Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 39 (1942-1950)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LA GÉOMÉTRIE SENSIBLE

Autor: Hjelmslev, Johannes

Kapitel: I. Les deux tableaux.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-515806

pour copier une métaphore d'Olivier de Serres. En revanche, la richesse des résultats abstraits des mathématiques alimente de plus en plus efficacement l'étude des réalités physiques et humaines, dans les domaines les plus variés des sciences vouées à cette étude, et ce, en vue d'orienter l'activité humaine capable s'agir sur ces réalités pour en faire les instruments de buts humains.

LA GÉOMÉTRIE SENSIBLE

(3me article)[1]

PAR

† Johannes HJELMSLEV (Copenhague).

LA GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE

I. Les deux tableaux.

1. — L'enseignement préliminaire de la géométrie dans l'espace s'effectue au moyen d'exercices pratiques. On emploie deux tableaux, le tableau vertical et le tableau horizontal. Ils se rencontrent le long d'une droite x. Nous nous servons de ces tableaux pour l'orientation dans l'espace (le dièdre normal) qu'ils limitent pour déterminer la position de points, de lignes et de plans dans cet espace, et pour effectuer des constructions. D'autre part on se sert, en plus des instruments habituels pour dessiner, d'une brique normale, d'un triangle rectangle (triangle normal), d'une planchette rectangulaire (planchette normale) sur laquelle on peut dessiner et avec laquelle on peut dresser des plans (et par là des figures planes) dans des positions différentes.

[1] Pour les deux premiers articles, voir *L'Ens. math.*, t. 38, pp. 7-26 et pp. 294-322.

On emploie de plus d'autres objets qui tous peuvent être fabriqués comme modèles en carton par les élèves eux-mêmes. L'important est qu'il soit toujours question de choses réelles que l'on a sous les yeux et avec lesquelles on peut travailler.

2. — On place la brique normale de sorte qu'elle ait une face dans chacun des tableaux. La face supérieure et le tableau horizontal nous présentent deux plans parallèles; ils ont les mêmes normales (lignes verticales) et découpent sur celles-ci un segment de même grandeur qui est la distance entre les deux plans, ou la hauteur de la brique. Deux segments quelconques sont des côtés opposés d'un rectangle qui se trouve dans un plan perpendiculaire au plan horizontal (plan vertical). La face la plus avancée de la brique (plan frontal) et le tableau vertical sont de même parallèles; la distance entre eux est la largeur de la brique. Nous appelons dans la suite leurs normales communes des lignes transversales; deux quelconques de celles-ci se trouvent dans un plan perpendiculaire au tableau vertical (plan transversal). Les deux faces de côté de la brique sont aussi parallèles; leur distance est égale à la longueur de la brique. La droite x est une normale commune tandis que les autres normales communes y sont parallèles.

3. — Soient A et B les deux sommets de la brique qui ne se trouvent dans aucun des tableaux. L'arête AA' relie A à sa projection A' sur le tableau horizontal, tandis que l'arête transversale AA'' relie A à sa projection A'' sur le tableau vertical. Le plan de côté $AA'A''$ coupe la droite x en A_0 (projection de A sur x). Le point B possède également les projections B' et B'' sur les deux tableaux et la projection B_0 sur x.

Le quadrilatère ABB_0A_0 est un rectangle situé dans un plan qui passe par x (perpendiculaire aux surfaces $AA'A_0A''$ et $BB'B_0B''$); il s'appelle plan diagonal de la brique. Ce plan divise la brique en deux prismes triangulaires, droits et congruents. Construire le modèle en carton d'un de ces prismes.

Les lignes qui joignent les sommets opposés s'appellent les diagonales de la brique; elles sont égales et possèdent le même milieu, le centre de la brique.

On déduit du théorème de Pythagore que le carré de la diagonale est égal à la somme des carrés des trois arêtes de la brique.

La brique se divise en six pyramides à sommet commun au centre de la brique et dont les bases sont formées par les six faces de la brique. Construire le modèle en carton d'une de ces pyramides.

Poser la planchette normale obliquement le long de x. Montrer que dans cette position elle réalise le plan diagonal d'une brique normale dont deux faces sont situées dans les tableaux.

Exercices divers avec la planchette normale, le triangle normal et la brique pour représenter les plans horizontaux, frontaux, verticaux et transversaux; des lignes droites ainsi que des figures dans ces plans; représentation des plans par leurs traces dans les tableaux.

