

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 38 (1939-1940)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Rubrik:** SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE SUISSE Conférences et communications.

#### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 18.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE SUISSE

Conférences et communications.

*Réunion de Locarno, 29 et 30 septembre 1940.*

---

La Société mathématique suisse a tenu sa vingt-huitième assemblée annuelle à Locarno, les 29 et 30 septembre 1940, en même temps que la 120<sup>me</sup> session de la Société helvétique des Sciences naturelles. En ouvrant la séance, le président, M. le Prof. L. KOLLROS (Zurich), a rappelé qu'en raison de la situation internationale et de la mobilisation de l'armée suisse, la réunion qui devait avoir lieu à Locarno en septembre 1939 a dû être supprimée, puis il a rendu hommage à la mémoire des collègues décédés depuis la dernière séance.

Les communications, au nombre de 15, ont été réparties sur deux séances.

La prochaine réunion aura lieu à *Bâle* les 7 et 8 septembre 1941.

1. — M<sup>me</sup> S. PICCARD (Neuchâtel). — *Sur les ensembles de distances.* — Voici quelques propositions concernant les ensembles de distances des ensembles de points d'un espace euclidien  $E^{(n)}$  (à un nombre fini quelconque  $n$  de dimensions).

*Proposition 1.* — Quels que soient le nombre entier  $n \geq 1$  et le système  $a_1, a_2, \dots, a_n$  ( $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ ) de nombres réels positifs, l'ensemble  $\{0, a_1, a_2, \dots, a_n\}$  est l'ensemble de distances d'un ensemble de points, d'ordre  $n + 1$ , de l'espace  $E^{(n)}$ .

*Proposition 2.* — Il existe un ensemble dénombrable de nombres réels non négatifs comprenant 0 qui ne saurait être l'ensemble de distances d'un ensemble de points d'un espace euclidien à un nombre fini quelconque de dimensions.

*Proposition 3.* — Quel que soit le nombre entier  $n \geq 1$ , il existe un système fini, d'ordre  $2n$ , de nombres réels positifs  $a_1, a_2, \dots, a_{2n}$ , tel que l'ensemble  $\{0, a_1, a_2, \dots, a_{2n}\}$  n'est l'ensemble de distances d'aucun ensemble de points de l'espace  $E^{(n)}$ .

*Proposition 4.* — Quel que soit le nombre entier  $n \geq 1$  et  $\leq 3$ , il existe un système de  $n+1$  nombres réels positifs  $a_1, a_2, \dots, a_{n+1}$ , tel que l'ensemble  $\{0, a_1, a_2, \dots, a_{n+1}\}$  n'est l'ensemble de distances d'aucun ensemble de points de l'espace  $E^{(n)}$ .

*Proposition 5.* — Quel que soit l'ensemble infini  $A$  de points d'un espace  $E^{(n)}$ , les ensembles  $A$  et  $D(A)$  ont la même puissance.

*Proposition 6.* — La puissance de l'ensemble de tous les ensembles de nombres réels non négatifs qui sont des ensembles de distances d'ensembles de points d'un espace euclidien est  $2^{\aleph_0}$ .

*Proposition 7.* — Soit  $n$  un nombre entier  $\geq 3$ , soit  $a_1 < a_2 < \dots < a_k$  un système quelconque de nombres de la suite  $1, 2, \dots, n-2$  et soit  $\mathfrak{A} = \{0, a_1, a_2, \dots, a_k\}_n$  l'ensemble des nombres réels non négatifs qui, dans le système de numération à base  $n$ , peuvent s'exprimer au moyen des seuls chiffres  $0, a_1, a_2, \dots, a_k$ . Les deux ensembles  $\mathfrak{A}$  et  $D(\mathfrak{A})$  sont parfaits et si  $D(\mathfrak{A})$  ne comprend pas tous les nombres réels non négatifs, cet ensemble est de mesure (lebesgienne) nulle.

2. — André MERCIER (Berne). — *Sur le principe cosmologique d'Einstein-Milne.* — Cette communication a présenté tout d'abord une comparaison entre l'axiomatique de la Théorie cinématique de Milne et celle de la Relativité (Reichenbach, Carathéodory). La différence essentielle réside dans le fait que Milne introduit un ensemble de « particules-observateurs » susceptibles de convenir de la géométrie qu'ils veulent, alors qu'en Relativité il est d'emblée question d'un continuum de points et que la géométrie est prescrite. La Théorie cinématique contient la Relativité restreinte sous la forme d'un cas particulier se rapportant à ceux des observateurs qui se meuvent avec des vitesses relatives constantes (mouvement relatif que l'on peut définir). En ce point la Théorie cinématique se distingue de la Relativité où la Relativité restreinte apparaît non pas comme un cas particulier mais comme le cas-limite où la gravitation est négligeable. C'est le postulat d'équivalence des observateurs qui fait que la Théorie cinématique contient la Relativité restreinte comme cas particulier, ce qui donne à la propriété d'équivalence définie par Milne beaucoup d'intérêt. A côté de la propriété d'équivalence, on en définit une seconde, qui est une espèce d'équivalence encore plus restrictive que la première. Pour appliquer la Théorie cinématique à la cosmologie, il faut postuler que les galaxies ont à la fois les deux propriétés d'équivalence: c'est le principe cosmologique d'Einstein-Milne.

