

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 39 (1942-1950)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Kapitel: Réunion de Sion, 30 août 1942.

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 01.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Réunion de Sion, 30 août 1942.

La Société mathématique suisse a tenu sa 31^e assemblée annuelle à Sion, le 30 août 1942, en même temps que la 122^e session de la Société helvétique des Sciences naturelles. Les communications scientifiques, au nombre de onze, ont fait l'objet de deux séances présidées par M. le professeur G. DE RHAM, vice-président, en remplacement de M. le professeur B. BUCHNER, président, empêché par un service militaire.

1. — P. NOLFI (Zurich). *Exposé de phénomènes stochastiques à l'aide de la théorie des probabilités.* — L'application de la théorie des probabilités aux problèmes de la statistique se heurte à de grosses difficultés. C'est ainsi que les problèmes pratiques ne mènent pas à des probabilités qui sont en tout cas les mêmes, comme l'exige la théorie. Les nombreuses propositions ayant en vue l'élimination de ces insuffisances de la théorie sont encore fort discutées. En outre, l'exposé courant de la théorie des probabilités de phénomènes statistiques donne toujours lieu à des contradictions logiques, ainsi par exemple en ce qui concerne le choix de l'unité de temps. Par une autre interprétation de l'événement réel, qui tient aussi compte des découvertes les plus récentes relatives à la réalité effective, on acquiert un exposé mathématique qui ne présente précisément plus les imperfections mentionnées. En vertu de cette interprétation, une probabilité déterminée est adjointe à chaque phénomène présomptif pour chaque moment de son apparition possible. Par un passage à la limite, sur la base duquel sont établies les probabilités continues, on acquiert sous réserve de l'observation des règles générales de l'enchaînement, suivant la manière dont est posé le problème, des expressions mathématiques générales, qui permettent de trouver les probabilités cherchées pour n'importe quel genre d'ensembles statistiques. En examinant les cas spéciaux, on trouve des formules connues, comme par exemple celle de Poisson pour l'évaluation de la probabilité d'événements rares qui, sous ce rapport, apparaît comme solution exacte d'un problème déterminé, c'est-à-dire par conséquent des résultats auxquels sont arrivés par d'autres moyens Borel, Lundberg et Khinchine. Les résultats obtenus en mathématiques d'assurance à l'aide de la conception de l'intensité ressortent également, comme cas spéciaux, de cette façon générale d'envisager la question.

2. — Alexandre PREISSMANN (Bâle). *Quelques propriétés globales des espaces de Riemann.* — Alors que les propriétés globales (connexion topologique : allure des géodésiques, etc.) des surfaces dont la courbure garde un signe constant commencent à être bien connues ; il n'en est pas de même des espaces de Riemann. La présente communication est une contribution à l'étude des espaces de Riemann de courbure partout *négative*. Nous sommes parvenus à démontrer dans ce cas les théorèmes suivants :

I. Un espace de Riemann dont le groupe fondamental est cyclique possède au plus une géodésique fermée et dans le cas général il existe au plus une géodésique fermée de chaque classe d'homotopie.

II. Si une géodésique fermée fait partie de la classe d'homotopie a , tous les sous-groupes abéliens du groupe fondamental qui contiennent a sont des groupes cycliques.

III. Tous les sous-groupes abéliens d'un espace *fermé* sont cycliques.

Ce dernier théorème montre en particulier que le produit topologique de deux variétés fermées ne saurait être métrisé par une métrique de courbure partout négative.

Ces théorèmes s'appliquent au cas particulier des formes spatiales hyperboliques.

3. — B. ECKMANN (Zurich). *Solutions continues de système d'équations linéaires.* — Dans un système

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} x_k = 0, \quad i = 1, \dots, m < n \quad (1)$$

de m équations linéaires homogènes à n inconnues, nous donnons aux coefficients a_{ik} toutes les valeurs réelles pour lesquelles la matrice (a_{ik}) a le rang m . Nous cherchons une solution valable et continue pour toutes ces valeurs des coefficients et qui ne soit jamais triviale, c'est-à-dire un système de fonctions $x_k = f_k (a_{11}, \dots, a_{nm})$ réelles et continues de ces coefficients qui satisfassent, pour toutes les valeurs admises, aux relations $\sum a_{ik} f_k = 0$, et qui ne s'annulent jamais simultanément. Nous appelons ceci *une solution continue du système* (1). Alors notre problème s'énonce ainsi : Pour quels nombres n et m le système a-t-il une solution continue ?