4. — Si l'on fait glisser la brique le long des deux tableaux, elle exécute une translation. On mesure la grandeur de celle-ci par le segment qu'a glissé la brique le long de la droite x. Si ce segment est égal à A_0B_0 le rectangle $AA'A_0A''$ sera arrivé à $BB'B_0B''$. La brique sera ainsi située en prolongement de sa position initiale (que l'on peut marquer en dessinant ses deux faces dans les tableaux ou en introduisant une brique identique) et formera avec celle-ci une brique dont la longueur sera le double. En continuant la translation le long de x la brique décrit un tuyau dans lequel elle glisse pour ainsi dire; la position de la brique est déterminée par celle du rectangle $AA'A_0A''$. Ce tuyau est limité par quatre bandes dont deux sont situées dans les tableaux tandis que les deux autres y sont parallèles.

Ces considérations qui s'appuient directement sur les propriétés fondamentales des dièdres, trièdres et briques normaux, exposés dans l'introduction du premier article, établissent les propriétés fondamentales de la translation.

En subissant la translation A_0B_0 le long de la droite x tous les points décrivent des segments égaux et pareillement orientés sur x ou parallèlement à celui-ci. Un segment non parallèle à x décrit un parallélogramme (c'est-à-dire un quadrilatère dont chaque côté peut être déplacé sur le côté opposé par une translation). Une droite qui ne glisse pas sur elle-même se déplace donc sur une droite parallèle. Les plans passant par x ou par des droites parallèles glissent sur eux-mêmes, tandis que les autres plans se déplacent sur des plans parallèles puisque leurs normales conservent leur direction.

5. — On considère ensuite un prisme droit ou oblique (et tuyau prismatique) créé par la translation d'un polygone plan; le parallélépipède ordinaire spécialement. Puis on fera suivre des exercices divers concernant la construction des modèles en carton ainsi que des problèmes qui s'y rattachent, tels que construction d'un prisme régulier hexagonal par le côté de la base et la hauteur ou, en rapport avec ceci, détermination de la section entre le prisme et un plan qui passe par deux arêtes parallèles opposées des bases, ou détermination sur la surface du prisme du chemin le plus court entre un sommet d'une base et le sommet opposé de l'autre.

6. — D'un tuyau nous découpons un prisme par deux sections parallèles A et A_1; on appelle longueur du prisme la longueur des arêtes parallèles situées sur le tuyau. Du même tuyau nous découpons par deux autres sections parallèles B et B_1 un nouveau prisme de même longueur. Ces deux prismes auront le même volume. Pour s'en rendre compte, nous supposons — ce qui peut s'obtenir par un glissement dans le tuyau — que les deux prismes n'aient aucune partie commune. Considérons maintenant les quatre sections A, A_1, B, B_1. On peut par une translation déplacer le polyèdre AB situé dans le tuyau entre A et B sur celui situé entre A_1 et B_1; ces deux polyèdres sont égaux (ont le même volume). Si l'on soustrait le premier du polyèdre AB_1, il reste le prisme BB_1; si au contraire l'on soustrait l'autre du même polyèdre AB_1, il reste le prisme AA_1; les deux prismes ont donc le même volume.

Il s'ensuit:

1° Un prisme oblique a le même volume qu'un prisme droit de même longueur et dont la base est la section normale du prisme oblique;

2° Le volume d'un parallélépipède reste le même quand une face latérale subit une translation dans une des deux bandes que déterminent ses arêtes opposées, pendant que la face opposée reste à sa place. En effectuant encore une translation le long de l'autre paire d'arêtes opposées, on reconnaît que le volume d'un parallélépipède reste le même quand une paire de faces latérales opposées subit une translation quelconque dans leurs plans respectifs. On en déduit facilement les théorèmes habituels sur le volume du prisme.

7. — Nous mentionnons dans ce qui suit un certain nombre d'exercices, mais on peut, bien entendu, y suppléer et les varier de bien des façons.

Tracer une droite oblique dans le tableau vertical et indiquer l'angle qu'elle forme avec le tableau horizontal.

Construire les traces d'un plan perpendiculaire à cette droite et indiquer de même l'angle de celui-ci avec le tableau horizontal.

Un point A est donné par sa projection A' sur le tableau horizontal (la projection horizontale du point) et sa hauteur au-dessus de celui-ci. Déterminer sa projection A'' sur le tableau vertical (projection verticale du point) et sa distance à celui-ci.