Un premier intérêt de la Théorie cinématique est qu'elle montre qu'on peut fonder la Relativité restreinte autrement qu'on ne l'a fait avant. Un second intérêt est qu'elle montre qu'on peut expliquer le déplacement des raies spectrales venant des galaxies lointaines par

un effet Doppler dont l'origine est autre que celui imaginé dans la théorie de l'expansion de l'univers. Mais la Théorie cinématique a certains inconvénients en rapport avec la gravitation et les possibilités expérimentales de la vérifier. (Ces questions se trouvent développées dans un article paru dans les *Helv. Phys. Acta*, XIII, 473, 1940.)

3. — Rud. FUETER (Zurich). — *La théorie des fonctions des équations de Dirac.* — A l'aide du théorème de Calcul intégral de Gauss dans l'espace à quatre dimensions et en introduisant deux systèmes appropriés de grandeurs hypercomplexes, on peut remplacer les équations de Dirac par la condition que l'intégrale correspondante s'annule lorsqu'on l'étend à une hypersurface fermée et bilatère quelconque, dans l'intérieur de laquelle les fonctions et leurs dérivées sont partout continues. Ce travail paraîtra *in extenso* dans les *Commentarii Mathematici Helvetici*.

4. — H. HOPF (Zurich). — *Sur la topologie des groupes de Lie.* — On appelle *espace homogène* d'un groupe de Lie  $G$  toute variété  $W$  transformée en elle-même d'une manière transitive par  $G$ ; si  $G$  est clos,  $W$  l'est aussi. La *caractéristique eulérienne* d'une variété close  $M$  est, comme on sait, le nombre  $\sum (-1)^r a_r$ ,  $a_r$  désignant le nombre des cellules à  $r$  dimensions d'une décomposition polyédrale de  $M$ .

THÉORÈME I. — *La caractéristique d'un espace homogène d'un groupe de Lie clos est positive ou nulle.*

Les transformations de  $G$ , qui laissent fixe un point  $O$ , forment un sous-groupe de  $G$ , appelé le « groupe d'isotropie » (il ne dépend pas essentiellement de  $O$ ). Par le « rang » d'un groupe de Lie clos  $G$ , on entend le nombre maximum de dimensions des sous-groupes abéliens de  $G$ . Le théorème I peut être précisé comme suit:

THÉORÈME II. — *La caractéristique de  $W$  est positive ou nulle, selon que le rang du groupe d'isotropie est égal ou inférieur à celui de  $G$ .*

La démonstration est basée sur la considération de points fixes.

Les théorèmes et les démonstrations sont dus à M. H. Samelson et à l'auteur. Un exposé complet paraîtra prochainement dans un autre recueil.

5. — G. DE RHAM (Lausanne). — *Sur l'homéomorphie des rotations de la sphère à  $n$  dimensions.* — Deux rotations  $R_1$  et  $R_2$  de la sphère à  $n$  dimensions  $S^n$  sont dites homéomorphes, s'il existe une transformation topologique  $T$  de  $S^n$  en elle-même qui transforme  $R_1$  en  $R_2$ :  $R_2 = TR_1 T^{-1}$ . On sait que la condition nécessaire et suffisante pour que  $R_1$  puisse être transformée en  $R_2$  par une rotation, c'est que  $R_1$  et  $R_2$  aient les mêmes racines caractéristiques. Or cette condition est aussi nécessaire et suffisante pour l'homéomorphie de  $R_1$  et  $R_2$ . Par des

moyens élémentaires, on peut reconnaître que deux rotations homéomorphes ont les mêmes racines caractéristiques qui ne sont pas racines de l'unité et, pour tout entier  $h$ , le même nombre de racines caractéristiques qui sont racines  $h$ -ièmes de l'unité, et la démonstration de la proposition générale ci-dessus est ramenée à sa démonstration dans le cas où les rotations  $R_1$  et  $R_2$  sont d'ordre fini (cas où toutes leurs racines caractéristiques sont des racines de l'unité). La démonstration dans ce cas utilise des moyens difficiles. Un exposé complet sera publié dans un autre recueil.

