**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
**Band:** 39 (1942-1950)
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Kapitel:** Réunion de Bâle, 6 et 7 septembre 1941.

**Nutzungsbedingungen**
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

**Conditions d'utilisation**
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

**Terms of use**
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

**Download PDF:** 17.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch**

# SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE SUISSE

## Conférences et communications.

*Réunion de Bâle, 6 et 7 septembre 1941.*

---

La Société mathématique suisse a tenu sa trentième assemblée annuelle à Bâle, les 6 et 7 septembre 1941, sous la présidence de M. le professeur L. KOLLROS, président, en même temps que la 121me session annuelle de la Société helvétique des Sciences naturelles.

Dans sa *séance administrative*, la Société a constitué comme suit son Comité pour les années 1942 et 1943: MM. les professeurs P. BUCHNER (Bâle), président; G. DE RHAM (Lausanne), vice-président; M. GUT (Zurich), secrétaire-caissier.

La *partie scientifique* a été consacrée aux communications ci-après, réparties sur trois séances.

1. — Karl MERZ (Chur). *Kreuzhaube erweitert nach Boy* (Calotte polyédrique d'après Boy). — Eine einfache Kreuzhaube [1] besitzt eine Doppelstrecke SO $\equiv$ 5, wobei S die gemeinsame Spitze ist, von den beiden an SO in Scheitellage anstossenden dreiseitigen Pyramiden, und O der Schnitt der beiden Diagonalen des Quadrates, auf dem über zwei Scheiteldreiecken die beiden Pyramiden errichtet sind. Wird das unter jenem Quadrat ansetzende Prisma noch durch seine Grundfläche abgeschlossen, so ist das entstandene Polyeder als 11-Flach mit $e = 10$, $k = 20$, also $c = 1$, eine Abbildung der projektiven Ebene, wobei S und O singuläre Punkte sind, als Endpunkte der Doppelstrecke.

Diese Kreuzhaube soll nun so erweitert werden, dass dadurch am Polyeder eine Selbstdurchdringung entsteht, die einen einfachen geschlossenen Streckenzug bildet, so dass keine Endpunkte mehr an der Durchdringung bestehen. Um dies zu erzielen, sind zu der Doppelstrecke OS $\equiv$ 5 noch weitere Doppelstrecken anzufügen, z. B. ST $\equiv$ 9 und TO $\equiv$ 3, womit das Doppelstreckendreieck SOT entsteht. Um dabei die neue Doppelstrecke 9 zu erhalten, hat man die in 9 als

---

[1] K. MERZ, Kreuzhaube aus verschiedenen Netzen. *Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich*, LXXXV, 1940 (Seite 51).

Kante zusammenstossenden beiden Flächen A und E über 9 hinaus zu erweitern und dann noch mittels zwei abschliessenden Flächen eine neue Scheitelzelle aussen längs 9 anzufügen. Längs 3 entsteht, auf entsprechende Weise, eine innere Hohlzelle, die in Scheitellage ist zu einer äussern Lücke der Kreuzhaube. Von diesem geschlossenen Polyeder, $f = 15$, $e = 14$, $k = 28$, also auch mit $c = 1$, mit dem Dreieck SOT als Selbstdurchdringung, lässt sich ein Netz herstellen (Vorweisung). Bei der Aufklappung dieses Netzes zum 15 Flach tritt die Eigentümlichkeit ein, dass die dabei entstehenden Wendestrecken, in denen Ober- und Unterseite des Netzes aneinanderstossen und damit die Einseitigkeit herbeiführen, zugleich in die Doppelstrecken fallen. Das Dreieck SOT der Doppelstrecken entspricht damit der unendlich fernen Geraden, welche die Wendegerade der projektiven Ebene ist, und es entspricht daher zugleich auch der Selbstdurchdringung dieser Ebene. Diese durch die erweiterte Kreuzhaube erhaltene Abbildung der projektiven Ebene hat allerdings noch die drei singulären Punkte S, O, T, die aber von einfacherer Art sind als die sechs singulären Punkte am Heptaeder, in denen die drei Doppelstrecken als Selbstdurchdringungen endigen. Ausserdem fehlt der dreifache Punkt, wie er am Heptaeder auftritt. Doch tritt dafür eine Hohlzelle auf. Dieses Polyeder kann als Zugang zu einer neuen Boy'schen Fläche dienen.

2. — M. Diethelm (Rickenbach, Schwyz). *Ein kurzer Weg zur Entwicklung der Hyperbelfunktionen.* — L'auteur indique un moyen rapide et élémentaire permettant de présenter, dans une première étude, les propriétés essentielles des fonctions hyperboliques en partant de l'hyperbole et du secteur hyperbolique. Analogies entre les fonctions hyperboliques et les fonctions circulaires.

3. — Julien Malengreau (Montreux). *Euclide ou Pythagore ? (Dissertation sur le continu et le discontinu.)* — Pythagore considérait la droite comme une somme de points. Cette conception a été abandonnée depuis la découverte des irrationnelles. Les données qui servent de base à la géométrie d'Euclide présupposent que les figures appartiennent à un espace continu, aussi la géométrie classique fondée sur la méthode euclidienne ne fait-elle aucune allusion à l'espace discontinu. L'auteur se propose de montrer qu'il s'agit là d'une lacune à combler et dans ce but il examine de près la théorie de l'évaluation des grandeurs. Cette théorie est basée sur la notion de limite dont l'emploi ne se justifie cependant qu'en cas de nécessité absolue. Il est donc indispensable de commencer la géométrie par la recherche du plus vaste des ensembles de points tel que ses grandeurs puissent toutes être évaluées au moyen de la seule notion de commune mesure. Cet ensemble est un espace discontinu auquel l'auteur a donné le nom d'espace rationnel.

L'évaluation des grandeurs de l'espace rationnel est basée sur la relation de Stewart que l'auteur établit en partant des conditions auxquelles il faut satisfaire pour obtenir la compatibilité des postulats nécessaires à la construction de cet espace. La relation de Stewart devient ainsi la garantie de stabilité de tout l'édifice euclidien.

