

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 39 (1942-1950)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** LA GÉOMÉTRIE SENSIBLE  
**Autor:** Hjelmslev, Johannes  
**Kapitel:** LA GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-515806>

#### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 31.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

pour copier une métaphore d'Olivier de Serres. En revanche, la richesse des résultats abstraits des mathématiques alimente de plus en plus efficacement l'étude des réalités physiques et humaines, dans les domaines les plus variés des sciences vouées à cette étude, et ce, en vue d'orienter l'activité humaine capable s'agir sur ces réalisés pour en faire les instruments de buts humains.

---

## LA GÉOMÉTRIE SENSIBLE (3<sup>me</sup> article)<sup>1</sup>

PAR

† Johannes HJELMSLEV (Copenhague).

---

## LA GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE

### I. LES DEUX TABLEAUX.

1. — L'enseignement préliminaire de la géométrie dans l'espace s'effectue au moyen d'exercices pratiques. On emploie deux tableaux, le tableau vertical et le tableau horizontal. Ils se rencontrent le long d'une droite  $x$ . Nous nous servons de ces tableaux pour l'orientation dans l'espace (le dièdre normal) qu'ils limitent pour déterminer la position de points, de lignes et de plans dans cet espace, et pour effectuer des constructions. D'autre part on se sert, en plus des instruments habituels pour dessiner, d'une brique normale, d'un triangle rectangle (triangle normal), d'une planchette rectangulaire (planchette normale) sur laquelle on peut dessiner et avec laquelle on peut dresser des plans (et par là des figures planes) dans des positions différentes.

---

<sup>1</sup> Pour les deux premiers articles, voir *L'Ens. math.*, t. 38, pp. 7-26 et pp. 294-322.

On emploie de plus d'autres objets qui tous peuvent être fabriqués comme modèles en carton par les élèves eux-mêmes. L'important est qu'il soit toujours question de choses réelles que l'on a sous les yeux et avec lesquelles on peut travailler.

2. — On place la brique normale de sorte qu'elle ait une face dans chacun des tableaux. La face supérieure et le tableau horizontal nous présentent deux plans parallèles; ils ont les mêmes normales (lignes verticales) et découpent sur celles-ci un segment de même grandeur qui est la distance entre les deux plans, ou la hauteur de la brique. Deux segments quelconques sont des côtés opposés d'un rectangle qui se trouve dans un plan perpendiculaire au plan horizontal (plan vertical). La face la plus avancée de la brique (plan frontal) et le tableau vertical sont de même parallèles; la distance entre eux est la largeur de la brique. Nous appelons dans la suite leurs normales communes des lignes transversales; deux quelconques de celles-ci se trouvent dans un plan perpendiculaire au tableau vertical (plan transversal). Les deux faces de côté de la brique sont aussi parallèles; leur distance est égale à la longueur de la brique. La droite  $x$  est une normale commune tandis que les autres normales communes  $y$  sont parallèles.

3. — Soient A et B les deux sommets de la brique qui ne se trouvent dans aucun des tableaux. L'arête AA' relie A à sa projection A' sur le tableau horizontal, tandis que l'arête transversale AA'' relie A à sa projection A'' sur le tableau vertical. Le plan de côté AA'A'' coupe la droite  $x$  en  $A_0$  (projection de A sur  $x$ ). Le point B possède également les projections B' et B'' sur les deux tableaux et la projection B<sub>0</sub> sur  $x$ .

Le quadrilatère ABB<sub>0</sub>A<sub>0</sub> est un rectangle situé dans un plan qui passe par  $x$  (perpendiculaire aux surfaces AA'A<sub>0</sub>A'' et BB'B<sub>0</sub>B''); il s'appelle plan diagonal de la brique. Ce plan divise la brique en deux prismes triangulaires, droits et congruents. Construire le modèle en carton d'un de ces prismes.

Les lignes qui joignent les sommets opposés s'appellent les diagonales de la brique; elles sont égales et possèdent le même milieu, le centre de la brique.

On déduit du théorème de Pythagore que le carré de la diagonale est égal à la somme des carrés des trois arêtes de la brique.

La brique se divise en six pyramides à sommet commun au centre de la brique et dont les bases sont formées par les six faces de la brique. Construire le modèle en carton d'une de ces pyramides.

Poser la planchette normale obliquement le long de  $x$ . Montrer que dans cette position elle réalise le plan diagonal d'une brique normale dont deux faces sont situées dans les tableaux.

Exercices divers avec la planchette normale, le triangle normal et la brique pour représenter les plans horizontaux, frontaux, verticaux et transversaux; des lignes droites ainsi que des figures dans ces plans; représentation des plans par leurs traces dans les tableaux.

4. — Si l'on fait glisser la brique le long des deux tableaux, elle exécute une translation. On mesure la grandeur de celle-ci par le segment qu'a glissé la brique le long de la droite  $x$ . Si ce segment est égal à  $A_0B_0$  le rectangle  $AA'A_0A''$  sera arrivé à  $BB'B_0B''$ . La brique sera ainsi située en prolongement de sa position initiale (que l'on peut marquer en dessinant ses deux faces dans les tableaux ou en introduisant une brique identique) et formera avec celle-ci une brique dont la longueur sera le double. En continuant la translation le long de  $x$  la brique décrit un tuyau dans lequel elle glisse pour ainsi dire; la position de la brique est déterminée par celle du rectangle  $AA'A_0A''$ . Ce tuyau est limité par quatre bandes dont deux sont situées dans les tableaux tandis que les deux autres y sont parallèles.

Ces considérations qui s'appuient directement sur les propriétés fondamentales des dièdres, trièdres et briques normaux, exposés dans l'introduction du premier article, établissent les propriétés fondamentales de la translation.

En subissant la translation  $A_0B_0$  le long de la droite  $x$  tous les points décrivent des segments égaux et pareillement orientés sur  $x$  ou parallèlement à celui-ci. Un segment non parallèle à  $x$  décrit un parallélogramme (c'est-à-dire un quadrilatère dont chaque côté peut être déplacé sur le côté opposé par une trans-

lation). Une droite qui ne glisse pas sur elle-même se déplace donc sur une droite parallèle. Les plans passant par  $x$  ou par des droites parallèles glissent sur eux-mêmes, tandis que les autres plans se déplacent sur des plans parallèles puisque leurs normales conservent leur direction.

5. — On considère ensuite un prisme droit ou oblique (et tuyau prismatique) créé par la translation d'un polygone plan ; le parallélépipède ordinaire spécialement. Puis on fera suivre des exercices divers concernant la construction des modèles en carton ainsi que des problèmes qui s'y rattachent, tels que construction d'un prisme régulier hexagonal par le côté de la base et la hauteur ou, en rapport avec ceci, détermination de la section entre le prisme et un plan qui passe par deux arêtes parallèles opposées des bases, ou détermination sur la surface du prisme du chemin le plus court entre un sommet d'une base et le sommet opposé de l'autre.

6. — D'un tuyau nous découpons un prisme par deux sections parallèles  $A$  et  $A_1$ ; on appelle longueur du prisme la longueur des arêtes parallèles situées sur le tuyau. Du même tuyau nous découpons par deux autres sections parallèles  $B$  et  $B_1$  un nouveau prisme de même longueur. Ces deux prismes auront le même volume. Pour s'en rendre compte, nous supposons — ce qui peut s'obtenir par un glissement dans le tuyau — que les deux prismes n'aient aucune partie commune. Considérons maintenant les quatre sections  $A$ ,  $A_1$ ,  $B$ ,  $B_1$ . On peut par une translation déplacer le polyèdre  $AB$  situé dans le tuyau entre  $A$  et  $B$  sur celui situé entre  $A_1$  et  $B_1$ ; ces deux polyèdres sont égaux (ont le même volume). Si l'on soustrait le premier du polyèdre  $AB_1$ , il reste le prisme  $BB_1$ ; si au contraire l'on soustrait l'autre du même polyèdre  $AB_1$ , il reste le prisme  $AA_1$ ; les deux prismes ont donc le même volume.