6. — Louis KOLLROS (Zurich). — *Une propriété des variétés du second ordre.* — Cette propriété est une généralisation dans l'espace à  $n$  dimensions du théorème suivant que Steiner a énoncé sans démonstration pour  $n = 2$  (*O. c.*, II, p. 341): « Si l'on trace un cercle  $c$  tangent à une conique en l'un de ses points  $P$  et orthogonal à son cercle orthoptique, le diamètre de  $c$  est égal au rayon de courbure de la conique en  $P$  ».

Pour  $n = 3$ , elle s'énonce ainsi: « Le diamètre de la sphère tangente à une quadrique  $Q$  en l'un quelconque de ses points  $P$  et orthogonale à la sphère orthoptique de  $Q$  est égal à la somme des deux rayons de courbure principaux de la quadrique en  $P$  (donc aussi égal à la somme des rayons de courbure des sections normales de  $Q$  menées par deux diamètres conjugués quelconques de l'indicatrice de  $Q$  en  $P$ ) ».

Dans le cas général, le diamètre en question est la somme des  $(n - 1)$  rayons de courbure principaux de l'hyperquadrique au point considéré.

Cette propriété caractérise les variétés du second ordre: Si (pour  $n = 2$ ) on donne un cercle fixe  $c$  dans le plan et si l'on cherche toutes les courbes planes telles que —  $P$  étant un point quelconque de la courbe,  $M$  le centre de courbure en  $P$ , et  $P'$  le symétrique de  $M$  par rapport à  $P$  — le cercle de diamètre  $PP'$  soit orthogonal au cercle donné  $c$ , on trouve une équation différentielle dont les intégrales sont les équations des coniques dont  $c$  est le cercle orthoptique. Cette équation différentielle est particulièrement simple si l'on considère la courbe comme enveloppe de la droite  $p = x \cos u + y \sin u$ ; la fonction  $p$  de  $u$  satisfait alors à l'équation  $pp'' + p'^2 + 2p^2 = r^2$  qui devient  $t'' + 4t = 2r^2$  par la substitution  $p^2 = t$ .

Pour  $n = 3$ , on considère la surface comme enveloppe du plan

$$p = x \cos u \cos v + y \sin u \cos v + z \sin v .$$

La fonction  $p$  de  $u$  et  $v$  satisfait alors à une équation aux dérivées partielles du second ordre qui, pour  $p^2 = t$ , prend la forme:

$$t_{vv}'' + \sec^2 v \cdot t_{uu} - \operatorname{tg} v \cdot t_v' + 6t = 2r^2 .$$

En particulier, si  $r^2 = A + B + C$ , les intégrales de cette équation représentées par les quadriques rapportées à leurs axes sont :

$$t = p^2 = (A \cos^2 u + B \sin^2 u) \cos^2 \varphi + C \sin^2 \varphi .$$

Les autres intégrales sont les équations tangentialles de ces mêmes quadriques après une rotation quelconque autour de leur centre.

(Voir *Comm. Math. Helv.*, tome 13.)

7. — A. OSTROWSKI (Bâle). — *Sur quelques transformations différentielles dans l'espace à trois dimensions.* — Une transformation

$$\xi = f(x, y_1, y_2, y'_1, y'_2),$$

$$\eta_1 = g_1(x, y_1, y_2, y'_1, y'_2), \quad \eta_2 = g_2(x, y_1, y_2, y'_1, y'_2),$$

$y_1, y_2$  étant des fonctions indéterminées de la variable  $x$ , est appelée *réversible* si l'on peut exprimer  $x, y_1(x), y_2(x)$  par  $\xi, \eta_1, \eta_2, \frac{d\eta_1}{d\xi}, \frac{d\eta_2}{d\xi}$  au moyen des équations de la transformation donnée et celles qu'on en dérive par différentiations et éliminations. Dans le cas d'une fonction dépendant d'une ou de plusieurs variables indépendantes, les transformations réversibles définies d'une manière analogue coïncident avec les transformations de contact. De l'autre côté, dans le cas considéré ici, il s'agit d'une nouvelle classe de transformations différentielles. L'auteur esquisse plusieurs méthodes pour déterminer toutes les transformations de cette classe et pour en étudier les propriétés. Ces recherches seront exposées en détail dans un mémoire de l'auteur, intitulé: *Sur une classe de transformations différentielles dans l'espace à trois dimensions*, qui paraîtra dans les *Commentarii Mathematici Helvetici*.