L'espace rationnel jouit d'une propriété remarquable d'après laquelle non seulement les longueurs d'une même droite sont toujours entre elles dans un rapport rationnel, mais aussi les surfaces d'un même plan, les volumes d'un même espace à trois dimensions, etc.

Ce n'est qu'après l'étude de cet espace discontinu que l'on devrait commencer celle de l'espace continu; composé de l'ensemble de tous les espaces rationnels simultanément possibles en vertu du postulat de continuité adopté. Cette seconde étude peut se faire à l'aide de la notion de limite dont l'emploi est alors justifié du fait qu'avec l'étude de l'espace rationnel on a utilisé la notion de la commune mesure dans toute l'étendue possible.

L'auteur montre que la nécessité de commencer la géométrie par l'espace discontinu apparaît encore au cours de la résolution des problèmes que pose la recherche des fondements de la géométrie. C'est parce qu'on a toujours abordé le côté mathématique de cette question, en partant de l'espace continu qu'elle a fini par apparaître inextricable. En réalité la réponse à cette question s'identifie tout simplement à la géométrie même, lorsque celle-ci est bien ordonnée, c'est-à-dire commence par l'édification point par point de l'espace rationnel. La considération de cette identité permet à l'auteur d'affirmer que c'est la possibilité de la géométrie classique qui entraîne celle de la géométrie analytique et non pas l'inverse, comme on l'a supposé avec le professeur Hilbert.

4. — Johann Jakob BURCKHARDT (Zurich). — *Les œuvres posthumes de Ludwig Schläfli.* — Résumé d'un rapport sur la classification et l'élaboration d'un catalogue des œuvres posthumes de Ludwig Schläfli, qui doit être publié, avec une Table des matières et une Note sur les travaux de Schläfli relatifs à la Théorie des formes quadratiques, dans les *Mitteilungen der Berner Naturforschenden Gesellschaft.*

Les œuvres posthumes ont été classées sur la base du relevé de Graf (*Mitt. der Berner Naturf. Ges.*, 1896) avec l'aide de la Fondation *Escher-Abegg.* Nous avons trouvé des manuscrits méritant une mise au point dans les domaines suivants: 1. Théorie des surfaces du troisième ordre. — 2. 25 cahiers de géométrie. — 3. 12 cahiers sur la théorie d'Hermite des équations modulaires. — 4. Théorie des formes quadratiques.

5. — Louis KOLLROS (Zurich). — *Généralisation des théorèmes de Miquel et Clifford.* — Cinq droites d'un plan, prises quatre à quatre,

déterminent cinq paraboles dont les foyers sont sur un cercle (théorème de Miquel). Ce cercle est le lieu géométrique des points P tels que les pieds des perpendiculaires abaissées de P sur les cinq droites données et le point P lui-même soient sur un conique. Pour les points de Miquel, cette conique dégénère en deux droites.

Six droites d'un plan, prises cinq à cinq, déterminent six cercles de Miquel; ces six cercles passent par un point; sept droites, prises six à six, déterminent sept de ces points qui sont sur un cercle, et ainsi de suite (théorème de Clifford, *Math. Papers*, p. 38). Les cercles de Clifford peuvent aussi être définis comme lieux géométriques; on trouve le résultat suivant:

*On donne* $2n + 1$ *droites dans un plan; le lieu géométrique des points* P *tels que les pieds des perpendiculaires abaissées de* P *sur ces droites soient sur une courbe algébrique de degré* n *ayant en* P *un point multiple d'ordre* $n - 1$ *est un cercle.* Si on a $2n + 2$ droites, il n'y a qu'un point jouissant de cette propriété.

*Démonstration de deux formules de Steiner.* — Une conique est déterminée par son centre O et trois tangentes. Soient A, B, C les sommets du triangle formé par les trois tangentes, A′, B′, C′ les milieux des côtés opposés $a$, $b$, $c$. Les côtés du triangle A′ B′ C′ prolongés indéfiniment divisent le plan en sept parties: l'intérieur du triangle A′ B′ C′, les trois parties extérieures comprises dans les angles A′, B′, C′, les trois parties adjacentes aux côtés. La conique est une ellipse si le centre O est dans l'une des quatre premières parties, une hyperbole si O est dans l'une des trois dernières.

O est aussi le centre d'une conique circonscrite au triangle ABC; elle est toujours de même nature que la conique inscrite.

Si $r$ est le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC, si $x$, $y$, $z$ sont les distances de O aux côtés du triangle ABC et $x'$, $y'$, $z'$, les distances de O aux côtés du triangle A′ B′ C′, l'aire $E_i$ de l'ellipse inscrite est donnée par la formule:

$$E_i^2 = 4\pi^2 r x' y' z'$$

et l'aire $E_c$ de l'ellipse circonscrite, par:

$$E_c^2 = \pi^2 r \frac{x^2 y^2 z^2}{x' y' z'} .$$

Ces deux formules ont été indiquées sans démonstration par Steiner (*Œuvres complètes*, t. II, p. 329). On peut les démontrer en déterminant le produit des puissances des involutions des points conjugués sur les axes; on voit ainsi que si la conique est une hyperbole inscrite ou circonscrite au triangle ABC, chaque formule donne l'aire de l'ellipse qui a les mêmes axes que l'hyperbole (voir *Steiners Vorlesungen über synthetische Geometrie*, 2. Teil, bearbeitet von Schröter, Anhang, p. 556 à 564).