Il s'ensuit :

1<sup>o</sup> Un prisme oblique a le même volume qu'un prisme droit de même longueur et dont la base est la section normale du prisme oblique;

2<sup>o</sup> Le volume d'un parallélépipède reste le même quand une face latérale subit une translation dans une des deux bandes que déterminent ses arêtes opposées, pendant que la face opposée reste à sa place. En effectuant encore une translation le long de l'autre paire d'arêtes opposées, on reconnaît que le volume d'un parallélépipède reste le même quand une paire de faces latérales opposées subit une translation quelconque dans leurs plans respectifs. On en déduit facilement les théorèmes habituels sur le volume du prisme.

7. — Nous mentionnons dans ce qui suit un certain nombre d'exercices, mais on peut, bien entendu, y suppléer et les varier de bien des façons.

Tracer une droite oblique dans le tableau vertical et indiquer l'angle qu'elle forme avec le tableau horizontal.

Construire les traces d'un plan perpendiculaire à cette droite et indiquer de même l'angle de celui-ci avec le tableau horizontal.

Un point A est donné par sa projection A' sur le tableau horizontal (la projection horizontale du point) et sa hauteur au-dessus de celui-ci. Déterminer sa projection A'' sur le tableau vertical (projection verticale du point) et sa distance à celui-ci.

Figures symétriques par rapport à un plan perpendiculaire à la droite  $x$ .

Une droite est donnée par sa trace P dans le tableau horizontal et sa trace Q dans le tableau vertical. Construire sa projection sur chacun des tableaux et déterminer ses angles avec ceux-ci. Rabattre la droite sur le tableau horizontal en la tournant autour de sa projection horizontale PQ' (ou pareillement sur le tableau vertical). Rabattre aussi la droite sur le tableau vertical autour d'une ligne verticale passant par Q (ou sur le tableau horizontal autour de la ligne transversale passant par P).

Un point A sur la droite PQ est donné par sa projection horizontale A'. Déterminer la hauteur du point et sa projection verticale A''.

Un plan oblique est donné par ses traces dans les tableaux. Mener un plan vertical perpendiculairement à la trace horizontale, et déterminer par là l'angle du plan avec le plan horizontal. Déterminer de façon analogue son angle avec le plan vertical.

Mener un plan perpendiculaire à une droite PQ. Trouver la distance d'un point à un plan transversal; puis à un plan oblique quelconque.

Trouver la distance d'un point à une droite oblique située dans un des tableaux; puis à une droite quelconque.

Soit ABC un triangle dont A se trouve dans le tableau vertical, B et C dans le tableau horizontal. Rabattre le triangle sur le tableau horizontal en le tournant autour de BC.

Trouver la plus courte distance d'une droite verticale, située dans le tableau vertical, à une droite oblique PQ.

On construit facilement un trièdre dont deux faces sont situées dans les tableaux, en posant le triangle normal de façon à avoir l'hypoténuse dans le tableau vertical et un autre côté dans le tableau horizontal. La projection du triangle sur le tableau horizontal est un triangle rectangle. En posant l'hypoténuse égale à 1 l'on déduit immédiatement les formules trigonométriques principales du trièdre. On vérifie ensuite que ces formules restent valables au cas où les angles en question ne sont plus aigus.

Tracer deux plans obliques ainsi que leur ligne d'intersection; trouver leur angle par rabattement sur le tableau horizontal.

8. — Voici quelques exercices qui se rapportent à un seul tableau (plan du dessin) en appliquant la projection et le rabattement.

Construire une pyramide hexagonale régulière quand l'arête de la base et la hauteur sont respectivement égales à  $a$  et  $h$ . Déterminer l'angle plan à la base et aux faces latérales, par construction et par calcul.

Déterminer toutes les pyramides dont les arêtes (les arêtes de la base ainsi que les arêtes latérales) sont toutes égales; déterminer les angles plans. Application à la construction des polyèdres réguliers.

Exercices simples concernant l'application des deux projections (les représentations de Monge).

9. — Les cylindres et cônes de révolution sont considérés comme des prismes et des pyramides dont les faces latérales se

confondent avec les plans tangents. On en déduit les théorèmes habituels: L'aire latérale du cône de révolution est égale au demi-produit de la longueur d'une génératrice par la longueur de la circonférence de base; l'aire latérale d'un tronc de cône de révolution est égale au produit de la longueur de la génératrice par la longueur de la circonférence médiane, ou le produit de la hauteur par la longueur d'une circonférence dont le rayon est égal à la normale médiane. La surface de la sphère se décompose en zones coniques étroites dont les hauteurs ont une somme égale au diamètre de la sphère, tandis que leurs normales médiennes sont toutes égales au rayon de la sphère. En faisant la somme de ces zones on obtient le produit du diamètre de la sphère par la circonférence du grand cercle, ce qui équivaut à quatre grands cercles.

On n'applique jamais, bien entendu, les déterminations infinitésimales à la géométrie empirique.

10. — Comme introduction à la géométrie sphérique, on peut partir d'un trièdre OABC et construire son développement sur le plan du tableau. En coupant la figure par une circonférence de centre O, on obtient trois secteurs circulaires  $A_1OB$ ,  $BOC$ ,  $COA_2$ , dont le premier et le dernier doivent se plier respectivement autour de OB et OC de telle façon que  $OA_1$  et  $OA_2$  se rencontrent le long de l'arête OA. Le point A est déterminé par sa projection A' sur le plan du tableau et sa distance de celui-ci. La construction fait ressortir le théorème sur les côtés d'un simple triangle sphérique: la somme des côtés est inférieure à  $360^\circ$  et chacun d'eux est plus petit que la somme des deux autres.

Au cas où les deux faces passant par OA sont plus petites que  $90^\circ$  on a, dans le développement du trièdre, une construction particulièrement simple pour déterminer l'angle plan le long de OA. Menons, en effet, par  $A_1$  et  $A_2$  les perpendiculaires aux droites  $OA_1$  et  $OA_2$  et déterminons les points d'intersection Q et R entre ces perpendiculaires et les droites OB et OC. Dans le triangle PQR aux côtés  $A_1Q$ ,  $QR$ ,  $A_2R$ , l'angle de sommet P sera égal à l'angle plan en question. En posant  $OA_1$  et  $OA_2$  égaux à l'unité, on déduit directement du triangle PQR la relation des cosinus pour le trièdre (le triangle sphérique). La

validité de la formule dans les autres cas se vérifie ensuite par de simples considérations. La validité de la formule des sinus ressort déjà de ce qui précède, et la base de la trigonométrie sphérique est donc établie.

11. — Introduisons maintenant un tableau passant par un point  $O$  de la droite  $x$  et perpendiculaire à celle-ci. Il coupe les deux premiers tableaux suivant une droite horizontale  $y$  et en une droite verticale  $z$ . Ces trois tableaux déterminent un trièdre normal aux arêtes  $x$ ,  $y$  et  $z$ , et nous employons ce trièdre comme système de coordonnées de telle façon qu'un point  $A$  dont les projections sur le tableau horizontal et sur l'axe  $Ox$  se trouvent respectivement en  $A'$  et  $A_0$  est caractérisé par les coordonnées

$$a = OA_0, \quad b = A_0 A', \quad c = A' A.$$

Le point se désigne alors par  $(a, b, c)$ . Les coordonnées sont égales aux arêtes d'une brique normale dont les trois faces sont situées dans les tableaux tandis qu'un sommet se trouve à  $A$ .