Figures symétriques par rapport à un plan perpendiculaire à la droite x.

Une droite est donnée par sa trace P dans le tableau horizontal et sa trace Q dans le tableau vertical. Construire sa projection sur chacun des tableaux et déterminer ses angles avec ceux-ci. Rabattre la droite sur le tableau horizontal en la tournant autour de sa projection horizontale PQ' (ou pareillement sur le tableau vertical). Rabattre aussi la droite sur le tableau vertical autour d'une ligne verticale passant par Q (ou sur le tableau horizontal autour de la ligne transversale passant par P).

Un point A sur la droite PQ est donné par sa projection horizontale A'. Déterminer la hauteur du point et sa projection verticale A''.

Un plan oblique est donné par ses traces dans les tableaux. Mener un plan vertical perpendiculairement à la trace horizontale, et déterminer par là l'angle du plan avec le plan horizontal. Déterminer de façon analogue son angle avec le plan vertical.

Mener un plan perpendiculaire à une droite PQ. Trouver la distance d'un point à un plan transversal; puis à un plan oblique quelconque.

Trouver la distance d'un point à une droite oblique située dans un des tableaux; puis à une droite quelconque.

Soit ABC un triangle dont A se trouve dans le tableau vertical, B et C dans le tableau horizontal. Rabattre le triangle sur le tableau horizontal en le tournant autour de BC.

Trouver la plus courte distance d'une droite verticale, située dans le tableau vertical, à une droite oblique PQ.

On construit facilement un trièdre dont deux faces sont situées dans les tableaux, en posant le triangle normal de façon à avoir l'hypoténuse dans le tableau vertical et un autre côté dans le tableau horizontal. La projection du triangle sur le tableau horizontal est un triangle rectangle. En posant l'hypoténuse égale à 1 l'on déduit immédiatement les formules trigonométriques principales du trièdre. On vérifie ensuite que ces formules restent valables au cas où les angles en question ne sont plus aigus.

Tracer deux plans obliques ainsi que leur ligne d'intersection; trouver leur angle par rabattement sur le tableau horizontal.

8. — Voici quelques exercices qui se rapportent à un seul tableau (plan du dessin) en appliquant la projection et le rabattement.

Construire une pyramide hexagonale régulière quand l'arête de la base et la hauteur sont respectivement égales à a et h. Déterminer l'angle plan à la base et aux faces latérales, par construction et par calcul.

Déterminer toutes les pyramides dont les arêtes (les arêtes de la base ainsi que les arêtes latérales) sont toutes égales; déterminer les angles plans. Application à la construction des polyèdres réguliers.

Exercices simples concernant l'application des deux projections (les représentations de Monge).

9. — Les cylindres et cônes de révolution sont considérés comme des prismes et des pyramides dont les faces latérales se

confondent avec les plans tangents. On en déduit les théorèmes habituels: L'aire latérale du cône de révolution est égale au demi-produit de la longueur d'une génératrice par la longueur de la circonférence de base; l'aire latérale d'un tronc de cône de révolution est égale au produit de la longueur de la génératrice par la longueur de la circonférence médiane, ou le produit de la hauteur par la longueur d'une circonférence dont le rayon est égal à la normale médiane. La surface de la sphère se décompose en zones coniques étroites dont les hauteurs ont une somme égale au diamètre de la sphère, tandis que leurs normales médianes sont toutes égales au rayon de la sphère. En faisant la somme de ces zones on obtient le produit du diamètre de la sphère par la circonférence du grand cercle, ce qui équivaut à quatre grands cercles.

On n'applique jamais, bien entendu, les déterminations infinitésimales à la géométrie empirique.

10. — Comme introduction à la géométrie sphérique, on peut partir d'un trièdre OABC et construire son développement sur le plan du tableau. En coupant la figure par une circonférence de centre O, on obtient trois secteurs circulaires A_1OB, BOC, COA_2, dont le premier et le dernier doivent se plier respectivement autour de OB et OC de telle façon que OA_1 et OA_2 se rencontrent le long de l'arête OA. Le point A est déterminé par sa projection A′ sur le plan du tableau et sa distance de celui-ci. La construction fait ressortir le théorème sur les côtés d'un simple triangle sphérique: la somme des côtés est inférieure à 360° et chacun d'eux est plus petit que la somme des deux autres.