8. — R. WAVRE (Genève). — *Sur le mouvement avec frottement de n sphères concentriques et le passage à la limite.* — Le géologue français Marcel Bertrand a émis, autrefois, l'hypothèse que la Terre est formée d'un noyau et d'une écorce animés chacun d'un mouvement propre. Dans une recherche antérieure j'avais exprimé ce que serait le mouvement des deux axes instantanés de rotation. Nous considérerons ici le cas de  $n$  couches sphériques homogènes, puis d'une infinité de couches infiniment minces. Il n'y a, je tiens à le dire, aucune difficulté mathématique spéciale dans la résolution de ce problème, il pourrait être posé comme sujet d'un travail écrit d'une cinquantaine de pages à tout étudiant avancé qui possèderait des éléments solides d'algèbre et d'analyse. Je le recommande même à ce titre.

Le frottement sera supposé proportionnel à la vitesse relative. La somme des moments des forces de frottement est dirigée suivant le

vecteur rotation instantanée relative des deux couches consécutives. Les équations régissant les rotations sont

$$k_i (x_i^5 - x_{i+1}^5) \frac{d\vec{p}_i}{dt} = x_{i+1}^4 (\vec{p}_{i+1} - \vec{p}_i) + x_i^4 (\vec{p}_{i-1} - \vec{p}_i) ; \quad (1)$$

$k_i$  est une constante,  $x_i$  le rayon de la  $i - 1^{\text{ème}}$  couche de séparation et  $\vec{p}_i$  la rotation de la  $i^{\text{ème}}$  couche. Ce système peut donc s'écrire:

$$\frac{dp_i}{dt} = a_{i, i-1} p_{i-1} + a_{i, i} p_i + a_{i, i+1} p_{i+1} . \quad (2)$$

Considérons le déterminant

$$\Delta_i(r) = \begin{vmatrix} r + a_{i, i} & a_{i, i+1} & 0 \\ a_{i+1, i} & r + a_{i+1, i+1} & a_{i+1, i+2} & 0 \\ 0 & a_{i+2, i+1} & \dots & r + a_{n, n} \end{vmatrix} \quad (3)$$

et l'équation caractéristique  $\Delta_1(r) = 0$  du système (2). La solution donnant le mouvement des axes sera

$$p_i = \sum_{k=1}^n c_k \frac{\Delta_{i+1}(r_k)}{\Delta_{i+1}(0)} e^{r_k t} , \quad (4)$$

les  $r_k$  étant les racines toutes négatives, sauf  $r_1 = 0$ , de l'équation caractéristique. On peut aussi se passer des déterminants comme on le fait de plus en plus sous l'inspiration du calcul matriciel et écrire le système sous la forme

$$\frac{dp}{dt} = ap \quad (5)$$

et sa solution

$$p = e^{-at} p_0 ; \quad (6)$$

$a, p$  désignant ici des matrices,  $p_0$  étant la distribution initiale des vitesses de rotation. Cette résolution par le calcul matriciel constituerait la voie pour les cas d'une infinité dénombrable de couches.

Si, maintenant, on suppose les couches infiniment minces l'équation (1) devient une équation aux dérivées partielles

$$k(x) \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{4}{x} \frac{\partial p}{\partial x} , \quad (7)$$

voisine de celles qui se présentent dans différents problèmes classiques du type hyperbolique: refroidissement de la sphère, problème de l'armille,...

Si le corps est tout entier homogène,  $k$  est constant; on peut le supposer égal à l'unité. L'intégration de (7) se fait alors sans difficulté par séparation des variables et conduit à l'introduction des fonctions de Bessel  $J_n(x)$ :

$$p(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k x^{-\frac{3}{2}} J_{\frac{3}{2}}(\lambda_k x) e^{-\lambda_k^2 t} . \quad (8)$$

L'on a

$$\frac{\partial p}{\partial x} = - \sum_{k=1}^{\infty} c_k \lambda_k x^{-\frac{1}{2}} J_{\frac{5}{2}}(\lambda_k x) e^{-\lambda_k^2 t}$$

et l'on doit avoir sur la surface extérieure ( $x = R$ ), qui est libre,  $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$  quel que soit  $t$  (condition à la limite). Les valeurs propres  $\lambda_k$  sont donc les racines en nombre infini de l'équation

$$J_{\frac{5}{2}}(\lambda_k R) = 0 .$$

Quant aux constantes  $c_k$ , elles seront déterminées par les données initiales  $p(x, 0) = f(x)$ , comme des coefficients de Fourier.

On peut aussi se donner le mouvement de la surface extérieure, condition aux limites,  $p(R, t) = \varphi(t)$ , et résoudre par les procédés classiques.

Enfin, dans le cas d'une surface extérieure libre, mais d'un champ de forces extérieures agissant sur chaque sphère, on est conduit aux systèmes (2) ou (5) avec seconds membres ou après le passage à la limite à une équation de la forme

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{4}{x} \frac{\partial p}{\partial x} + \varphi(x, t) ,$$

équations résolubles encore par des procédés classiques. Ce qu'il faut remarquer, croyons-nous, dans le passage à la limite, c'est la persistance du spectre discret à l'exclusion d'un spectre continu et le fait que (8) est limite de (4), les fonctions de Bessel apparaissant comme limites d'expressions algébriques.