En projetant la droite  $OA$  sur les tableaux on reconnaît que les points du segment  $OA$  seront représentés par les coordonnées  $\lambda a$ ,  $\lambda b$ ,  $\lambda c$ , où  $\lambda$  est une fraction proprement dite. On dit que le point  $(\lambda a, \lambda b, \lambda c)$  est dérivé du point  $(a, b, c)$  par une multiplication par  $\lambda$  par rapport à  $O$ .

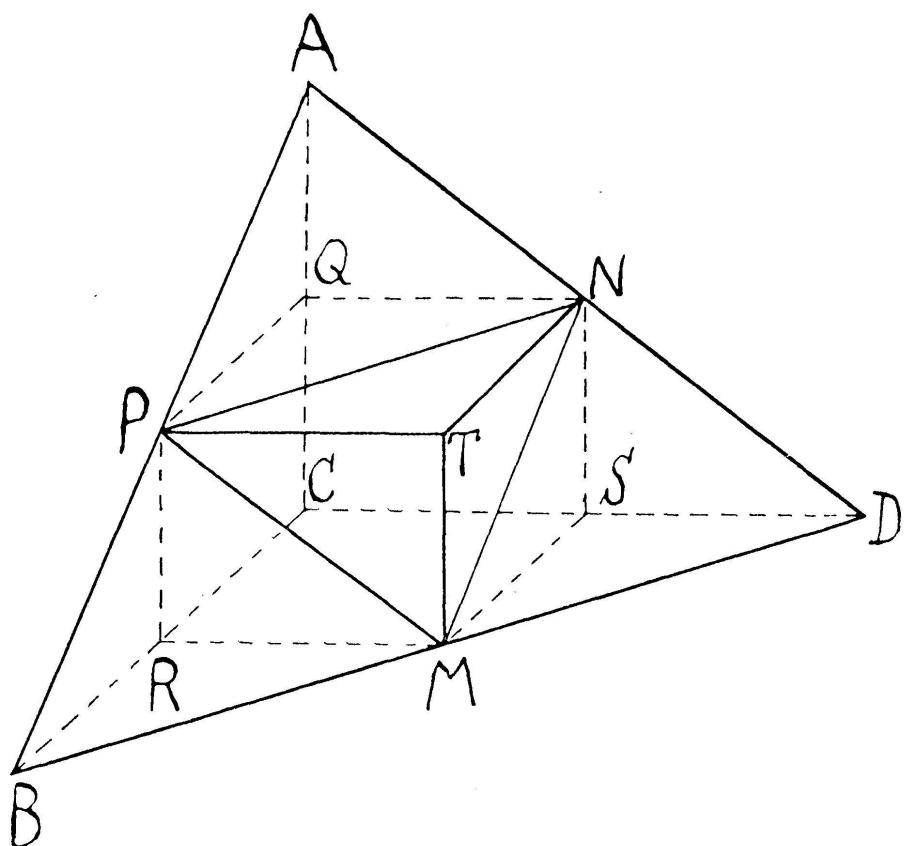
12. — De cette manière on peut multiplier un point ou une figure quelconque par  $\lambda$ . Une figure située dans un plan par  $O$  est transformée par là en une figure semblable dans le même plan, et un segment se transforme en un autre segment parallèle dont la longueur est  $\lambda$  fois aussi grande. Une figure située dans un plan  $\alpha$  qui ne passe pas par  $O$ , se transforme en une figure semblable située dans un plan parallèle à  $\alpha$ , car tout segment entre  $O$  et un point de  $\alpha$  est multiplié par  $\lambda$ .

Deux figures dans l'espace qui se déduisent l'une de l'autre de cette manière s'appellent semblables dans le rapport  $\lambda$  (homothétiques).

13. — Si un corps est composé de parties qui peuvent se joindre à un cube à l'arête  $a$  cm (où  $a$  est un nombre entier ou

fractionnaire) on attribue au volume de ce corps le même nombre-mesure qu'au volume du cube, donc  $a^3$  cm<sup>3</sup>.

Une multiplication par  $\lambda$  transforme le corps en un autre corps composé de parties correspondantes qui, elles aussi, peuvent se joindre à un cube. L'arête de celui-ci est égale à



$\lambda a$  cm et son volume est donc égal à  $\lambda^3 a^3$  cm<sup>3</sup>, c'est-à-dire le volume du nouveau corps est  $\lambda^3$  fois celui du corps initial.

Il s'ensuit que pour deux corps semblables le rapport des volumes est égal au cube du rapport linéaire.

On reconnaît de façon analogue que les nombres-mesure de deux corps symétriques doivent être égaux. On sait d'ailleurs qu'il est possible de diviser deux tétraèdres symétriques en douze paires de parties superposables.

14. — Pour trouver le nombre-mesure  $V$  à employer pour le volume d'une pyramide triangulaire A — BCD (fig. 1), où l'arête AC =  $h$  est la hauteur de la pyramide et où l'aire de la base BCD est égale à G, nous menons par les milieux P, Q, N des

arêtes partant de A une section plane PQN parallèle à la base BCD. Nous avons ainsi découpé une pyramide A — PQN semblable à la pyramide initiale dans le rapport  $\frac{1}{2}$  et le nombre-mesure de son volume est donc  $\frac{1}{8} V$ . D'une manière analogue, on découpe aux sommets B et D deux pyramides B — PRM et D — NSM dont chacune a le volume  $\frac{1}{8} V$ . Les trois plans de coupure PQN, PRM et NSM limitent — avec les trois faces y parallèles de la pyramide donnée — un prisme quadrangulaire droit dont la base est RMSC =  $\frac{1}{2} G$  et la hauteur CQ =  $\frac{1}{2} h$ . Le nombre-mesure pour le volume du prisme est donc  $\frac{1}{4} hG$ . Ce prisme se compose de deux parties, l'une à l'intérieur, l'autre à l'extérieur de la pyramide; le volume de la première a le nombre-mesure  $\frac{5}{8} V$ . La seconde partie, le tétraèdre M — TNP est — comme on le voit — superposable au tétraèdre C — QPN qui, lui, est symétrique au tétraèdre A — QPN, et son volume est par conséquent  $\frac{1}{8} V$ . Le nombre-mesure du prisme s'exprime donc par  $\frac{5}{8} V + \frac{1}{8} V = \frac{3}{4} V$  et par  $\frac{1}{4} hG$ , donc  $\frac{3}{4} V = \frac{1}{4} hG$  ou  $V = \frac{1}{3} hG$ .

15. — Ce résultat est cependant valable aussi pour une pyramide quelconque A — BCDE... Si le pied de la hauteur AO est situé à l'intérieur de la base (ou sur le périmètre de celle-ci) on peut, pourvu que la base soit convexe, diviser la pyramide en tétraèdres qui tous contiennent AO comme arête commune; dans les autres cas, on peut toujours déduire la pyramide initiale par addition, ou soustraction, d'un ensemble de tétraèdres ayant l'arête commune AO. Dans tous les cas, on arrive à la nécessité de mesurer le volume de la pyramide par  $\frac{1}{3}$  du produit de la hauteur par la base.