Des cas particuliers de telles solutions nous sont donnés (pour $m = n - 1$ et pour $m = 2, n = 7$) par le produit vectoriel connu de m vecteurs dans l'espace à n dimensions ; également on connaît une solution particulièrement simple pour $m = 1$ et n pair. On peut, par contre, en se basant sur des théorèmes topologiques simples,

démontrer qu'il n'y a pas de solutions continues lorsque $n - m$ est pair. Mais la réponse complète à notre question nous est inconnue, et elle ne semble pas être simple pour les cas restants ($n - m$ impair et $m \geq 2$). Pourtant nous pouvons, à l'aide de méthodes topologiques moins élémentaires, démontrer que le système n'a pas de solutions continues pour $n - m = 3$ ou 7 et $m \geq 2$.

La démonstration de ce théorème se base sur la théorie générale des espaces fibrés et comprend surtout la détermination de quelques groupes d'homotopie de certaines variétés $V_{n,m}$ (ce sont les variétés de toutes les matrices orthogonales à n colonnes et m lignes); par exemple le troisième groupe d'homotopie de $V_{5,3}$ est cyclique d'ordre infini, et le septième de $V_{9,3}$ est cyclique d'ordre 4. Les représentations continues des sphères, les propriétés d'homotopie des groupes orthogonaux et le parallélisme bien connu sur les sphères à trois et sept dimensions y jouent un certain rôle. D'ailleurs, tout notre problème a de nombreux rapports avec des questions topologiques et algébriques actuelles, entre autres avec la suivante: sur quelles sphères est-il possible d'introduire une multiplication continue (comme celle dans un groupe, mais pas nécessairement associative), possédant un élément unité? Nous reviendrons sur ces questions ainsi que sur les détails des énoncés et des démonstrations dans un travail en préparation. (Le mémoire paraîtra dans les *Comment. Math. Helv.*, vol. 15.)

4.— Heinz HOPF (Zurich). *Sur les espaces qui admettent des groupes de transformations avec un domaine fondamental compact.* — Pour une variété ouverte, on peut définir d'une manière naturelle les « points à l'infini » (H. FREUDENTHAL, *Math. Zeitschrift*, 33, 1931, 692-713). Avec les méthodes du travail cité de Freudenthal, le théorème suivant se laisse facilement démontrer:

Une variété ouverte, qui admet un groupe discontinu de transformations topologiques avec un domaine fondamental compact, possède ou bien un point à l'infini, ou bien deux points à l'infini, ou bien un ensemble de points à l'infini de la puissance du continu.

En particulier, une variété de recouvrement régulière d'une variété close est ou bien close ou bien du type décrit. Par exemple, la sphère à n dimensions pointée trois fois ne peut pas se présenter comme variété de recouvrement universelle d'une variété close — c'est la réponse à une question posée il y a longtemps par M. Threlfall qui fut à l'origine de la recherche discutée ici.

Ce théorème possède, dans la ligne de la théorie de l'homotopie de Hurewicz, le corollaire suivant:

Le deuxième groupe d'homotopie d'une variété close à trois dimensions ou bien se réduit à zéro, ou bien est cyclique infini, ou bien est la somme directe d'une infinité dénombrable de groupes cycliques infinis.

5. — H. HADWIGER (Berne). *Sur la convergence et une extension du théorème d'Abel.* — Dans la théorie des procédés de limitation il est indiqué d'adopter un formalisme permettant de concevoir d'un point de vue unique les suites et les fonctions. Les suites sont subordonnées aux fonctions, en ce sens qu'une suite est représentée par une *fonction en escalier*. La suite est alors convergente ou divergente en même temps que la fonction correspondante. Afin de caractériser le comportement d'une fonction $F(t)$ d'un paramètre réel t lorsque celui-ci tend vers la frontière supérieure r de l'intervalle dans lequel $F(t)$ est définie, on introduit la notion de « valeur finale » (Endwert). Le nombre complexe a est dit valeur finale de $F(t)$ pour t tendant vers r , lorsque pour un domaine circulaire quelconque $U(a)$ de centre a , et un intervalle quelconque $V(r)$ à la gauche de r , il existe toujours une valeur de t contenue dans $V(r)$, telle que la valeur correspondante $F(t)$ soit comprise dans $U(a)$.

La fonction $F(t)$ prend des valeurs différant de a d'autant peu qu'on veut, un nombre infini de fois, lorsque t tend vers r .

Considérons l'ensemble A des valeurs finales (Endwertmenge). Nous proposons la classification suivante, basée sur la nature de l'ensemble A , en ce qui concerne le comportement de la fonction $F(t)$ lorsque t tend vers r . Il est dit :

- a) déterminé (bestimmt) ou indéterminé (unbestimmt) selon que l'ensemble A se compose d'un ou de plusieurs points;
- b) convergent ou divergent selon que l'ensemble A est borné ou non.