Mais on peut aussi transformer les formules en expressions invariantes par affinité en multipliant et divisant la première par $abc$ et la seconde par $a^2\, b^2\, c^2$. Si l'on désigne l'aire du triangle ABC par T ($= abc : 4r$) et les doubles des aires des triangles OBC, OCA, OAB respectivement par $t = ax$, $t' = by$, $t'' = cz$, on aura: $ax' = \mathrm{T} - t$, $by' = \mathrm{T} - t'$, $cz' = \mathrm{T} - t''$ et les deux formules deviendront:

$$\mathrm{E}_i^2 = \frac{\pi^2 (\mathrm{T} - t)(\mathrm{T} - t')(\mathrm{T} - t'')}{\mathrm{T}}, \qquad \mathrm{E}_c^2 = \frac{\pi^2 t^2 t'^2 t''^2}{4\mathrm{T}(\mathrm{T} - t)(\mathrm{T} - t')(\mathrm{T} - t'')}.$$

Il suffit alors de les démontrer pour le cercle inscrit ou le cercle circonscrit à un triangle, ce qui est élémentaire.

Une conique est aussi déterminée par son centre O et un triangle polaire ABC, mais elle n'est pas de même nature que la conique de même centre inscrite ou circonscrite à ABC; elle est imaginaire si O est à l'intérieur du triangle ABC; c'est une ellipse si O est en dehors et dans un des angles A, B, C; c'est une hyperbole si O est dans l'une des trois parties extérieures adjacentes aux côtés. Dans le cas de l'ellipse, l'aire $\mathrm{E}_p$ est donnée par la formule:

$$\mathrm{E}_p^2 = 2\pi^2 rxyz = \pi^2 \cdot \frac{tt' t''}{2\mathrm{T}}.$$

Mais dans tous les cas, la valeur absolue du produit des puissances des involutions des points conjugués sur les deux axes est $2rxyz$. On a donc toujours en valeur absolue:

$$\mathrm{E}_p^2 = \mathrm{E}_i\, \mathrm{E}_c$$

ou, si $\alpha$ et $\beta$ sont les demi-axes de la conique circonscrite, et $\alpha'$, $\beta'$ ceux de la conique inscrite:

$$2rxyz = \alpha\beta\, \alpha'\beta'.$$

En particulier, si la conique inscrite est un cercle de rayon $r'$, on a:

$$2rr' = \alpha\beta \qquad \text{et} \qquad \alpha + \beta = 2r.$$

Donc, les ellipses de centre O circonscrites à tous les triangles inscrits au cercle ($r$) et circonscrits au cercle ($r'$) sont égales.

6. — H. Hopf (Zurich). *Sur certaines relations entre la Théorie des Groupes et la Topologie.* — On sait que le premier groupe de Betti $\mathrm{B}^1$ d'un complexe est déterminé par son groupe fondamental G: il est le groupe quotient $\mathrm{G}/\mathrm{C}_\mathrm{G}$, où $\mathrm{C}_\mathrm{G}$ est le groupe des commutateurs (Kommutatorgruppe, ou groupe dérivé) de G. Les recherches communiquées ici concernent l'influence du groupe fondamental G sur le deuxième groupe de Betti $\mathrm{B}^2$.

THÉORÈME I: *A tout groupe* G *est attaché, par une opération algébrique bien déterminée, un groupe abélien* $G_1^*$; *si* G *est le groupe fondamental d'un complexe* K *et si* $S^2$ *est le sous-groupe de* $B^2$ *composé des classes d'homologie qui contiennent des images continues de la surface de la sphère, on a:*

$$B^2 / S^2 = G_1^* .$$

*Corollaire:* $G_1^*$ est image homomorphe de $B^2$; le deuxième groupe de Betti n'est donc en ce sens pas « plus petit » que le groupe $G_1^*$, qui est déterminé par le groupe fondamental.

*Complément au théorème I:* Pour chaque groupe G (avec un nombre fini de générateurs et de relations) il y a un complexe K dont le groupe fondamental est G et pour lequel $S^2 = 0$; $G_1^*$ est par suite la « borne inférieure exacte » des groupes $B^2$ qui sont compatibles, en tant que deuxièmes groupes de Betti, avec le groupe fondamental G.

Pour caractériser $G_1^*$ algébriquement, nous utilisons le procédé suivant de formation de groupes: F étant un groupe quelconque, R un sous-groupe de F, soit $C_F(R)$ le sous-groupe de F engendré par tous les éléments $x \,.\, r \,.\, x^{-1} \,.\, r^{-1}$ avec $x \varepsilon F$, $r \varepsilon R$; $C^2(F) = C_F$ est par exemple le groupe des commutateurs, $C_F(C_F) = C_F^2$ est le « deuxième groupe des commutateurs » de F.

THÉORÈME II: *Etant donné un homorphisme du groupe libre* F *sur le groupe* G *ou l'image inverse de l'élément unité de* G *est le sous-groupe invariant* R *de* F, *on a:*

$$G_1^* = (C_F \cap R) / C_F(R) .$$

Le fait que le groupe qui apparaît au second membre de cette isomorphie ne dépend pas des groupes F et R, mais seulement du groupe quotient F/R, donc seulement de G, constitue un théorème de théorie des groupes.

*Exemple:* Si G est le groupe abélien libre de rang $p$, $G_1^*$ est le groupe abélien libre de rang $\frac{p(p-1)}{2}$. On peut le voir géométriquement en se basant sur le théorème I ou algébriquement en se basant sur le théorème II.

Les groupes $C_F(R)$ jouent un rôle important dans la nouvelle théorie des groupes, en particulier dans des travaux de Hall, Magnus, Witt; il convenait de souligner ici la relation entre ce procédé de formation de groupes et des concepts topologiques.

Un exposé complet paraîtra dans les *Commentarii Mathematici Helvetici*, vol. 14, pp. 257-309.

7. — Pierre Humbert † (Lausanne). *Polyèdre sans singularités topologiques homéomorphe au plan projectif dans l'espace à trois dimensions.* (Présenté par H. Hopf, Zurich.) — Par des modifications apportées à un polyèdre que K. Merz a obtenu à partir de l'heptaèdre, un polyèdre est construit dans l'espace euclidien à trois dimensions, qui est un modèle du plan projectif dans le sens suivant: Il est l'image uniforme et continue du plan projectif, et chaque point du plan projectif possède un voisinage dans lequel la correspondance est *biunivoque.* Ce modèle possède la même symétrie que la surface connue de Boy et peut être considéré comme une approximation polyédrale de cette surface, qui est ainsi obtenue par une voie nouvelle et intuitive. La description exacte de ce modèle paraîtra dans les *Comment. Math. Helv.*, vol. 14, en même temps que la construction mentionnée de K. Merz.