16. — On réalise ensuite sans difficulté la détermination de tous les volumes simples, entre autres le volume de la sphère. Celle-ci se décompose en effet en petites pyramides dont le sommet est au centre de la sphère et dont les bases se confondent avec les plans tangents de celle-ci. Le volume devient donc égal à  $\frac{1}{3}$  du produit du rayon par la surface de la sphère. Comme il a été mentionné plus haut, les considérations infinitésimales ne relèvent pas de cette géométrie.

## II. LA GÉOMÉTRIE DE LA CHAMBRE.

17. — Une chambre a la forme d'un cube dont l'arête est égale à 5 mètres. Par le milieu O du cube nous menons un plan horizontal, le plan médian ; il divise la chambre en deux espaces symétriques, l'un supérieur, l'autre inférieur. Le plan médian joint les parois le long d'un carré dont le côté est égal à 5 mètres. Nous rapportons les points de ce carré à un système de coordonnées dont les axes  $x$  et  $y$  partent du milieu O parallèlement aux côtés du carré et munis de directions positives déterminées. Chacun de ces points est déterminé par deux coordonnées.

L'on peut maintenant indiquer la position d'autres points P dans la chambre, qu'ils appartiennent à l'espace supérieur ou inférieur de celle-ci, par leur projection  $P'$  sur le plan médian et par la distance  $P'P$  au-dessus ou au-dessous de celui-ci. Cette distance est munie de signes, en effet + ou — selon qu'elle pointe vers le haut ou vers le bas.

Chaque point de la chambre est ainsi déterminé par trois coordonnées  $x_1, x_2, x_3$  (ou  $x, y, z$ ) dont les deux premières  $x_1$  et  $x_2$  sont les coordonnées de  $P'$  dans le plan médian tandis que la troisième  $x_3$  est la distance  $P'P$  orientée selon les indications ci-dessus. Si la coordonnée  $x_3$  est égale à zéro, le point P est situé dans le plan médian. Les deux axes  $x$  et  $y$  ainsi qu'un axe vertical  $z$  par O orienté vers le haut, s'appellent les axes de coordonnées et forment avec les plans  $yz$ ,  $zx$  et  $xy$  (les plans de coordonnées) un système de coordonnées.

Pour commencer nous ne considérons pas d'autres points dans la chambre que ceux dont les coordonnées s'expriment en un nombre entier de centimètres, de sorte que  $x_1, x_2, x_3$  ne prennent que les valeurs entières de l'intervalle — 250 à + 250. Mais il faut toujours conserver la possibilité d'introduire, par fractionnement du centimètre, des nombres plus petits à mesure qu'on en aura besoin, tout en appliquant notre interprétation habituelle.

18. — Par une translation le long de l'axe  $Ox$  où l'origine O se déplace sur le point  $(a, 0, 0)$ , l'ensemble des points se déplace

sur d'autres points de telle sorte que les coordonnées  $y$  et  $z$  restent les mêmes tandis que les coordonnées  $x$  s'augmentent de  $a$ . Les translations le long des axes  $Oy$  et  $Oz$  sont caractérisées d'une manière analogue. Il s'ensuit qu'une translation qui déplace l'origine  $O$  sur le point  $(a, b, c)$  déplacera le point  $(x, y, z)$  sur  $(x + a, y + b, z + c)$ .

Pour une symétrie par rapport au plan  $Oxy$ , les coordonnées  $x$  et  $y$  restent les mêmes, tandis que les coordonnées  $z$  changent de signe. Il en est de même pour les symétries par rapport aux autres plans de coordonnées.

Une rotation de  $90^\circ$  autour de l'axe  $Oz$  déplace l'axe  $Ox$  sur  $Oy$  et le point  $(x, y, z)$  sur  $(-y, x, z)$ . Des changements analogues ont lieu pour les rotations autour des autres axes.

Considérons enfin une demi-rotation autour de l'axe  $Oz$  qui déplacera le point  $(x, y, z)$  sur  $(-x, -y, z)$  ainsi que la symétrie (le mirage) par rapport à l'origine  $O$  qui transforme  $(x, y, z)$  en  $(-x, -y, -z)$ . On peut décomposer la dernière transformation en trois mirages consécutifs par rapport aux plans de coordonnées ou en un seul mirage par rapport au plan  $xy$  suivi d'une demi-rotation autour de l'axe  $Oz$ .

19. — Le carré de la distance de l'origine  $O$  à un point  $P(x, y, z)$  est — comme nous le savons déjà — égal à  $x^2 + y^2 + z^2$ , d'où l'on conclut immédiatement que le carré de la distance d'un point quelconque  $M(a, b, c)$  au point  $P(x, y, z)$  doit être

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 .$$

On a seulement à effectuer une translation qui déplace  $M$  sur  $O$ , et à appliquer ensuite le résultat précédent.

20. — Pour que les deux droites joignant  $O$  aux points  $M(a, b, c)$  et  $P(x, y, z)$  soient perpendiculaires l'une à l'autre, il faut, selon le théorème de Pythagore, que le carré de  $MP$  soit égal à la somme des carrés de  $OM$  et  $OP$ , donc

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = (x^2 + y^2 + z^2) + (a^2 + b^2 + c^2)$$

ou

$$ax + by + cz = 0 .$$

Il s'ensuit que les points  $(x, y, z)$  situés dans un plan mené par  $O$  perpendiculairement à la droite  $OM$  doivent satisfaire à l'équation  $ax + by + cz = 0$ . On appelle donc cette équation l'équation du plan.

Si le plan ne passe pas par l'origine, mais par un autre point  $(p, q, r)$  l'on reconnaît facilement par une translation que son équation sera

$$a(x - p) + b(y - q) + c(z - r) = 0.$$

21. — Nous introduisons à présent les vecteurs dans l'espace comme antérieurement nous l'avons fait dans le plan. La lettre  $a$  doit premièrement signifier le point  $(a_1, a_2, a_3)$ , mais deuxièmement elle doit signifier une translation qui déplace l'origine sur ce point; troisièmement elle signifie enfin un vecteur, c'est-à-dire un chemin rectiligne qui va de l'origine au point. On appelle aussi  $a_1, a_2, a_3$  les coordonnées de la translation ou du vecteur.

L'équation  $a + b = c$  doit signifier que la composition des translations  $a$  et  $b$  produit la translation  $c$ ; ceci revient aux relations  $a_1 + b_1 = c_1$ ,  $a_2 + b_2 = c_2$  et  $a_3 + b_3 = c_3$ .

On appelle vecteurs inverses deux vecteurs  $a$  et  $(-a)$  qui se détruisent par addition, c'est-à-dire qui produisent le vecteur zéro  $(0, 0, 0)$ . Parfois on se sert aussi d'un vecteur du point  $a$  au point  $b$ . Il est désigné par  $\overline{ab}$  et signifie le vecteur correspondant à la translation qui déplace le point  $a$  sur le point  $b$ , donc  $\overline{ab} = b - a$ .

22. — On dit que le vecteur  $a$  est multiplié par le nombre (le scalaire)  $\lambda$ , quand ses coordonnées sont multipliées par  $\lambda$  et l'on écrit

$$\lambda a = (\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3).$$

Les vecteurs  $a$  et  $\lambda a$  sont situés sur la même droite et sont dits linéairement dépendants (entre eux); ils ont la même direction ou des directions opposées selon que  $\lambda$  est positif ou négatif.

Si deux vecteurs  $a$  et  $b$  sont situés sur la même droite, il existe entre eux un rapport  $a/b$  ou  $a : b$ , c'est-à-dire un scalaire  $\lambda$  tel que  $a = \lambda b$ .