Deux mots encore sur les applications aux figures planétaires. Les équations de Navier de l'hydrodynamique des fluides visqueux supposent précisément un frottement proportionnel à la vitesse relative. Pour des vitesses faibles, astre quasi sphérique, les calculs précédents peuvent avoir une forte valeur analogique. Pour ce qui est de la terre supposée fluide, mais visqueuse, le mouvement de préces-

sion des équinoxes, créé par le moment des forces d'attraction lunisolaire, ne serait pas, dans cette hypothèse, suivi par toutes les couches en même temps, il y aurait des courants intratelluriques comme ceux dont parlait M. Dive il y a quelques années. La recherche actuelle aurait encore une valeur analogique quoique plus lointaine.

9. — Ambrogio LONGHI (Lugano). — *Sur les involutions elliptiques appartenant à une courbe elliptique.* — L'auteur expose quelques-unes de ses recherches de géométrie sur les courbes elliptiques, établissant entre autres les théorèmes suivants.

*Etant donnée une courbe  $\mathfrak{C}$  de genre  $p = 1$  et de module général :*

a) *La condition nécessaire et suffisante pour l'équivalence birationnelle de deux involutions elliptiques  $\gamma_\alpha^1, \gamma_\beta^1$  appartenant à  $\mathfrak{C}$ , c'est que,  $\Delta$  étant le plus petit commun multiple de leurs ordres  $\alpha$  et  $\beta$ , on ait  $\Delta : \alpha = \rho^2$  et  $\Delta : \beta = \sigma^2$ , avec  $\rho$  et  $\sigma$  entiers, et que les groupes des points  $\rho$ -uples de toutes les séries linéaires  $g_{\alpha\rho}^{\rho-1}$  composées (sur  $\mathfrak{C}$ ) avec  $\gamma_\alpha^1$ , ainsi que les groupes des points  $\sigma$ -uples des  $g_{\beta\sigma}^{\sigma-1}$  composées avec  $\gamma_\beta^1$ , constituent une même involution  $\gamma_\Delta^1$  ;*

b) *Les involutions elliptiques, primitives ou non, d'un ordre donné  $n$ , qui existent sur  $\mathfrak{C}$ , sont en nombre égal à la somme de tous les diviseurs de  $n$  ;*

c) *La condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe sur  $\mathfrak{C}$  un r-uple d'involutions elliptiques birationnellement identiques et d'ordres assignés  $n_1, n_2, \dots, n_r$ , c'est que les quotients  $n_i : \delta$  ( $i = 1, 2, 3, \dots, r$ ) soient des carrés de nombres entiers,  $\delta$  désignant le plus grand commun diviseur des ordres eux-mêmes. Cette condition étant satisfaite, le nombre de tels r-uples d'involutions est égal à la somme de tous les diviseurs de  $\delta$ .*

Un cas très particulier du théorème a), pour  $\beta = 1$ , est fourni par un autre théorème de Torelli<sup>1</sup>; le théorème b) constitue, d'autre part, un complément notable à un résultat de Castelnuovo<sup>2</sup> sur l'énumération des involutions elliptiques primitives, d'un ordre donné, appartenant à  $\mathfrak{C}$ .

Le travail complet sera publié dans les Mémoires de la R. Accademia d'Italia.

10. — M. GUT (Zurich). — *Moyennes de séries de Dirichlet.* — Puisque les nombres d'un corps de nombres algébriques  $c$  de degré infini forment un ensemble dénombrable on peut toujours trouver

<sup>1</sup> R. TORELLI, *Sulle superficie algebriche contenenti due fasci ellittici di curve* (Rendiconti della R. Acc. dei Lincei, 21<sup>1</sup> (5), 1912, p. 457).

<sup>2</sup> G. CASTELNUOVO, *Geometria sulle curve ellittiche* (Atti della R. Acc. di Torino, 24, 1888, p. 13).

une suite infinie de corps de nombres algébriques de degré fini  $c_1, c_2, \dots, c_i, c_{i+1}, \dots$  tels que pour tout  $i \geq 1$  le corps  $c_{i+1}$  soit une extension effective de  $c_i$  et  $\lim_{i \rightarrow \infty} c_i = c$ . Dans la suite  $c$  désignera plus spécialement un corps de degré infini qui peut être engendré de la manière suivante:

On numérote tous les nombres premiers rationnels dans un ordre quelconque et soit  $p_j$  le  $j$ -ième nombre de cette suite. On choisit  $c_1$  arbitrairement, mais pour tout  $i \geq 1$  le corps  $c_{i+1}$  tel que tous les idéaux premiers de  $c_i$  qui divisent un nombre premier  $p \leq p_i$  se décomposent complètement dans  $c_{i+1}$ . Soit  $n_i$  le degré de  $c_i$  et  $\zeta_i(s)$  la fonction zêta de Dedekind de  $c_i$ . Dans un article de la *Furtwängler-Festschrift* (Monatshefte für Math. und Physik, vol. 48, p. 153, 1939) j'avais démontré que sous ces hypothèses, si  $\mathcal{R}(s) > 1$ ,

la suite des fonctions  $\sqrt[n_i]{\zeta_i(s)}$ , où pour  $s$  réel on prend la détermination positive de la racine, converge vers une fonction analytique limite  $Z(s)$  qui ne s'annule pas pour toute valeur de  $s$  pour laquelle  $\mathcal{R}(s) > 1$ . Soit  $q$  un nombre premier fixe, en particulier l'ensemble de tous les corps absolument cycliques de degré  $q$  engendre un tel corps  $c$ . Dans ce cas l'on peut facilement indiquer explicitement la fonction limite  $Z_q(s)$  en tenant compte de la décomposition des nombres premiers rationnels en idéaux premiers de  $c$ .

Puisque  $Z_q(s)$  n'est essentiellement autre chose que la limite de la moyenne géométrique de toutes les séries  $L$  du corps des nombres rationnels dont le caractère a la propriété que sa  $q$ -ième puissance est égale à 1 ou à 0 pour tout nombre entier rationnel et positif comme argument, le problème se pose tout de suite de calculer cette moyenne sans qu'on utilise la théorie des corps de nombres algébriques de degré infini. Dans un article de la *Fueter-Festschrift* (Vierteljahrsschrift der Naturf. Ges. in Zurich, vol. 85, p. 214, 1940), j'ai démontré que, dans le cas  $q = 2$ , en appliquant seulement la théorie des corps de nombres quadratiques ordinaire on peut déterminer la limite de suites partielles convenables non seulement de la moyenne géométrique mais aussi de la moyenne arithmétique et de la moyenne harmonique de toutes les séries  $L$  en se basant sur un lemme très simple. Ce lemme permet en outre de calculer de pareilles moyennes pour de tels types de séries de Dirichlet à caractère réel tels ils ont été considérés dans des cas particuliers par Euler et Cesàro.

11. — J.-J. BURCKHARDT (Zurich). — *Démonstration géométrique d'un théorème de Minkowski concernant les polyèdres convexes.* — L'auteur parle d'une démonstration géométrique du théorème de Minkowski d'après lequel un polyèdre convexe  $\mathcal{K}$ , formé par la juxtaposition (sans lacunes et sans empiètement) de polyèdres ayant un centre, les polyèdres élémentaires, a lui-même un centre. Voir le travail paru dans la *Fueter-Festschrift* (Beiblatt zur Vierteljahrsschrift

der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich, No. 32, Jahrg. 85, 1940, pp. 149-154). La démonstration comprend deux parties.

1<sup>o</sup> Les faces du polyèdre  $\mathcal{K}$  se répartissent en couples,  $F$  et  $\bar{F}$ , de faces congruentes dont les côtés homologues sont parallèles. Pour démontrer ce fait, on se sert d'un processus de symétrisation, qui fournit des subdivisions de  $F$  et  $\bar{F}$  en polygones  $\nu$  et  $\bar{\nu}$ , de manière que chaque polygone  $\nu$  soit équipollent à un  $\bar{\nu}$ .

Si les  $\nu$  ne peuvent être juxtaposés que d'une seule manière, de façon à fournir un polygone convexe, il en est de même des  $\bar{\nu}$ , et l'assertion est établie. S'il n'en est pas ainsi, il faut modifier les subdivisions de  $F$  et  $\bar{F}$  d'une manière convenable; quelques cas exceptionnels doivent être discutés à part.

2<sup>o</sup> Pour prouver que  $\mathcal{K}$  a un centre, supposons que la face  $F$  de  $\mathcal{K}$  n'est pas limitée par des couples de côtés égaux. Soit  $k_1$  un tel côté de  $F$ . En projetant  $\mathcal{K}$  dans la direction de  $k_1$  sur un plan, on obtient un polygone convexe  $P$ . De la convexité de  $P$ , on déduit que, si  $\mathcal{K}$  ne possédait pas de centre, on aurait sur  $\mathcal{K}$  un nombre pair de côtés  $k_2, k_3, \dots$  équipollents à  $k_1$ . En supposant qu'aucun des côtés  $k_i$  ni aucune de leurs images ne soit en même temps côté de deux polyèdres élémentaires, on prouve facilement qu'il n'y a sur  $\mathcal{K}$  qu'une seule image de  $k_1$ . Il est par suite impossible qu'il y ait sur  $\mathcal{K}$  un nombre pair de côtés équipollents à  $k_1$ . Si les hypothèses faites sur les  $k_i$  ne sont pas remplies, on peut en général modifier les polyèdres élémentaires de manière à y satisfaire. Quelques cas exceptionnels doivent de nouveau être considérés à part. Cette seconde partie de la démonstration vient combler une lacune qui se trouve dans notre exposé dans la *Fueter-Festschrift*.