8. — G. de Rham (Lausanne). *Sur une décomposition des chaînes d'un complexe.* — Soit un complexe à $n$ dimensions C, et soient $a_i^q$ $(i = 1, 2, \ldots, \alpha_q;\ 0 \leqslant q \leqslant n)$ ses cellules à $q$ dimensions, prises avec une orientation déterminée. On appelle produit scalaire des deux chaînes

$$c^q = \sum_i y_i a_i^q \quad \text{et} \quad d^q = \sum_i y_l a_i^q ,$$

le nombre

$$c^q \cdot d^q = \sum_i x_i y_i .$$

A toute chaîne $c^q$ correspond une chaîne à une dimension de moins, sa frontière $\mathfrak{F} c^q$, et une chaîne à une dimension de plus, $\mathfrak{D} c^{q-1}$, que nous appellerons sa cofrontière, selon l'expression proposée par M. Whitney.

Quelles que soient les chaînes $c^{q+1}$ et $c^q$, on a la relation

$$\mathfrak{F} c^{q+1} \cdot c^q = c^{q+1} \cdot \mathfrak{D} c^q . \tag{1}$$

Cette relation peut servir de définition de la cofrontière. On a d'ailleurs une définition équivalente en considérant le complexe réciproque de C; à chaque chaîne à $q$ dimensions de C correspond, comme on sait, une chaîne à $n - q$ dimensions du complexe réciproque, sa duale, et la cofrontière n'est pas autre chose que la duale de la frontière de la duale. On dit que la chaîne $c^q$ est fermée si $\mathfrak{F} c^q = 0$, cofermée si $\mathfrak{D} c^q = 0$, homologue à zéro s'il existe une chaîne $c^{q+1}$ telle que $\mathfrak{F} c^{q+1} = c^q$, cohomologue à zéro s'il existe une chaîne $e^{q+1}$ telle que $\mathfrak{D} c^{q-1} = c^q$. Nous appellerons *harmonique* toute chaîne à la fois fermée et cofermée. On a le théorème suivant:

*Toute chaîne* $c^q$ *peut être décomposée, d'une manière unique, en la somme d'une chaîne homologue à zéro, d'une chaîne cohomologue à zéro et d'une chaîne harmonique.*

La démonstration résulte très simplement de la formule (1), en remarquant que, pour qu'une chaîne soit cofermée, il faut et il suffit qu'elle soit orthogonale à toute chaîne homologue à zéro, et pour qu'elle soit fermée, il faut et il suffit qu'elle soit orthogonale à toute chaîne cohomologue à zéro. Deux chaînes sont dites orthogonales si leur produit scalaire est nul. On admet que le domaine des coefficients des chaînes est un corps; si la chaîne $c^q$ est à coefficients entiers, il peut arriver que les chaînes composantes ne soient pas à coefficients entiers.

Corollaire: *Dans chaque classe d'homologie de cycles, comme dans chaque classe de cohomologie de cocycles, il y a une chaîne harmonique et une seule.*

Ces propositions présentent une analogie parfaite avec la théorie des formes harmoniques sur un espace de Riemann, considérées par M. Hodge. Aux chaînes de dimension $q$ correspondent les formes différentielles extérieures de degré $q$, à l'opération $\mathfrak{D}$ correspond la dérivation extérieure, qui associe à chaque forme une autre forme de degré inférieur d'une unité; chaque forme $\omega$ de degré $q$ possède, dans un espace de Riemann à $n$ dimensions, une *forme adjointe* $\omega^*$ de degré $n - q$, analogue à la chaîne duale, ce qui permet de définir le produit scalaire de deux formes $\omega_1$ et $\omega_2$ par l'intégrale

$$\int \omega_1 \, \omega_2^*$$

étendue à tout l'espace de Riemann et une opération analogue à l'opération $\mathfrak{T}$ par la formule $\mathfrak{T}\omega = [\mathfrak{D}\omega^*]^*$.

9. — H. Hadwiger (Bern). *Bemerkung über bedingt konvergente Vektorreihen.* — Paraîtra dans *Math. Zeitschr.*; vol. 47.

10. — Ch. Blanc (Lausanne). *Les polyèdres et les théorèmes d'Abel et de Riemann-Roch.* — Paraîtra dans les *Comment. Math. Helv.*, vol. 14, pp. 212-229.

11. — F. Fiala (Genève). *Sur le problème isopérimétrique* [1]. — On considère une surface homéomorphe au plan euclidien et normale au sens de Cartan. On peut démontrer les deux théorèmes suivants [2]:

---

[1] Le mémoire paraîtra dans le vol. XV des *Comment. Math. Helv.*

[2] Voir aussi: F. Fiala, Le problème des isopérimètres sur les surfaces ouvertes à courbure positive. *Comment. Math. Helv.*, vol. XIII, 1941, pp. 293-346.

A. — Si la courbure totale est partout positive, parmi toutes les courbes simplement fermées de longueur donnée, il en existe au moins une qui contient un domaine d'aire maximum.

B. — Si la courbure totale est partout négative, et si l'intégrale de cette courbure est bornée inférieurement, parmi toutes les courbes simplement fermées de longueur donnée, il n'en existe aucune qui contienne un domaine d'aire maximum.