23. — Pour une droite passant par le point  $a$  et dont la direction est déterminée par le vecteur  $b$ , on a la représentation paramétrique

$$x = a + \lambda b .$$

Pour un plan passant par le point  $a$  et contenant des droites dont les directions sont déterminées par les vecteurs  $b$  et  $c$ , on a la représentation paramétrique

$$x = a + \lambda b + \mu c ;$$

ceci signifie que tout couple de valeurs des deux scalaires  $\lambda$  et  $\mu$  détermine — en deça de certaines limites — un point  $x$  dans le plan.

24. — Le produit (scalaire) de deux vecteurs  $a$  et  $b$  est défini par la relation

$$ab = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 .$$

On reconnaît tout de suite les mêmes propriétés que pour le plan :

$$ab = ba , \quad a(b + c) = ab + ac .$$

$ab = 0$  signifie  $a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 0$ , donc (§ 20) que les deux vecteurs sont perpendiculaires l'un à l'autre (à condition bien entendu qu'aucun d'eux ne soit le vecteur zéro).

Le produit reste le même quand l'extrémité d'un des vecteurs se déplace dans un plan perpendiculaire à l'autre, car  $a(b + c) = ab$ , quand  $ac = 0$ .

La projection du vecteur  $a$  sur  $b$  est un vecteur  $a_b$  dont le rapport à  $b$  est le suivant

$$\frac{a_b}{b} = \frac{a_b b}{b^2} = \frac{ab}{b^2} , \quad \text{donc} \quad a_b = \frac{ab}{b^2} b .$$

25. — Correspondant au nombre-mesure de longueur que nous avons introduit dans le plan, nous choisissons dans l'espace comme nombre-mesure pour la longueur du vecteur  $a$

$$|a| = \sqrt{a^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} .$$

A chaque vecteur  $a$  (différent de zéro) correspond ainsi un vecteur d'unité  $a/\sqrt{a^2}$  (vecteur de longueur 1) dont les applications sont analogues à celles dans le plan.

La distance de deux points  $a$  et  $b$ , la longueur du vecteur  $\overline{ab}$ , possède le nombre-mesure

$$|\overline{ab}| = \sqrt{(a - b)^2} = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)^2} .$$

26. — Un plan mené par le point  $p$  perpendiculairement au vecteur  $a$  est représenté par l'équation

$$a(x - p) = 0 .$$

Si  $a$  est un vecteur-unité, on dit que l'équation est mise sous la forme normale. La distance du plan à un point  $x_0$  calculée conformément à l'orientation de  $a$ , sera égale à  $a(x_0 - p)$ . Ce résultat est tout à fait pareil à celui du problème correspondant dans le plan concernant la distance d'une droite à un point.

Si  $a$  n'est pas un vecteur-unité, il suffit de diviser par  $\pm \sqrt{a^2}$  pour mettre l'équation sous la forme normale.

27. — *Vecteur perpendiculaire de deux vecteurs a et b.* — Nous cherchons un vecteur  $x$  qui soit perpendiculaire à  $a$  et  $b$ , ces derniers étant linéairement indépendants. Les coordonnées  $(x_1, x_2, x_3)$  sont déterminées par les deux équations

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0 \quad (1)$$

$$b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 = 0 . \quad (2)$$

Parmi les trois déterminants

$$\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix},$$

qu'on déduit de la matrice

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

en supprimant respectivement la première, la seconde ou la troisième colonne, il doit en exister au moins un qui soit diffé-

rent de zéro, puisque nous avons supposé que  $a$  et  $b$  ne sont pas contenus dans la même droite.

Si, par exemple, le dernier des trois déterminants est différent de zéro, les équations (1) et (2) déterminent  $x_1$  et  $x_2$  en fonction de  $x_3$ ; l'on reconnaît que le groupe  $(x_1, x_2, x_3)$  doit être proportionnel aux trois déterminants, celui du milieu étant multiplié d'abord par — 1.

On peut donc choisir le vecteur cherché  $x$  de telle façon que ses coordonnées soient égales aux trois valeurs proportionnelles multipliées par un nombre arbitraire  $\lambda$ . Si, en particulier, on pose  $\lambda = 1$ , nous appelons le vecteur ainsi défini, *vecteur viré*<sup>1</sup> de  $a$  et  $b$ . Il est désigné par  $\widehat{ab}$ , donc

$$\widehat{ab} = (a_2 b_3 - a_3 b_2, \quad a_3 b_1 - a_1 b_3, \quad a_1 b_2 - a_2 b_1). \quad (3)$$

On a immédiatement  $\widehat{ab} = -\widehat{ba}$ .

Le vecteur viré  $\widehat{ab}$  s'appelle aussi le *produit vectoriel* de  $a$  et  $b$  (par opposition au produit scalaire  $ab$ ).

Si  $a$  et  $b$  sont contenus dans la même droite, on définit toujours  $\widehat{ab}$  par l'expression (3); il en résulte directement  $\widehat{ab} = \widehat{ba} = 0$ .

En multipliant un des vecteurs  $a$  ou  $b$  par le scalaire  $\lambda$ , on multiplie aussi le produit vectoriel par  $\lambda$ .

28. — Le produit vectoriel  $\widehat{ab}$  est distributif par rapport aux deux vecteurs  $a$  et  $b$ , c'est-à-dire

$$\widehat{a}(b + c) = \widehat{ab} + \widehat{ac}, \quad (b + c)\widehat{a} = \widehat{ba} + \widehat{ca}.$$

Ceci résulte directement du fait que  $\widehat{ab}$  est représenté par des expressions linéaires et homogènes des deux groupes de coordonnées de  $a$  et  $b$ .

Le produit vectoriel reste invariable quand l'extrémité de l'un des vecteurs se déplace parallèlement à l'autre. Car

$$\widehat{a}(b + \lambda a) = \widehat{ab} + \lambda \widehat{aa} = \widehat{ab}.$$

<sup>1</sup> Voir deuxième article, p. 303.

Comme  $\widehat{ab}$  est perpendiculaire et à  $a$  et à  $b$ , on a

$$\widehat{ab} \cdot a = 0, \quad \widehat{ab} \cdot b = 0.$$

29. — Considérons trois vecteurs  $a, b, c$  et formons le produit

$$\widehat{abc} = \widehat{ab} \cdot c.$$

Ce produit à trois est un scalaire dont la valeur exprimée par les coordonnées des vecteurs, est égale à

$$\widehat{abc} = (a_2 b_3 - a_3 b_2) c_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3) c_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1) c_3.$$

Il s'ensuit immédiatement de la définition que le *produit à trois est égal à zéro quand les trois vecteurs sont situés dans le même plan* (sont linéairement dépendants), car le vecteur  $c$  est alors perpendiculaire à  $\widehat{ab}$ . De ceci résulte encore: *Le produit à trois reste invariable si l'extrémité de l'un des vecteurs se déplace dans un plan parallèle aux deux autres.*

A l'aide de cette proposition on peut transformer de plusieurs façons un groupe de trois vecteurs ( $a, b, c$ ) en un autre dont le produit à trois est le même, car l'on peut successivement faire varier les vecteurs. Pendant toutes ces transformations l'orientation de  $a, b$  par rapport à  $c$  (c'est-à-dire le sens de rotation que représente le mouvement de  $a$  à  $b$  dans le plan de ces vecteurs pour un spectateur placé du même côté du plan que le vecteur  $c$ ) reste invariable; ensuite le volume contenu dans un parallélépipède aux arêtes  $a, b, c$  restera invariable aussi, d'après les règles élémentaires mentionnées plus haut (nº 6).