Il en résulte quatre possibilités du comportement de $F(t)$: 1) déterminé convergent; 2) indéterminé convergent; 3) déterminé divergent; 4) indéterminé divergent.

Sur ces considérations se fonde la perspective d'une extension du théorème d'Abel (Abelscher Stetigkeitssatz).

Soit la série entière

$$F(t) = \sum_0^{\infty} a_n t^n$$

convergente dans un cercle de rayon 1 et telle que

$$a_n = 0 \left(\frac{1}{n} \right).$$

Pour que la série $\sum_0^{\infty} a_n$ converge vers l'ensemble des valeurs finales A , il faut et il suffit que la fonction $F(t)$ converge également vers A lorsque t tend vers 1.

Dans ce théorème, il n'est pas possible de remplacer comme dans la réciproque du théorème classique la condition o par une condition O.

6. — R. WAVRE (Genève). *Sur les opérateurs hermitiens et la décomposition spectrale.* — Nous indiquerons ici, en résumé, les développements donnés à notre note de la séance de Bâle. On trouvera plus de détails dans trois notes parues entre temps dans le *Compte rendu des séances de la Société de Physique et d'Histoire naturelle de Genève*, 1940.

Soit $A(f)$ un opérateur hermitien supposé défini pour tout élément f_0 d'un espace E isomorphe de l'espace d'Hilbert et de l'espace fonctionnel. Soient $A^r(f)$ ses itérés. Nous les normalisons, en posant:

$$l_0 l_1 l_2 \dots l_r f_r = A^r(f_0) ; \quad l_0 = \|g_0\|, \quad \|g_r\| = 1 ; \\ \text{pour } r = 1, 2, \dots .$$

on a les relations de Kellogg

$$0 \leq l_1 \leq l_2 \leq l_3 \leq \dots .$$

Nous posons:

$$l = \lim l_r ; \quad \varpi = l_0 \frac{l_1}{l} \frac{l_2}{l} \dots ;$$

on a

$$0 \leq \varpi(f_0) \leq l_0 .$$

Si l'opérateur est complètement continu l'on a dans tout E , $\varpi \neq 0$; mais cette dernière condition est plus générale et répond à des opérateurs qui recouvrent une partie de la théorie des équations intégrales singulières. On a, en effet, les propriétés suivantes:

I. Si $\varpi(f_0) \neq 0$, les itérés f_{2r} convergent fortement vers une limite f de E qui est solution de l'équation homogène

$$A^2(f) = l^2 f ;$$

nous dirons que f est solution propre, l est donc une valeur propre. Si $\varpi(f_0) = 0$, les itérés f_r convergent faiblement vers zéro.

II. Si $f = \varphi + \psi$, des trois nombres l liés à f , φ , ψ , aucun n'est supérieur aux deux autres.

III. Soient ν_i une suite de valeurs propres distinctes, ν leur borne supérieure, et ψ_i les vecteurs propres correspondants. Posons:

$$\varphi = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \psi_i ; \quad \sum |a_i|^2 \text{ convergente} ; \quad \text{alors } l(\psi) = \nu .$$

Si $\nu = \nu_i$, borne atteinte, $\varpi(\psi) \neq 0$, sinon $\varpi(\varphi) = 0$. Il résulte de là que pour un opérateur où $\varpi \neq 0$ dans tout E , les valeurs propres peuvent être « bien ordonnées » par ordre de grandeurs

décroissantes. Elles forment donc une suite numérotable au moyen d'une infinité dénombrable d'ordinaux transfinis de Cantor de la classe II.

IV. La parenthèse indiquant le produit scalaire, on a $(f, f_0) = \varpi(f_0)$ et $f_0 - \varpi(f)/f$ est orthogonal à f . Si g est un vecteur propre quelconque et si f_0 est orthogonal à g , tous les itérés f_r sont orthogonaux à g ainsi que leur limite forte (ou faible). Ces lemmes précisés, voici comment peut se faire une décomposition d'un élément quelconque $f = f_0^0$ suivant les éléments propres pour un opérateur à $\varpi \neq 0$. On posera :

$$f_0^0 = \varpi(f_0^0) f_0^0 + f_0^1, \dots, \quad f_0^\alpha = \varpi(f_0^\alpha) f_0^\alpha + f_0^{\alpha+1}, \dots$$

transfiniment s'il le faut $\alpha = 1, 2, 3, \dots \omega, \omega + 1, \dots 2\omega, 2\omega + 1 \dots$. On a $l^{\alpha+1} < l^\alpha$, pour les valeurs propres liées aux f^α . Puis :

$$f = \sum_\alpha \varpi(f_0^\alpha) f_0^\alpha + h, \quad (1)$$

$$A^2(f) = \sum_\alpha l^{\alpha 2} \varpi(f_0^\alpha) l^\alpha, \quad (2)$$

h étant un antécédent de zéro : $A(h) = 0$. Ainsi nous mettons en évidence directement les fonctions f^α en lesquelles f se décompose effectivement, et des restes successifs f_0^α .