12. — B. ECKMANN (Zurich). *Vektorfelder auf Sphären* (Champs de vecteurs sur les sphères). — Par un champ de vecteurs (ou un champ de directions) sur une sphère, nous entendons un champ continu de vecteurs-unité tangents à cette sphère. D'après un théorème connu de Poincaré et Brouwer, il n'existe pas de champs de vecteurs sur les sphères à dimension paire (tandis qu'il existe un tel champ sur toute sphère à dimension impaire). Un k-*champ sur une sphère* est un système de $k$-champs de vecteurs tel qu'en tout point de la sphère les $k$-vecteurs du système soient linéairement indépendants, ou bien, ce qui revient au même, forment un système orthogonal. S'il existe sur une sphère à $n$ dimensions un $n$-champ, on dit que cette sphère est *parallélisable* [1]; les sphères de dimension 1, 3, 7 ont cette propriété, comme on sait [1], mais on ne sait pas s'il existe d'autres sphères parallélisables. Les méthodes de Stiefel [1], qui dans le cas des espaces projectifs réels ont conduit à bien des résultats, ne sont plus applicables dans le cas des sphères. Cependant nous pouvons montrer:

*Sur les sphères à* $4s + 1$ *dimensions il n'existe pas de* 2-*champ. Une telle sphère ne peut donc être parallélisable.*

La démonstration de ce théorème, qui sera publiée prochainement, fait usage des « groupes d'homotopie » introduits par Hurewicz et de quelques résultats de la théorie des « espaces fibrés » [2], et de plus de certaines propriétés du groupe fondamental des groupes orthogonaux. Dans cette démonstration on réduit le théorème énoncé au suivant:

*Soit* r *un nombre impair; si on a* r *fonctions complexes* $f_1, f_2, \ldots, f_r$ *de* r *variables complexes* $u_1, u_2, \ldots, u_r$, *continues pour toutes les valeurs des variables* $\neq (0, 0, \ldots, 0)$, *et si la relation*

$$\sum_{j=1}^{r} u_j f_j(u_1, u_2, \ldots, u_r \equiv 0$$

[1] E. STIEFEL, *Comm. Math. Helv.*, vol. 8 (1935), 305-351 et vol. 13 (1941), 201-218.
[2] B. ECKMANN, Zur Homotopietheorie gefaserter Räume. *Comm. Math. Helv.*, 14 (1943).

*a lieu pour toutes les valeurs des* $u^t$, *alors les fonctions* $f_j$, $f_2$, ..., $f_r$ *ont au moins un zéro commun (différent de* (0, 0, ..., 0)*).*

On déduit de ce résultat trouvé par une voie purement topologique de nouveaux théorèmes algébriques (en choisissant pour les fonctions $f_j$ des formes ou des polynômes en $u_1$, ..., $u_r$). On peut poser le problème de les démontrer par des méthodes algébriques [1].

13. — P. Bernays (Zurich). *A propos des nouvelles recherches de Gödel.* — Dans son mémoire « The consistency of the axiom of choice and of the generalized continuum-hypothesis with the axioms of set theory » (*Annals of Mathematics Studies*, n° 3, Princeton, 1940; voir aussi le rapport dans le *Journal of Symbolic Logic*, vol. VI, pp. 112-114), Gödel a prouvé qu'à la base de la théorie axiomatique des ensembles, y compris la délimitation exacte de la notion « definite Eigenschaft » et aussi l'axiome du remplacement, mais non pas l'axiome du choix, on peut établir un modèle de la théorie des ensembles pour lequel l'assertion de l'axiome du choix ainsi que celle de l'hypothèse généralisée du continu sont des théorèmes démontrables. La construction de ce modèle comprend la définition par un procédé récurrent d'une représentation univoque des nombres ordinaux sur les ensembles.

A ces résultats de Gödel on peut ajouter la remarque qu'il est possible d'éliminer de toute la considération l'axiome sur l'ensemble de tous les sous-ensembles. (Il s'entend que l'hypothèse généralisée du continu doit alors être restreinte à des nombres cardinaux pour lesquels il existe un plus haut nombre cardinal.)

On peut d'ailleurs montrer généralement qu'au sein d'une axiomatique des ensembles, pour déduire les théorèmes généraux (bon ordre et récurrence transfinie) ainsi que l'analyse infinitésimale, on peut se passer de l'axiome sur l'ensemble de tous les sous-ensembles.

En écartant cet axiome de la théorie axiomatique des ensembles, nous gagnons une plus grande liberté en regard des modèles — tout en conservant l'opposition soulignée par Zermelo entre la théorie axiomatique des ensembles et ses modèles. (Le rôle des « Grenzzahlen » de Zermelo devient maintenant commun à tous les ordinaux « réguliers » au sens de Hausdorff.)

De cette manière, nous échappons à l'obligation de choisir entre un cadre axiomatique trop restreint et un cadre dépassant déjà les besoins de l'analyse en nous engageant dans la progression illimitée des nombres cardinaux transfinis.

14. — W. Scherrer (Bern). *Zur Theorie der Elementarteilchen.* — Veranlasst durch neue Ansätze zu einer skalaren relativistischen Wellenmechanik [2] diskutiert der Referent folgenden Ansatz zu einer

---

[1] Voir B. E. Eckmann, *Comm. Math. Helveti,ci* vol. 15, 1-26.

[2] Vgl. *Helv. Phys. Acta*, XIV, *1*, 81, und XIV, *2*.

Gravitationstheorie mit einer skalaren und durchwegs positiven Wirkungsdichte

$$T = T(x_0, x_1, x_2, x_3) \tag{1}$$

und dem Linienelement

$$ds^2 = G_{ik}\, dx_i\, dx_k\ , \tag{2}$$

$$\int TR \sqrt{G}\, dx_0\, dx_1\, dx_2\, dx_3 = \text{Extremum}\ , \tag{3}$$

mit der Nebenbedingung

$$\int T \sqrt{G}\, dx_0\, dx_1\, dx_2\, dx_3 = \text{konst.}\ , \tag{4}$$

wo R den Riemannschen Krümmungsskalar darstellt.

