\,((ac)\,b - (ab)\,c) \ .$$

Reste à trouver le scalaire α; on trouve par un calcul direct $\alpha = 1$.

Nous avons donc trouvé cette formule

$$\widehat{a\,\widehat{bc}} = (ac)\,b - (ab)\,c \ ,$$

ou

$$\widehat{a\,\widehat{bc}} = \begin{vmatrix} b & c \\ ab & ac \end{vmatrix} , \qquad \text{(I)}$$

qui — comme on le reconnaît sans difficulté — est valable aussi pour les cas spéciaux mentionnés plus haut.

On en déduit

$$\widehat{ab}\cdot\widehat{cd} = \overset{\frown}{\widehat{ab}\,cd} = \overset{\frown}{cd\,\widehat{ab}} = c\cdot\widehat{d\,\widehat{ab}} \ ,$$

d'où à l'aide de (I)

$$\widehat{ab}\cdot\widehat{cd} = \begin{vmatrix} ac & bc \\ ad & bd \end{vmatrix} . \qquad \text{(II)}$$

Nous trouvons finalement à l'aide de (I)

$$\widehat{\widehat{ab}\,\widehat{cd}} = \begin{vmatrix} c & d \\ \widehat{ab}\cdot c & \widehat{ab}\cdot d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c & d \\ \overset{\frown}{abc} & \overset{\frown}{abd} \end{vmatrix} . \qquad \text{(III)}$$

38. — Deux droites orientées suivant les vecteurs-unité a et b déterminent — comme dans le plan — un angle (a, b) dont le cosinus est défini par la relation

$$\cos(a, b) = ab .$$

Le sinus de l'angle dépend du vecteur normal n pour le plan dans lequel est situé l'angle; il est défini par la relation

$$\sin(a, b) = \frac{\widehat{ab}}{n} .$$

La dernière définition renferme comme cas particulier celle qui a été donnée pour le plan xy; car pour $n = (0, 0, 1)$, $a = (a_1, a_2, 0)$ et $b = (b_1, b_2, 0)$, la formule devient

$$\sin(a, b) = \frac{\widehat{ab}}{n} = a_1 b_2 - a_2 b_1 .$$

Soient deux plans orientés, leur intersection étant dirigée suivant le vecteur-unité e. L'angle que forment ces deux plans est défini par l'angle que forme le vecteur normal au premier plan avec le vecteur normal au second plan, le plan de cet angle étant orienté conformément au vecteur e. Le cosinus et le sinus de l'angle en question sont donc complètement déterminés.

39. — Un trièdre dont les arêtes sont des vecteurs-unité A, B, C détermine un triangle sphérique ABC dont les côtés sont $(B, C) = a$, $(C, A) = b$ et $(A, B) = c$. Ils correspondent à des orientations données dans les plans, donc à des vecteurs normaux. Les angles A, B, C du triangle sphérique sont les angles entre les plans de façon que

$180° - A$	est l'angle	de	CA	à	AB
$180° - B$	»	»	AB	»	BC
$180° - C$	»	»	BC	»	CA ,

ces angles étant orientés conformément aux vecteurs A, B, C comme il a été mentionné ci-dessus. On a maintenant (nº 37, II)

$$\widehat{BC} \cdot \widehat{CA} = \begin{vmatrix} BC & BA \\ C^2 & CA \end{vmatrix} ,$$

donc

$$- \sin a \sin b \cos C = \begin{vmatrix} \cos a & \cos c \\ 1 & \cos b \end{vmatrix}$$

ou

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C\,,$$

c'est-à-dire la formule générale des cosinus.

En appliquant la formule III, n° 37, nous avons

$$\widehat{\widehat{BC}\,\widehat{CA}} = \begin{vmatrix} C & A \\ 0 & \widehat{BCA} \end{vmatrix} = C \cdot \widehat{BCA}\,,$$

ou

$$C\,(\sin a \sin b \sin C) = C\,.\,\widehat{ABC}$$

$$\sin a \sin b \sin C = \widehat{ABC}\,,$$

ce qui constitue la formule des sinus dans l'espace. En exécutant un mouvement circulaire en A, B, C on obtient

$$\sin b \sin c \sin A = \sin c \sin a \sin B = \sin a \sin b \sin C$$

ou par division par $\sin a \sin b \sin c$

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c}\,,$$

ce qui représente la formule des sinus pour le triangle sphérique.

Ces deux formules constituent la base de la trigonométrie sphérique.

III. L'espace arithmétique.

40. — Dans ce qui précède nous avons introduit toute l'analyse calculatoire pour étudier la géométrie de la chambre; maintenant nous allons élargir cette analyse de façon à y renfermer tous les nombres réels, qu'ils soient grands ou petits, rationnels ou irrationnels. Nous définissons en effet comme suit:

Un point arithmétique est un ensemble de nombres (a_1, a_2, a_3) où a_1, a_2 et a_3 sont des nombres réels arbitraires (les coordonnées du point). Le point O (0, 0, 0) s'appelle l'origine. Un ensemble de deux points arithmétiques a et b pris dans cet ordre, s'appelle un vecteur $\overline{ab}$; le vecteur $\overline{Oa}$ est cependant désigné par la lettre a seule. Chaque vecteur a détermine une translation, c'est-à-dire