Si, poursuivant la réduction, l'un des restes est nul, alors $h = 0$, la réduction s'arrête d'elle-même ; dans le cas contraire seulement on a $\lim l^\alpha = 0$. Dans le cas des opérateurs complètement continus, il n'y a pas lieu d'introduire les nombres transfinis et l'on a $\lim l^n = 0$ dans le cas où il y a une infinité de valeurs propres.

Donc, la décomposition spectrale d'un élément de E peut se faire, pour tout opérateur « régulier » ($\varpi \neq 0$) par simple itération de cet élément et de ses restes successifs. Dans le cas des opérateurs complètement continus (1) exprime le théorème d'Hilbert-Schmidt de la théorie des équations intégrales.

Si l'on considère maintenant l'équation linéaire non homogène :

$$\varphi = f + \frac{1}{\nu} A(\varphi), \quad \text{on a} \quad \varphi = f^\alpha + \frac{1}{\nu^2} A^2(\varphi), \quad \text{avec} \quad f^\alpha = f + \frac{1}{\nu} A(f). \quad (3)$$

Une solution est donnée par :

$$\varphi = f^\alpha + \sum_\alpha \frac{l^{\alpha 2} f^{\alpha\alpha}}{\nu^2 - l^{\alpha 2}} f^\alpha, \quad \text{avec} \quad f^\alpha = \sum_\alpha f^{\alpha\alpha} f^\alpha + h, \quad A(h) = 0; \quad (4)$$

α parcourant encore ici la suite (éventuellement transfinie) des valeurs α . Si $|\nu|$ est différent des l^α et de leur point d'accumulation, (4) fournit la solution de (1), qui est unique. Si $|\nu|$ répond à une valeur propre qui n'est pas un l^α , alors on peut ajouter à φ tout élément propre de valeur propre ν . Si $|\nu|$ est point d'accumulation des l^α sans que $|\nu|$ soit un l^α , alors la série (4) fournit encore une solution, pourvu que la série suivante converge :

$$\sum_{\alpha} \left| \frac{f^{x\alpha}}{|\nu| - l^\alpha} \right|^2.$$

Et si ν est une valeur propre autre qu'un des l^α , alors on peut encore ajouter la solution la plus générale correspondant à ν .

Avec le paramètre habituel de Fredholm, on aurait donc

$$\varphi(\lambda) = f^x + \lambda^2 \sum_{\alpha} \frac{f^{x\alpha}}{\lambda_\alpha^2 - \lambda^2} f^\alpha,$$

en λ cette solution admet comme seules singularités, les pôles λ_α et les points singuliers limites des pôles, correspondant à l'épuisement d'une suite dans les transfinis. Ces singularités seront, au total, encore numérotables par les ordinaux transfinis de classe II. M. J.-P. Vigier a étendu cette méthode aux opérateurs hermitiens gauches et a reconstruit de cette manière, très rapide, les développements en série de fonctions biorthogonales. Notre méthode permet donc de retrouver très rapidement une grande partie de la théorie des équations intégrales et de la théorie des systèmes d'équations linéaires à matrices hermitiennes et se trouve dépouillée de tout appareil algébrique.

Il est intéressant aussi d'étudier les fonctionnelles $l(f)$ et $\varpi(f)$ qui sont semi-continues dans tout l'espace E.

7. — Max GUT (Zurich). *Zur Theorie der Klassenkörper der Kreiskörper, insbesondere der Strahlklassenkörper der quadratisch-imaginären Zahlkörper.* — Paraîtra dans les *Commentarii Mathematici Helvetici*, vol. 15.

8. — Sophie PICCARD (Neuchâtel). *Intersection d'un ensemble linéaire parfait avec l'une quelconque de ses translations.*

9. — Ed. BATSCHELET (Bâle). *Ueber den absoluten Betrag der Wurzeln algebraischer Gleichungen.*

10. — E. STIEFEL (Zurich). *Ueber die Berechnung der Charaktere in kontinuierlichen Gruppen.*

11. — K. BLEULER (Genf). *Ueber die Positivität von Green'schen Funktionen.*