Bezeichnet man mit $\Lambda$ die wegen (4) sich ergebende kosmologische Konstante und benutzt man die Abkürzung

$$T_{ik} = \frac{\delta^2 T}{\delta x_i\, \delta x_k} - \Gamma^{\lambda}_{ik} \frac{\delta T}{\delta x_\lambda}\ , \tag{5}$$

so ergeben sich die Gleichungen

$$TR_{ik} = T_{ik} - G_{ik} \Box T\ , \qquad R = -\Lambda \tag{6}$$

zur Bestimmung der 11 Grössen $G_{ik}$ und T.

Als Folgerung aus (6) ergibt sich die Gleichung

$$\Box T = \frac{\Lambda}{3} T\ . \tag{7}$$

Sie darf nicht unmittelbar als Wellengleichung angesprochen werden, da nicht $T^2$ sondern T die Materiedichte darstellt.

Das zugehörige kosmologische Problem ist eindeutig bestimmt und liefert eine Welt, die sich aus einer Einsteinschen Zylinderwelt für $x_0 = -\infty$ in eine De-Sitter-Welt für $x_0 = +\infty$ entwickelt.

Einen allgemeinern Ansatz erhält man, wenn man in (3) R ersetzt durch

$$R + k\,(\text{grad})\ \text{Lg}\ T)^2\ . \tag{8}$$

15. — L. Locher (Winterthur). *Ueber projektive Linien- und Ebenenkoordinaten.* — Homogene projektive Koordinaten bildet man, indem die nichthomogenen K als Quotienten mit derselben Hilfsvariablen im Nenner dargestellt werden. Zur Einführung stellt sich die didaktische Frage, ob diese homogenen K nicht unmittelbar anschaulich gelesen werden können. Das geht sehr einfach und wird

doch in der Lehrbuchliteratur unterlassen. Führt man das K-System entsprechend ein, so lassen sich die K $u, v., \ldots$ des Punktes $Uu + Vv + \ldots = 0$ *und* des mit ihm inzidierenden dualen Elementes U, V, ... unmittelbar anschaulich fassen. Sind im metrischen Falle $u, v, w, \ldots$ rechtwinklige Punktkoordinaten, so stellen U, V, W, ... diejenigen dazu dualen K dar, welche sich aus der pseudoeuklidischen Metrik ergeben. Die vorgetragene Bemerkung ist in meinem Buche *Projektive Geometrie* (Orell-Füssli, 1940, S. 215 f.) angewendet.

16. — Sophie Piccard (Neuchâtel). *Sur une catégorie d'ensembles parfaits et leur application à divers problèmes métriques. Quelques propositions concernant les ensembles de sommes et les ensembles de différences de nombres d'un ensemble linéaire.* — Soit $n$ un entier $> 2$, soit $k$ un entier tel que $1 \leqslant k < n$ et soient $a_0 = 0$, $a_1$, $a_2 \ldots$, $a_k$ $(0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_k)$ $k$ nombres donnés (distincts, quelconques) de la suite $0, 1, 2, \ldots, n - 1$. L'ensemble P des nombres $\geqq$ qui peuvent s'exprimer dans le système de numération à base $n$ à l'aide des seuls chiffres $a_0$, $a_1$, ... $a_k$ est un ensemble parfait non dense de mesure nulle. La famille $\mathfrak{F}$ de tous les ensembles P est dénombrable. Nous avons étudié la structure des ensembles de cette famille $\mathfrak{F}$ qui fournit de nombreux et instructifs exemples pour des théorèmes d'existence dans la théorie des ensembles linéaires. Un ensemble P peut être de première espèce [1]. La condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi est que $a_{i+1} - a_i = 1$ $(i = 0, 1, 2, \ldots, k - 1)$ et que $2a_k \geqslant n - 1$, si $a_k < n - 1$, ou que l'ensemble $K = \{a_0, a_1, \ldots, a_k\}$ contienne, avec tout couple de nombres $a_i$, $a_{i+1}$ tels *que* $a_{i+1} - a_i = l > 1$, les nombres $a_i - 1$, $a_i - 2$, ..., $a_i - l + 2$ et $a_{i+1} + 1$, $a_{i+1} + 2$, ..., $a_{i+1} + l - 2$.

A et B étant deux ensembles linéaires, désignons par $\sigma(A, B)$ l'ensemble des sommes $a + b$, $a \varepsilon A$, $b \varepsilon B$, et par $\delta(A, B)$ l'ensemble des différences $a - b$, $a \varepsilon A$, $b \varepsilon B$. En particulier, si $A = B$, posons $\sigma(A, A) = \sigma(A)$ et $\delta(A, A) = \delta(A)$.

On a les propositions suivantes:

1. Si A est ouvert, $\sigma(A)$ est ouvert et $\delta(A)$ est un $G_\delta$.

2. Si A est fermé, borné ou semi-borné, $\sigma(A)$ est fermé. Il en est de même de $\delta(A)$, si l'ensemble A est *borné.*

3. Si A est dense en soi, il en est de même de $\sigma(A)$ et de $\delta(A)$.

Il résulte de 2 et de 3 que si A est parfait (borné ou semi-borné), $\sigma(A)$ est parfait. Si A est parfait et borné, $\delta(A)$ est parfait.

---

[1] Terminologie de M. Mirimanoff (voir D. Mirimanoff, Sur un problème de la théorie de la mesure, II, *Fund. Math.*, t. IV, p. 118); M. Denjoy qualifie ces ensembles d'*ensembles présentant le caractère A* (voir A. Denjoy, Sur une classe d'ensembles parfaits discontinus, *Comptes rendus du Congrès international des Mathématiciens*, Strasbourg, 1920).

4. Si A est un $F_\sigma$, chacun des ensembles $\sigma(A)$, $\delta(A)$ est aussi un $F_\sigma$.

5. Si A est un $G_\delta$, $\sigma(A)$, aussi bien que $\hat{a}(A)$, peut ne pas être un $G_\delta$.

6. Si A et B sont deux ensembles linéaires de mesure intérieure positive, ou s'ils sont tous deux de seconde catégorie de Baire et jouissent de la propriété de Baire, ou encore s'ils sont tous deux des ensembles parfaits de première espèce, l'ensemble $\sigma(A, B)$, aussi bien que $\delta(A, B)$, contient un intervalle.