Pour examiner le rapport entre le produit à trois et ce volume nous choisissons d'abord le cas spécial où  $a, b, c$  sont les vecteurs-unité sur les axes de coordonnées, donc  $(1, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 0)$  et  $(0, 0, 1)$ . On en déduit  $\widehat{ab} = c$ , donc  $\widehat{abc} = c^2 = 1$ , c'est-à-dire le produit à trois est exactement égal au nombre-mesure pour le volume du cube formé par les trois vecteurs-unité.

Si au lieu des vecteurs-unité nous considérons trois vecteurs sur les axes de coordonnées aux longueurs  $\alpha, \beta$  et  $\gamma$ , ces nombres

étant positifs, le produit à trois sera égal à  $\alpha\beta\gamma$ , c'est-à-dire au volume de la brique formée par les trois vecteurs.

Si l'un des vecteurs est remplacé par le vecteur opposé, le produit à trois change de signe.

Comme on peut toujours transformer un groupe à trois vecteurs ( $a, b, c$ ) en un autre dont les vecteurs sont contenus dans les axes de coordonnées tout en se bornant aux changements décrits plus haut, il en résulte que le produit à trois  $\widehat{abc}$  représente toujours le volume du parallélépipède aux arêtes  $a, b, c$ , muni de signe plus ou moins selon que l'orientation ( $abc$ ) est conforme ou non à l'orientation du système des coordonnées  $xyz$ , c'est-à-dire l'orientation des trois vecteurs  $(1, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 0)$  et  $(0, 0, 1)$ .

On voit que le produit à trois change de signe quand on permute deux vecteurs voisins, car ceci est évident quand les vecteurs sont situés sur les axes de coordonnées. Il en résulte ensuite que le produit à trois change de signe quand deux vecteurs quelconques sont permutés, d'où le résultat final:

Les trois permutations  $abc$ ,  $bca$  et  $cab$  ont le même produit à trois; les trois permutations  $cba$ ,  $bac$  et  $acb$  ont le produit opposé.

La valeur  $\widehat{abc}$  représente le nombre-mesure pour le volume du vecteur à trois  $a, b, c$ , muni de signe conformément à l'orientation ( $abc$ ).

Pour le volume du tétraèdre orienté aux arêtes  $a, b, c$  nous serons ainsi obligés de fixer le nombre-mesure  $\frac{1}{6} \widehat{abc}$  (d'après les raisonnements établis aux n°s 14 et 15).

30. — L'expression  $\widehat{abc}$  dépend de trois groupes de nombres  $(a_1, a_2, a_3)$ ,  $(b_1, b_2, b_3)$  et  $(c_1, c_2, c_3)$ . On la désigne directement en les inscrivant dans un schéma (une matrice) de la façon suivante

$$\widehat{abc} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Ce schéma s'appelle déterminant de troisième ordre. Son calcul et les règles pour sa transformation et pour le calcul avec

les compléments découlent très simplement de ce qui précède, et c'est pourquoi nous n'entrerons pas dans plus de détails.

Nous mentionnons seulement la résolution des trois équations scalaires :

$$\begin{aligned} a_1 x_1 + b_1 x_2 + c_1 x_3 &= d_1 \\ a_2 x_1 + b_2 x_2 + c_2 x_3 &= d_2 \\ a_3 x_1 + b_3 x_2 + c_3 x_3 &= d_3 \end{aligned} \quad (1)$$

aux inconnues  $x_1$ ,  $x_2$  et  $x_3$ . En introduisant les vecteurs

$$a = (a_1, a_2, a_3), \quad b = (b_1, b_2, b_3), \quad c = (c_1, c_2, c_3), \quad d = (d_1, d_2, d_3),$$

on peut réunir les trois équations scalaires en une équation vectorielle

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 = d.$$

A condition que  $\widehat{abc}$  soit différent de zéro, on résout facilement cette équation en multipliant successivement par  $\widehat{bc}$ ,  $\widehat{ca}$  et  $\widehat{ab}$ , ce qui donne

$$x_1 = \frac{\widehat{dbc}}{\widehat{abc}}, \quad x_2 = \frac{\widehat{adc}}{\widehat{abc}}, \quad x_3 = \frac{\widehat{abd}}{\widehat{abc}}.$$

31. — *Longueur du vecteur viré  $\widehat{ab}$ .* — Le carré du vecteur perpendiculaire  $\widehat{ab}$  est égal à

$$(\widehat{ab})^2 = (a_2 b_3 - a_3 b_2)^2 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)^2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2,$$

d'où l'on déduit

$$(\widehat{ab})^2 = (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)^2,$$

ou

$$(\widehat{ab})^2 = a^2 b^2 - (ab)^2.$$

Le nombre-mesure du vecteur viré  $\widehat{ab}$  s'exprime donc par

$$|\widehat{ab}| = \sqrt{a^2 b^2 - (ab)^2}.$$

Au cas où les deux vecteurs  $a$  et  $b$  sont perpendiculaires l'un à l'autre, on a  $ab = 0$  et, par conséquent,

$$|\widehat{ab}| = \sqrt{a^2} \sqrt{b^2}.$$

Le nombre-mesure pour la longueur du vecteur viré est donc égal au produit des nombres-mesure pour les longueurs des deux vecteurs, c'est-à-dire égal au nombre-mesure pour l'aire du rectangle formé par  $a$  et  $b$ .

Dans le cas général on peut — en déplaçant l'extrémité de l'un des vecteurs parallèlement à l'autre — transformer le parallélogramme des vecteurs en un rectangle qui — selon les règles élémentaires pour les aires planes — possède la même aire que le parallélogramme. Cette transformation laisse invariable le vecteur viré  $\widehat{ab}$ , d'où il s'ensuit dans tous les cas que le nombre-mesure pour la longueur du vecteur viré est égal au nombre-mesure pour l'aire du parallélogramme formé par les deux vecteurs. Dans ce qui précède nous avons déjà rendu compte de l'orientation du vecteur viré  $\widehat{ab}$  par rapport à l'orientation des deux vecteurs  $a$  et  $b$  dans leur plan.

Ce résultat s'accorde avec la règle élémentaire selon laquelle le volume d'un parallélépipède est égal au produit de la hauteur par l'aire de la base. Car si  $\widehat{abc} = \widehat{ab} \cdot c$  doit représenter le nombre-mesure pour le volume du parallélépipède, il faut que le nombre-mesure pour la longueur de  $\widehat{ab}$  soit égal au nombre-mesure pour l'aire du parallélogramme  $a, b$ .

Donc, si nous introduisons dans la géométrie analytique de l'espace les deux conditions que voici:

1° Le nombre-mesure pour le volume d'un parallélépipède orienté, formé par trois vecteurs  $a, b, c$  est représenté par  $\widehat{abc}$ ; et de même, le nombre-mesure pour un tétraèdre orienté  $abc$  — O dont les arêtes sont les vecteurs  $a, b, c$  est représenté par  ${}^1/{}_6 \widehat{abc}$ ;

2° Le nombre-mesure pour l'aire d'un parallélogramme formé de deux vecteurs  $a$  et  $b$  est représenté par

$$\sqrt{a^2b^2 - (ab)^2},$$

toutes les règles pour les déterminations de mesure seront satisfaites.