12. — Pierre HUMBERT. — *Réduction des formes quadratiques indéfinies dans un corps algébrique fini*. — Les résultats démontrés par M. Siegel dans son mémoire intitulé: « Einheiten quadratischer Formen <sup>1</sup> » s'étendent en prenant pour domaine de rationalité un corps algébrique fini  $K$ . On démontre qu'il existe seulement un nombre fini de classes de formes quadratiques à coefficients entiers dans  $K$  et dont la norme du déterminant est donnée. Dans le cas où  $K$  est totalement réel, une forme quadratique dans  $K$ , dont les conjuguées ne sont pas toutes définies positives, possède une infinité d'unités, c'est-à-dire de substitutions à coefficients entiers dans  $K$ , de déterminant unité, laissant cette forme invariante.

---

<sup>1</sup> *Abhandlungen aus dem mathematischen Seminar der hansischen Universität*, Bd. 13, 3/4 (1940).

13. — Félix FIALA. — *Sur les surfaces ouvertes à courbure positive.* (Note présentée par M. H. Hopf.) — Nous allons indiquer, en attendant un exposé plus complet<sup>1</sup>, comment nous avons pu généraliser l'inégalité isopérimétrique du plan euclidien

$$L^2 \geqq 4\pi A , \quad (1)$$

où  $L$  désigne la longueur d'une courbe fermée  $\mathcal{F}$  et  $A$  l'aire comprise à l'intérieur de  $\mathcal{F}$ . Pour les *surfaces analytiques ouvertes à courbure non négative* (par exemple paraboloïde elliptique) nous avons pu établir la formule

$$L^2 \geqq 2A \oint k ds , \quad (2)$$

où  $\oint k ds$  représente l'intégrale de la courbure géodésique  $k$  le long de  $\mathcal{F}$ . L'égalité n'a lieu que si la surface est un plan euclidien et la courbe  $\mathcal{F}$  un cercle.

En tenant compte du signe de la courbure et en désignant par  $C$  l'intégrale de cette courbure étendue à toute la surface, on obtient

$$L^2 \geqq 2A(2\pi - C) . \quad (3)$$

Nous avons réussi à montrer que cette formule ne peut pas être améliorée en général; dans ce but nous avons introduit la notion de *vrai cercle*, défini comme le lieu des points dont la plus courte distance à un point fixe est constante.

C'est sur une généralisation de la notion de vrai cercle que repose la démonstration de la formule (2): nous avons défini la *vraie parallèle* à distance  $p$  de la courbe  $\mathcal{F}$  comme le lieu des points dont la plus courte distance à la courbe  $\mathcal{F}$  est égale à  $p$  ( $p$  est compté positivement vers l'extérieur de  $\mathcal{F}$ , négativement vers l'intérieur). L'étude des vraies parallèles est naturellement basée sur une connaissance approfondie de la famille des lignes géodésiques normales à la courbe  $\mathcal{F}$ . Soit  $L(p)$  la longueur de la vraie parallèle à distance  $p$  de  $\mathcal{F}$ . Nous avons montré que  $L(p)$  est une fonction continue de  $p$  et dérivable sauf éventuellement pour une suite divergente de valeurs de  $p$ . L'aire  $A$  s'exprime alors comme

$$\int_{\bar{p}}^0 L(p) dp ,$$

où  $\bar{p}$  est une constante négative dépendant de  $\mathcal{F}$ . Une inégalité pour la dérivée de  $L(p)$  provenant du signe de la courbure conduit à la démonstration.

<sup>1</sup> Voir aussi une Note parue dans les *C. R.*, 209 (1939), p. 821-823.