Les parties des énoncés 1-5 relatives aux ensembles $\delta(A, B)$ sont connues.

7. Il existe deux ensembles linéaires A, B, tels que $\delta(A, B) = (-\infty, \infty)$ alors que mes $\sigma(A, B) = 0$. Il existe aussi deux ensembles linéaires C, D tels que $\sigma(C, D) = (< 0, \infty, \infty)$ alors que mes $\delta(C, D) = 0$.

8. Il existe deux ensembles linéaires A et B, tels que mes $\sigma(A) = 0$ mes $\sigma(B) = 0$, alors que mes $\sigma(A, B) \geqslant 0$. Il existe aussi deux ensembles linéaires C et D, tels que mes $\sigma(A) > 0$, mes $\sigma(B) > 0$ et que mes $\sigma(C, D) = 0$.

Une proposition analogue a, comme on sait, lieu pour les ensembles de différences.

P et K ayant la signification indiquée dans le premier alinéa de ce résumé, on a les résultats suivants concernant la mesure (lesbesguienne) des ensembles $\sigma(P)$ et $\delta(P)$.

9. a) *Supposons d'abord que* $a_k < n - 1$.

Si tout nombre de la suite $1, 2, \ldots, n - 1$ appartient à $\sigma(K)$, on a $\sigma(P) = (< 0, \infty)$.

S'il existe au moins un nombre de la suite $1, 2, \ldots, n - 1$ qui ne fait pas partie de $\sigma(K)$, on a $\sigma(P) \neq (< 0, \infty)$.

S'il existe au moins un entier $i$ de la suite $1, 2, \ldots, n - 1$ qui est absent dans $\sigma(K)$ en même temps que le nombre $n + i$, on a mes $\sigma(P) = 0$.

Si quel que soit le nombre $i$ de la suite $1, 2, \ldots, n - 1$ qui fait défaut dans $\sigma(K)$ (et nous supposons qu'il existe au moins un tel nombre), le nombre $n + i$ appartient à $\sigma(K)$, on a mes $\sigma(P) > 0$ et en même temps mes $[(< 0, \infty) - \sigma(P)] > 0$.

b) *Supposons maintenant que* $a_k = n - 1$.

Si deux nombres consécutifs de la suite $1, 2, \ldots, 2n - 2$ ne font pas simultanément défaut dans $\sigma(K)$ ou si aucun nombre de la suite $1, 2, \ldots, n - 1$ ne fait défaut dans $\sigma(K)$, on a $\sigma(P) = (< 0, \infty)$.

Si deux nombres consécutifs de la suite $1, 2, \ldots, n - 2$ ou si un nombre au moins de la dite suite et deux nombres consécutifs de la suite $n, n + 1, \ldots, 2n - 2$ font défaut dans $\sigma(K)$, on a $\sigma(P) \neq < 0, \infty)$ et mes $[(< 0, \infty) - \sigma(P)] > 0$. Dans ce cas, $\sigma(P)$ est de mesure nulle s'il existe au moins un entier $i (1 \leqslant i \leqslant n - 2)$ qui

fait défaut dans $\sigma$ (K) en même temps que $n + i$. Par contre, si quel que soit le nombre $i$ de la suite 1, 2, ..., $n - 2$ qui fait défaut dans $\sigma$ (K), on a $n + i \varepsilon \sigma$ (K), l'ensemble $\sigma$ (P) est de mesure positive.

10. Désignons par $K_1$ l'ensemble des nombres $n - d$, où $d$ est un élément non nul quelconque de l'ensemble des distances D (K) de K.

Si $D(K) + K_1 = \{0, 1, 2, ..., n - 1\}$ et si $1 \varepsilon D(K)$, on a $\delta(P) = (-\infty, \infty)$.

Si $a_k < n - 1$, on a soit $\delta(P) = (-\infty, \infty)$, soit mes $\delta(P) = 0$.

Si $a_k = n - 1$, $D(K) + K_1 = \{0, 1, 2, ..., n - 1\}$, $1 \bar{\varepsilon} D(K)$, mais s'il n'existe aucun nombre $t$ de la suite 0, 1, 2, ..., $n - 2$, tel que $t \bar{\varepsilon} D(K)$, $t + \bar{\varepsilon} D(K)$, on a $\delta(P) = (-\infty, \infty)$.

Si $a_k = n - 1$, $D(K) + K_1 = \{0, 1, 2, ..., n - 1\}$, $1 \bar{\varepsilon} D(K)$, mais s'il existe un nombre $t$ de la suite 1, 2, ..., $n - 2$, tel que $t \bar{\varepsilon} D(K)$, $t + 1 \bar{\varepsilon} (D)(K)$, on a mes $\delta(P) > 0$ et mes $[(-\infty, \infty) - \delta(P)] > 0$.

Si $a_k = n - 1$ et s'il existe au moins un nombre de la suite 0, 1, 2, ..., $n - 2$ qui fait défaut dans $D(K) + K_1$, on a soit $\delta(P) = (-\infty, \infty)$ soit mes $\delta(P) = 0$.

11. P. étant un ensemble parfait de la famille $\mathfrak{F}$, l'ensemble $\sigma$ (P), aussi bien que $\delta$ (P), peut également faire partie de la famille $\mathfrak{F}$.

12. Il existe des ensembles de la famille $\mathfrak{F}$ qui ne sauraient être les ensembles de distances d'un ensemble linéaire.

17. — A. Speiser (Zürich). *Ueber geodätische Linien.*

18. — R. Wavre (Genève). *L'itération au moyen des opérateurs hermitiens.* — Pour les définitions fondamentales on consultera l'*Introduction mathématique à la Mécanique quantique* de G. Julia, t. II.