Au cas où les deux faces passant par OA sont plus petites que 90° on a, dans le développement du trièdre, une construction particulièrement simple pour déterminer l'angle plan le long de OA. Menons, en effet, par A_1 et A_2 les perpendiculaires aux droites OA_1 et OA_2 et déterminons les points d'intersection Q et R entre ces perpendiculaires et les droites OB et OC. Dans le triangle PQR aux côtés A_1Q, QR, A_2R, l'angle de sommet P sera égal à l'angle plan en question. En posant OA_1 et OA_2 égaux à l'unité, on déduit directement du triangle PQR la relation des cosinus pour le trièdre (le triangle sphérique). La validité de la formule dans les autres cas se vérifie ensuite par de simples considérations. La validité de la formule des sinus ressort déjà de ce qui précède, et la base de la trigonométrie sphérique est donc établie.

11. — Introduisons maintenant un tableau passant par un point O de la droite x et perpendiculaire à celle-ci. Il coupe les deux premiers tableaux suivant une droite horizontale y et en une droite verticale z. Ces trois tableaux déterminent un trièdre normal aux arêtes x, y et z, et nous employons ce trièdre comme système de coordonnées de telle façon qu'un point A dont les projections sur le tableau horizontal et sur l'axe Ox se trouvent respectivement en A′ et A_0 est caractérisé par les coordonnées

$$a = OA_0 \,, \quad b = A_0 A' \,, \quad c = A' A \,.$$

Le point se désigne alors par (a, b, c). Les coordonnées sont égales aux arêtes d'une brique normale dont les trois faces sont situées dans les tableaux tandis qu'un sommet se trouve à A.

En projetant la droite OA sur les tableaux on reconnaît que les points du segment OA seront représentés par les coordonnées λa, λb, λc, où λ est une fraction proprement dite. On dit que le point (λa, λb, λc) est dérivé du point (a, b, c) par une multiplication par λ par rapport à O.

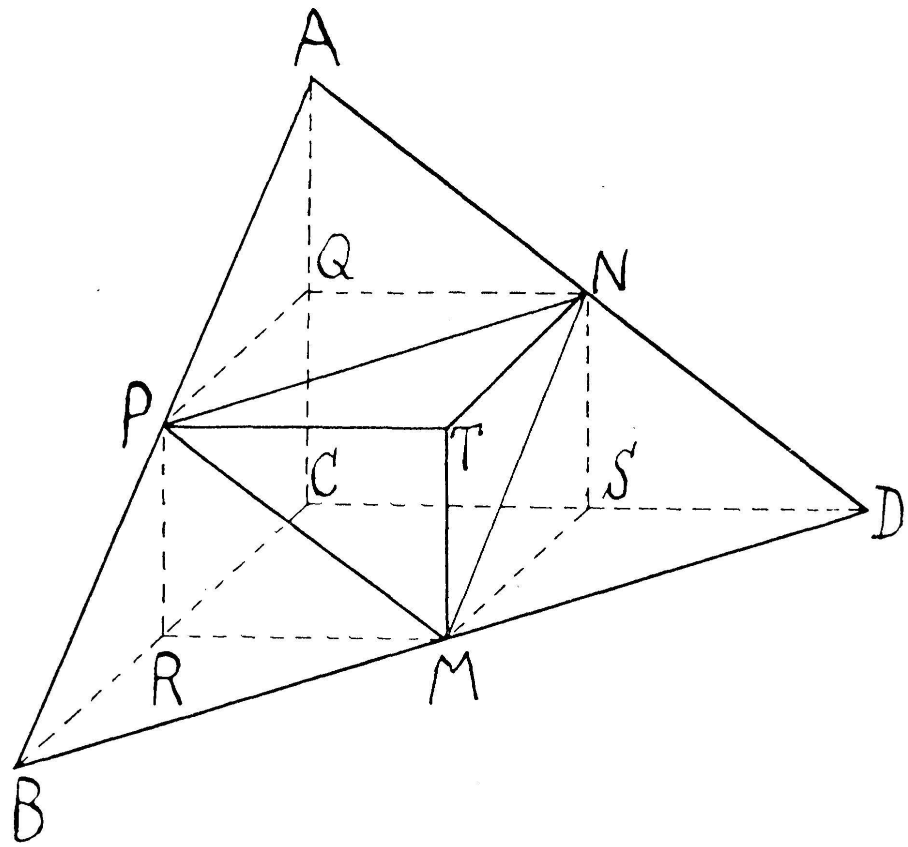
12. — De cette manière on peut multiplier un point ou une figure quelconque par λ. Une figure située dans un plan par O est transformée par là en une figure semblable dans le même plan, et un segment se transforme en un autre segment parallèle dont la longueur est λ fois aussi grande. Une figure située dans un plan α qui ne passe pas par O, se transforme en une figure semblable située dans un plan parallèle à α, car tout segment entre O et un point de α est multiplié par λ.