32. — La dernière condition mentionnée est une condition numérique car elle ne tient pas compte de l'orientation (l'ordre) des deux vecteurs  $a$  et  $b$ . Nous voulons cependant fixer aussi une condition concernant le signe du parallélogramme formé par  $a$  et  $b$ . Elle correspond au choix d'un vecteur normal positif  $n$  pour le plan dans lequel sont situés le parallélogramme et les autres figures dont nous voulons déterminer l'aire. Nous posons, en effet, l'aire du parallélogramme formé par  $a$  et  $b$  égale à  $\widehat{ab}/n$ . Pour l'aire d'un triangle  $Oab$ , dont les deux côtés sont  $a$  et  $b$ , nous fixons le nombre-mesure à  $\frac{1}{2} \widehat{ab}/n$ , et pour l'aire d'un polygone  $abc \dots ik$  dans le plan le nombre-mesure sera

$$\frac{1}{2} \left( \widehat{\frac{ab}{n}} + \widehat{\frac{bc}{n}} + \dots + \widehat{\frac{ik}{n}} + \widehat{\frac{ka}{n}} \right).$$

On vérifie que cette détermination renferme comme cas particulier la stipulation antérieurement introduite dans le plan  $Oxy$ .

33. — *Déplacements dans l'espace.* — Un déplacement qui laisse fixe le point  $O$  est déterminé par la position du trièdre normal sur lequel est placé le trièdre de coordonnées. Cette position est déterminée par les trois vecteurs-unité  $e$ ,  $f$  et  $g$  qui correspondent aux vecteurs  $(1, 0, 0)$   $(0, 1, 0)$  et  $(0, 0, 1)$ .

On a pour ces vecteurs

$$e^2 = f^2 = g^2 = 1 ; \quad fg = ge = ef = 0 ; \quad \widehat{fg} = e, \quad \widehat{ge} = f, \quad \widehat{ef} = g.$$

Pour déterminer le point  $x'$  ( $x'_1, x'_2, x'_3$ ) qui correspond au point  $x$  ( $x_1, x_2, x_3$ ) nous avons

$$x' = x_1 e + x_2 f + x_3 g.$$

Les points  $y'$  et  $z'$  qui correspondent aux deux points  $y$  et  $z$  sont déterminés par

$$y' = y_1 e + y_2 f + y_3 g$$

$$z' = z_1 e + z_2 f + z_3 g.$$

On vérifie maintenant par de simples calculs que

$$x'^2 = x^2, \quad (x' - y')^2 = (x - y)^2, \quad x' y' = xy,$$

puis

$$\widehat{x'y'} = (x_2 y_3 - x_3 y_2) e + (x_3 y_1 - x_1 y_3) f + (x_1 y_2 - x_2 y_1) g = \widehat{(xy)}',$$

et

$$\widehat{x'y'z'} = \widehat{x'y'} \cdot z' = (x_2 y_3 - x_3 y_2) z_1 + (x_3 y_1 - x_1 y_3) z_2 + (x_1 y_2 - x_2 y_1) z_3$$

ou

$$\widehat{x'y'z'} = \widehat{xyz}.$$

34. — Il ressort de ces équations que tous les nombres-mesure pour les longueurs, les aires et les volumes restent invariables pourvu que le déplacement laisse fixe le point O. Il importe donc maintenant de vérifier qu'ils restent invariables pendant une translation, car leur invariabilité serait alors assurée quel que soit le déplacement. Ceci se vérifie immédiatement pour le nombre-mesure pour la longueur; pour le nombre-mesure de l'aire le fait se déduit de la formule du n° 32. Par contre le problème concernant le nombre-mesure pour le volume nécessite un examen un peu plus détaillé, joint à une extension finale des nombres-mesure déjà introduits pour le volume.

35. — Au n° 29 nous avons fixé le nombre-mesure pour le volume du tétraèdre orienté  $abc - 0$  à

$$\frac{1}{6} \widehat{ab} \cdot c = \frac{1}{6} \widehat{abc}.$$

Nous généralisons maintenant cette condition en fixant le nombre-mesure pour le volume du tétraèdre  $abcp$  à

$$\frac{1}{6} b \overbrace{a, c} \overbrace{a} \cdot (p - a) = \frac{1}{6} (\widehat{bc} + \widehat{ca} + \widehat{ab}) (p - a).$$

qui — comme on le voit immédiatement — satisfait à la condition concernant l'invariabilité du nombre-mesure pendant une translation.

D'après ceci la différence entre les deux tétraèdres  $abcp$  et  $abcq$  sera la suivante

$$abcp - abcq = \frac{1}{6} (\widehat{bc} + \widehat{ca} + \widehat{ab}) (p - q) ,$$

d'où l'on reconnaît que pour un polyèdre quelconque limité entièrement par des triangles  $abc, cbd, \dots$  — ceux-ci étant parcourus selon une orientation fixe sur la surface du polyèdre telle que les parcours de deux triangles voisins soient opposés sur le côté commun (comme plus haut  $abc$  et  $cbd$ ) — la somme de tous les tétraèdres au sommet commun  $p$  et avec bases dans les faces du polyèdre sera indépendante de la position de  $p$ . Si, en effet, on déplace  $p$  sur un autre point  $q$ , la différence entre les deux sommes correspondantes sera la suivante

$$\frac{1}{6} (\widehat{bc} + \widehat{ca} + \widehat{ab} + \widehat{cb} + \widehat{bd} + \widehat{dc} + \dots) (p - q) ,$$

où les termes dans la parenthèse s'annulent deux à deux de sorte que la somme est égale à zéro.

Il sera donc naturel de définir le nombre-mesure pour le volume du polyèdre conformément au parcours choisi sur la surface, c'est-à-dire comme la somme des tétraèdres énumérés  $abcp, cbdp, \dots$ ; ici on peut, bien entendu, choisir  $p$  à l'origine aussi bien qu'en n'importe quel autre point.

Il en résulte que les nombres-mesure ainsi définis sont invariables pendant tout déplacement.

36. — Si les faces du polyèdre ne sont pas des triangles mais des polygones, on peut diviser chacun de ces polygones  $abcde$  en un système de triangles  $abs, bcs, cds, des, eas$ ,  $s$  étant un point quelconque dans le plan du polygone. On reconnaît que la position de  $s$  dans le plan n'influencera aucunement le nombre-mesure pour le volume.

Finalement on vérifie sans difficulté que le nombre-mesure pour le volume d'un polyèdre composé de deux autres est égal à la somme des nombres-mesure pour les volumes de ces deux polyèdres.

37. — *Formules contenant 3 ou 4 vecteurs.* — Nous cherchons d'abord une formule pour  $\overbrace{abc}$ . Si  $b$  et  $c$  sont sur la même droite, l'expression est égale à zéro; si  $a$  et  $\widehat{bc}$  sont sur la même droite, l'expression est aussi égale à zéro. Dans les autres cas on obtient un vecteur situé dans le plan de  $b$  et  $c$  de sorte qu'on peut poser

$$\overbrace{abc} = \lambda b + \mu c .$$

En multipliant par  $a$  on aura

$$0 = \lambda ab + \mu ac ,$$

d'où l'on reconnaît que  $\lambda$  et  $\mu$  sont proportionnels à  $ac$  et  $-ab$ . On peut donc poser  $\lambda = \alpha ac$  et  $\mu = -\alpha ab$ , c'est-à-dire

$$\overbrace{abc} = \alpha ((ac) b - (ab) c) .$$

Reste à trouver le scalaire  $\alpha$ ; on trouve par un calcul direct  $\alpha = 1$ .