Soit A un opérateur linéaire, $(x, y)$ le produit scalaire, il peut être défini dans l'espace d'Hilbert ou dans l'espace fonctionnel. On a, si A est hermitien,

$$(Ax, y) = (x, Ay) .$$

Considérons la suite

$$y_1 = Ax_0 , \quad x_1 = \frac{y_1}{n_1} , \quad n_1 = \| y_1 \| \text{ nrme de } y_1 ,$$

$$y_2 = Ax_1 , \quad x_2 = \frac{y_2}{n_2} , \quad n_2 = \| y_2 \| \quad » \quad » \quad y_2 ,$$

$$y_3 = Ax_2 , \quad x_3 = \frac{y_3}{n_3} , \quad \text{etc.}$$

Les $x_n$ sont donc les itérés de $x_0$ ramenés sur la sphère unité: $\| x_n \|^2 = (x_n, x_n) = 1$.

On a

$$(x_{q+2}, x_q) = \frac{1}{n_{q+2}}(Ax_{q+1}, x_q) = \frac{1}{n_{q+2}}(x_{q+1}, Ax_q) =$$

$$= \frac{n_{q+1}}{n_{q+2}}(x_{q+1}, x_{q+1}) = \frac{n_{q+1}}{n_{q+2}}$$

et en vertu de l'inégalité de Schwartz, ces produits scalaires, ou cosinus, sont $\leqslant 1$.

D'où $n_1 \leqslant n_2 \leqslant \dots$ .

On trouverait sans peine la relation

$$(x_{q+2p}, x_q) = \frac{n_{q+1}}{n_{q+p+1}} \cdots \frac{n_{q+p}}{n_{q+2p}} .$$

Enfin l'on a

$$\| x_{q+2p} - x_q \|^2 = 2 - 2(x_{q+2p}, x_q) .$$

Soit $n = \lim n_i$, $n$ est fini ou infini, et posons

$$\varpi = \frac{n_1}{n} \cdot \frac{n_2}{n} \cdot \frac{n_3}{n} \cdots .$$

Dès lors, deux cas sont possibles:

*a*) $\varpi \neq 0$ alors

$$\lim_{p \to \infty} (x_{q+2p}, x_q) = \frac{n_{q+1}}{n} \cdot \frac{n_{q+2}}{n} \cdots$$

et

$$\| x_{q+2p} - x_q \| < \varepsilon$$

pourvu que $q$ soit assez grand quel que soit $p$. La suite des itérés $x_{2n}$ pairs et la suite des itérés impairs $x_{2n+1}$ convergent fortement.

*b*) $\varpi = 0$; alors, que $n$ soit fini ou infini, l'on a

$$\lim_{p \to \infty} \| x_{q+2p}, x_q \| > \sqrt{2} - \eta$$

quel que soit $q$. L'ensemble des itérés n'est pas compact, il n'admet aucun point d'accumulation pour la convergence forte.

En résumé, deux cas seulement sont possibles:

ou bien les suites $x_{2n}$ et $x_{2n+1}$ convergent fortement ($\varpi \neq 0$),
ou bien l'ensemble $x_n$ n'est pas compact pour la convergence forte.

Si l'opérateur A est « complètement continu », alors $\omega \neq 0$.

Cette étude sera développée dans un article à paraître dans les *Commentarii Mathematici Helvetici* (vol. 15). Quant au produit infini $\omega$ nous l'avions déjà introduit dans le cas particulier des noyaux symétriques de Fredholm dans un article paru en 1925.

19. — A. Pfluger (Fribourg). *Sur la répartition des zéros des fonctions entières.* — Soit G $(z)$ une fonction entière du type moyen de l'ordre $\rho$, H $(\varphi)$ son type angulaire (Strahltypus). La famille de droites $x \,.\, \cos \rho\theta + y \,.\, \sin \rho\theta = \mathrm{H}\ (\theta)$ ($\theta$ variable) enveloppe une courbe convexe, appelée *diagramme indicateur* (Indikatordiagramm). Soit $\mathcal{L}(\varphi)$ la longueur de l'arc $0 \leqslant \theta < \varphi$. Nous considérons les ensembles de zéros de la fonction entière pour lesquels

$$\lim_{r \to \infty} \frac{n(r\,,\ \varphi)}{r^{\rho}} = \mathrm{N}(\varphi)$$

existe quel que soit $\varphi$; $n\ (r,\ \varphi)$ désigne le nombre des zéros de l'ensemble en question qui sont situés dans le secteur $0 \leqslant \arg z < \varphi$, $|\,z\,| \leqslant r$. Nous prenons celui de ces ensembles qui est le plus ample et nous l'appelons la *partie mesurable* des zéros, N $(\varphi)$ est appelé sa *mesure*. On a alors:

$$2\pi \cdot \mathrm{N}(\varphi) \leqslant \mathcal{L}(\varphi)\ ,$$

c'est-à-dire *le produit par* $2\pi$ *de la mesure des zéros dans un angle ne dépasse pas l'arc correspondant du diagramme indicateur.*

La méthode de démonstration repose essentiellement sur l'étude des fonctions entières ayant une répartition mesurable de zéros (Cf. *Comm. Math. Helv.*, 11, 180-214). Soit $g\ (z)$ une telle fonction, dont la répartition des zéros coïncide avec la partie mesurable de G $(z)$ dans l'angle en question, et $l\ (\varphi)$ l'arc (fonction de $\varphi$) de son diagramme indicateur. On a alors $2\pi \,.\, d\mathrm{N}\ (\varphi) = dl\ (\varphi)$ et $d\,\mathcal{L}\ (\varphi) - dl\ (\varphi) \geqslant 0$, parce que $\dfrac{\mathrm{G}\,(z)}{g\,(z)}$ est une fonction entière. Notre affirmation résulte de là.

*Remarque:* J'ai appris postérieurement que le résultat ci-dessus est déjà démontré par B. Lévine dans *Rec. math. Moscou*, t. 2.