Deux figures dans l'espace qui se déduisent l'une de l'autre de cette manière s'appellent semblables dans le rapport λ (homothétiques).

13. — Si un corps est composé de parties qui peuvent se joindre à un cube à l'arête a cm (où a est un nombre entier ou

fractionnaire) on attribue au volume de ce corps le même nombre-mesure qu'au volume du cube, donc a^3 cm³.

Une multiplication par λ transforme le corps en un autre corps composé de parties correspondantes qui, elles aussi, peuvent se joindre à un cube. L'arête de celui-ci est égale à



λa cm et son volume est donc égal à $\lambda^3 a^3$ cm³, c'est-à-dire le volume du nouveau corps est λ^3 fois celui du corps initial.

Il s'ensuit que pour deux corps semblables le rapport des volumes est égal au cube du rapport linéaire.

On reconnaît de façon analogue que les nombres-mesure de deux corps symétriques doivent être égaux. On sait d'ailleurs qu'il est possible de diviser deux tétraèdres symétriques en douze paires de parties superposables.

14. — Pour trouver le nombre-mesure V à employer pour le volume d'une pyramide triangulaire A — BCD (fig. 1), où l'arête AC $= h$ est la hauteur de la pyramide et où l'aire de la base BCD est égale à G, nous menons par les milieux P, Q, N des

arêtes partant de A une section plane PQN parallèle à la base BCD. Nous avons ainsi découpé une pyramide A — PQN semblable à la pyramide initiale dans le rapport $\frac{1}{2}$ et le nombre-mesure de son volume est donc $\frac{1}{8}$ V. D'une manière analogue, on découpe aux sommets B et D deux pyramides B — PRM et D — NSM dont chacune a le volume $\frac{1}{8}$ V. Les trois plans de coupure PQN, PRM et NSM limitent — avec les trois faces y parallèles de la pyramide donnée — un prisme quadrangulaire droit dont la base est RMSC = $\frac{1}{2}$ G et la hauteur CQ = $\frac{1}{2}\,h$. Le nombre-mesure pour le volume du prisme est donc $\frac{1}{4}\,h$G. Ce prisme se compose de deux parties, l'une à l'intérieur, l'autre à l'extérieur de la pyramide; le volume de la première a le nombre-mesure $^5/_8$ V. La seconde partie, le tétraèdre M — TNP est — comme on le voit — superposable au tétraèdre C — QPN qui, lui, est symétrique au tétraèdre A — QPN, et son volume est par conséquent $\frac{1}{8}$ V. Le nombre-mesure du prisme s'exprime donc par $^5/_8$ V + $\frac{1}{8}$ V = $\frac{3}{4}$ V et par $\frac{1}{4}\,h$G, donc $\frac{3}{4}$ V = $\frac{1}{4}\,h$G ou V = $\frac{1}{3}\,h$G.

15. — Ce résultat est cependant valable aussi pour une pyramide quelconque A — BCDE... Si le pied de la hauteur AO est situé à l'intérieur de la base (ou sur le périmètre de celle-ci) on peut, pourvu que la base soit convexe, diviser la pyramide en tétraèdres qui tous contiennent AO comme arête commune; dans les autres cas, on peut toujours déduire la pyramide initiale par addition, ou soustraction, d'un ensemble de tétraèdres ayant l'arête commune AO. Dans tous les cas, on arrive à la nécessité de mesurer le volume de la pyramide par $\frac{1}{3}$ du produit de la hauteur par la base.

16. — On réalise ensuite sans difficulté la détermination de tous les volumes simples, entre autres le volume de la sphère. Celle-ci se décompose en effet en petites pyramides dont le sommet est au centre de la sphère et dont les bases se confondent avec les plans tangents de celle-ci. Le volume devient donc égal à $\frac{1}{3}$ du produit du rayon par la surface de la sphère. Comme il a été mentionné plus haut, les considérations infinitésimales ne relèvent pas de cette géométrie.