Nous avons donc trouvé cette formule

$$\overbrace{abc} = (ac) b - (ab) c ,$$

ou

$$\overbrace{abc} = \begin{vmatrix} b & c \\ ab & ac \end{vmatrix} , \quad (\text{I})$$

qui — comme on le reconnaît sans difficulté — est valable aussi pour les cas spéciaux mentionnés plus haut.

On en déduit

$$\widehat{ab} \cdot \widehat{cd} = \widehat{\widehat{ab} cd} = \widehat{cd} \widehat{\widehat{ab}} = c \cdot \overbrace{d ab} ,$$

d'où à l'aide de (I)

$$\widehat{ab} \cdot \widehat{cd} = \begin{vmatrix} ac & bc \\ ad & bd \end{vmatrix} . \quad (\text{II})$$

Nous trouvons finalement à l'aide de (I)

$$\overbrace{\widehat{ab} \widehat{cd}} = \left| \begin{array}{cc} c & d \\ \widehat{ab} \cdot c & \widehat{ab} \cdot d \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cc} c & d \\ \widehat{abc} & \widehat{abd} \end{array} \right| . \quad (\text{III})$$

38. — Deux droites orientées suivant les vecteurs-unité  $a$  et  $b$  déterminent — comme dans le plan — un angle  $(a, b)$  dont le cosinus est défini par la relation

$$\cos (a, b) = ab.$$

Le sinus de l'angle dépend du vecteur normal  $n$  pour le plan dans lequel est situé l'angle; il est défini par la relation

$$\sin (a, b) = \frac{\widehat{ab}}{n}.$$

La dernière définition renferme comme cas particulier celle qui a été donnée pour le plan  $xy$ ; car pour  $n = (0, 0, 1)$ ,  $a = (a_1, a_2, 0)$  et  $b = (b_1, b_2, 0)$ , la formule devient

$$\sin (a, b) = \frac{\widehat{ab}}{n} = a_1 b_2 - a_2 b_1.$$

Soient deux plans orientés, leur intersection étant dirigée suivant le vecteur-unité  $e$ . L'angle que forment ces deux plans est défini par l'angle que forme le vecteur normal au premier plan avec le vecteur normal au second plan, le plan de cet angle étant orienté conformément au vecteur  $e$ . Le cosinus et le sinus de l'angle en question sont donc complètement déterminés.

39. — Un trièdre dont les arêtes sont des vecteurs-unité  $A, B, C$  détermine un triangle sphérique  $ABC$  dont les côtés sont  $(B, C) = a$ ,  $(C, A) = b$  et  $(A, B) = c$ . Ils correspondent à des orientations données dans les plans, donc à des vecteurs normaux. Les angles  $A, B, C$  du triangle sphérique sont les angles entre les plans de façon que

$$\begin{aligned} 180^\circ - A &\text{ est l'angle de } CA \text{ à } AB \\ 180^\circ - B &\text{ " " " } AB \text{ " } BC \\ 180^\circ - C &\text{ " " " } BC \text{ " } CA, \end{aligned}$$

ces angles étant orientés conformément aux vecteurs  $A, B, C$  comme il a été mentionné ci-dessus. On a maintenant (nº 37, II)

$$\widehat{BC} \cdot \widehat{CA} = \begin{vmatrix} BC & BA \\ C^2 & CA \end{vmatrix},$$

donc

$$-\sin a \sin b \cos C = \begin{vmatrix} \cos a & \cos c \\ 1 & \cos b \end{vmatrix}$$

ou

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C,$$

c'est-à-dire la formule générale des cosinus.

En appliquant la formule III, n° 37, nous avons

$$\frac{\widehat{BC}}{\widehat{CA}} = \begin{vmatrix} C & A \\ 0 & \widehat{BCA} \end{vmatrix} = C \cdot \widehat{BCA},$$

ou

$$C (\sin a \sin b \sin C) = C \cdot \widehat{ABC}$$

$$\sin a \sin b \sin C = \widehat{ABC},$$

ce qui constitue la formule des sinus dans l'espace. En exécutant un mouvement circulaire en A, B, C on obtient

$$\sin b \sin c \sin A = \sin c \sin a \sin B = \sin a \sin b \sin C$$

ou par division par  $\sin a \sin b \sin c$

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c},$$

ce qui représente la formule des sinus pour le triangle sphérique.

Ces deux formules constituent la base de la trigonométrie sphérique.

### III. L'ESPACE ARITHMÉTIQUE.

40. — Dans ce qui précède nous avons introduit toute l'analyse calculatoire pour étudier la géométrie de la chambre; maintenant nous allons élargir cette analyse de façon à y renfermer tous les nombres réels, qu'ils soient grands ou petits, rationnels ou irrationnels. Nous définissons en effet comme suit:

Un point arithmétique est un ensemble de nombres  $(a_1, a_2, a_3)$  où  $a_1, a_2$  et  $a_3$  sont des nombres réels arbitraires (les coordonnées du point). Le point O (0, 0, 0) s'appelle l'origine. Un ensemble de deux points arithmétiques  $a$  et  $b$  pris dans cet ordre, s'appelle un vecteur  $\overline{ab}$ ; le vecteur  $\overline{Oa}$  est cependant désigné par la lettre  $a$  seule. Chaque vecteur  $a$  détermine une translation, c'est-à-dire

une transformation qui déplace le point  $(x_1, x_2, x_3)$  sur le point correspondant  $(x_1 + a_1, x_2 + a_2, x_3 + a_3)$ . La somme et la différence de deux vecteurs se définissent comme plus haut, d'où résulte  $\overline{ab} = b - a$ . On multiplie un vecteur  $a$  par un scalaire  $\lambda$  en multipliant ses coordonnées par  $\lambda$ . Une droite est définie par le point variable  $x = a + \lambda b$ , où  $a$  et  $b$  sont deux vecteurs fixes tandis que  $\lambda$  est un paramètre arbitrairement variable. On définit le produit  $ab$  par la relation

$$ab = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

et des vecteurs perpendiculaires l'un à l'autre par la condition  $ab = 0$ . Un plan est défini par la représentation paramétrique  $x = a + \lambda b + \mu c$ , où  $a, b$  et  $c$  sont des vecteurs fixes,  $\lambda$  et  $\mu$  sont des paramètres. Le vecteur viré  $\widehat{ab}$  de deux vecteurs  $a$  et  $b$  est défini par

$$\widehat{ab} = (a_2 b_3 - a_3 b_2, \quad a_3 b_1 - a_1 b_3, \quad a_1 b_2 - a_2 b_1).$$

La distance entre deux points  $a$  et  $b$  est définie par  $\sqrt{(a - b)^2}$ , les aires et les volumes comme précédemment ainsi que les notions trigonométriques.

Il est immédiatement évident que tous les résultats et locutions antérieurs sont applicables dans notre domaine élargi (l'espace arithmétique).

41. — Nous ferons, en dernier lieu, encore cette remarque que la transition au domaine encore plus général qu'est le domaine complexe est fort simple. Toutes les définitions et locutions s'appliquent directement avec la réserve qu'il faut prendre, comme dans le plan (voir article 2) pour les vecteurs à longueur zéro, c'est-à-dire tous les vecteurs  $(k_1, k_2, k_3)$  où  $k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 = 0$ . Les droites qui contiennent de tels vecteurs s'appellent des lignes isotropes; elles n'ont pas de vecteur d'orientation et doivent donc être exclues des recherches dans lesquelles celui-ci est indispensable, telles que les recherches sur les relations trigonométriques qui d'ailleurs, à part cette exception, s'appliquent au domaine complexe sans aucune modification.