14. — Carl MERZ (Coire). — *Calotte polyédrique à connexion multiple.* — Soit un prisme droit, dont la base est un polygone régulier de  $2n$  côtés, surmonté d'une pyramide droite dont la base est égale à celle du prisme. On mène les  $n$  surfaces diagonales déterminées par deux arêtes opposées et appelées surfaces sécantes, ce qui partage la pyramide en deux  $n$  pyramides partielles; on en ôte la moitié de telle façon qu'une pyramide partielle soit toujours suivie et précédée d'un vide volumétrique et vice-versa. Le corps ainsi formé, appelé calotte polyédrique, est limité par les surfaces suivantes:

1<sup>o</sup> Les  $n$  surfaces sécantes, qui se coupent suivant une droite (la hauteur de la pyramide primitive) dont l'ordre de multiplicité est égal à  $n$ . C'est également le long de cette droite, qui n'est pas une arête, que les  $n$  pyramides partielles se touchent; chaque surface sécante se compose donc de deux demi-surfaces, qui se raccordent le long de la droite de multiplicité  $n$ ;

2<sup>o</sup> Les  $n$  surfaces latérales (faces) de la pyramide primitive, qui joignent chacune deux demi-surfaces consécutives;

3<sup>o</sup>  $n$  surfaces appelées surfaces intermédiaires et situées chacune entre deux pyramides partielles; ces surfaces appartiennent à la surface commune de séparation du prisme et de la pyramide primitive; par contre, les  $n$  surfaces des bases des pyramides partielles sont supprimées; de cette façon, les  $n$  surfaces intermédiaires alternent avec  $n$  vides superficiels;

4<sup>o</sup> Les  $2n$  surfaces latérales du prisme;

5<sup>o</sup> La surface de base du prisme qui ferme la calotte.

Soient alors, comme d'habitude,  $F$  le nombre de faces,  $S$  le nombre de sommets et  $A$  le nombre d'arêtes. Pour le corps ainsi formé, on a:

$$F = 5n + 1 ; \quad S = 4n + 2 ; \quad A = 10n .$$

(Donc, comme il est dit plus haut, la droite de multiplicité  $n$  n'est pas considérée comme arête.)

On obtient ainsi:

$$\underline{F + A - N = 3 - n} ,$$

où  $n$  est l'ordre de connexion de la surface.

D'après la théorie générale des polyèdres<sup>1</sup>, on sait que, si le polyèdre est à un seul côté, le nombre  $n$  peut être pair ou impair; et impair seulement, si le polyèdre est à deux côtés.

Donc, pour  $n$  pair, la calotte polyédrique est à un seul côté; pour  $n$  impair, elle pourrait être à un ou deux côtés. Or, il est facile de montrer que, dans ce dernier cas, la surface est à deux côtés. Pour le

---

<sup>1</sup> Voir le traité de Max BRÜCKNER. *Vielecke und Vielflache*, p. 56, n° 54.

voir, il suffit, par exemple, de reconstituer la calotte à partir de son développement, qui est facile à obtenir. Pour  $n$  pair, on s'aperçoit que le côté supérieur du développement se raccorde avec le côté inférieur le long de la droite de multiplicité  $n$ , qui devient ainsi un changement de côté ramification de degré  $n$ . Pour  $n$  impair, ce phénomène ne se produit pas et la surface est à deux côtés.

Pour plus de détails, consulter ma Note dans la *Vierteljahrsschrift der Naturf. Gesellschaft in Zürich*, t. 85, 1940, ainsi que mon ouvrage *Vielfläche aus Scheitelzellen u. Hohlzellen*, F. Schuler, édit., Coire, 1939.

15. — M. DIETHELM (Rickenbach-Schwytz). — *La notion de dérivée dans l'enseignement secondaire.* — Considérations d'ordre didactique sur la première initiation à la notion de dérivée envisagée sous ses divers aspects géométrique, algébrique et physique.

## MÉLANGES ET CORRESPONDANCE

### A propos de mon article

« Sur quelques théorèmes géométriques de Charles Sturm »<sup>1</sup>.

1. — En relisant l'Ouvrage classique de Moritz CANTOR<sup>2</sup> sur l'*Histoire des mathématiques*, je constate que Matthew Stewart<sup>3</sup> a publié en 1746, *sans démonstration*, deux formules qui coïncident essentiellement avec les théorèmes de L'Huillier et Sturm désignés dans mon article par les lettres A et C.

En effet, ces formules expriment (avec les notations adoptées par moi):

- a) La somme des puissances  $m^{\text{mes}}$  des distances d'un point fixe aux côtés d'un  $n$ -gone régulier pour  $m < n$ .
- b) La somme des puissances  $2m^{\text{mes}}$  des distances d'un point fixe au sommet d'un  $n$ -gone régulier pour  $m < n$ .

<sup>1</sup> *L'Ens. mathém.*, tome 37, p. 275-291, 1938.

<sup>2</sup> *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*, t. III, p. 546 (2<sup>me</sup> édit., 1901).

<sup>3</sup> Les recherches de Stewart sont aussi mentionnées par CHASLES, dans son *Aperçu historique*, p. 177-179, 2<sup>e</sup> édition, Paris, 1875. [Note de la Réd., H. F.]