**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

**Band:** 38 (1939-1940)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: REMARQUES SUR LES POLYGONES ET LEURS ÉTOILÉS

Autor: Bilger, Gérard

**DOI:** https://doi.org/10.5169/seals-515792

## Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

## **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

## Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

**Download PDF:** 03.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

## REMARQUES SUR LES POLYGONES ET LEURS ÉTOILÉS

PAR

Gérard Bilger (Genève).

1. — M. G. VIVANTI, dans un article récent et fort intéressant<sup>1</sup>, démontre et généralise quelques théorèmes énoncés par Ch. Sturm et L'Huillier. Quelques-uns concernent la somme des puissances  $m^{\text{mes}}$  des distances d'un point à tous les côtés d'un polygone régulier ou à toutes les faces d'un polyèdre.

Nous indiquerons ici, sans les démontrer, quelques propositions relatives aux distances d'un point à un certain nombre de côtés des polygones et de leurs étoilés ou à un certain nombre de faces de l'icosaèdre et du dodécaèdre régulier de troisième espèce <sup>2</sup>. Ces théorèmes nous ont été suggérés par la théorie du potentiel <sup>3</sup>, comme nous l'exposerons ailleurs, mais ils ont une signification strictement géométrique. L'intervention de «lacets» montre leur parenté avec la théorie des fonctions. Une vérification élémentaire s'obtiendrait en montrant que la proposition est vraie pour un lacet entourant l'un des sommets des polygones ou l'une des arêtes des polyèdres.

Soient C un polygone inscrit, convexe, régulier ou semirégulier équiangle  $^4$ ;  $c_i$  l'un de ses côtés, (i = 1, 2, 3, ... n), l son périmètre, S sa surface et C' l'un quelconque de ses étoilés

4 Max Brückner, Vielecke und Vielflache, p. 16.

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> L'Enseignement mathématique, XXXVII e année, 1938, nos 5-6.

<sup>ROUCHÉ et COMBEROUSSE, Traité de Géométrie, II, p. 255, fig. 502.
Compte rendu de la Société de Physique et d'Histoire naturelle de Genève, Arch. des Sc. phys. et nat., n° I, 1937, Des polygones potentiellement équivalents et n° 2, 1937, Potentiel de polygone et Géométrie élémentaire.</sup> 

dont les sommets et les bissectrices coïncident avec ceux de C;  $c'_i$ , l' et S' les éléments de C' correspondant à  $c_i$ , l et S.

A partir d'un point M situé à l'extérieur de C, décrivons un circuit fermé  $\gamma$  quelconque autour d'un ou de plusieurs sommets des polygones (et qui ne passe par aucun sommet). Désignons par  $d_i$  et par  $d_i'$  la distance du point M aux différentes droites qui supportent les côtés  $c_i$  et  $c_i'$  franchis lors du circuit. Nous obtenons

$$\frac{\Sigma \pm d_i}{l} \equiv \frac{\Sigma \pm d_i'}{l'} \,, \tag{1}$$

la distance est comptée positivement dans le sens où l'on a traversé les côtés et négativement dans l'autre; et

$$\frac{\Sigma \pm d_i^2}{S} \equiv \frac{\Sigma \pm d_i^{'2}}{S'}, \qquad (2)$$

les termes de ces sommes sont comptés positivement lorsqu'on entre dans le corps et négativement lorsqu'on en sort.

La formule (1) est encore vraie dans les deux cas suivants:

a) Entre un polygone régulier C (ou C') et le corps C'' formé par les n rayons du cercle circonscrit aboutissant aux sommets de C; nous obtenons

$$rac{\Sigma \,\pm\, d_i}{l} \equiv rac{\Sigma \,\pm\, d_i^{''}}{l^{''}}$$
 ,  $(1')$ 

où  $d_i''$  et l'' représentent les éléments de C'' correspondant à  $d_i$  et l.

Pour l'hexagone, l = l''.

Il est bien connu qu'un circuit fermé  $\gamma$  quelconque se ramène à une somme de lacets l. Pour le lacet l on a, par exemple,

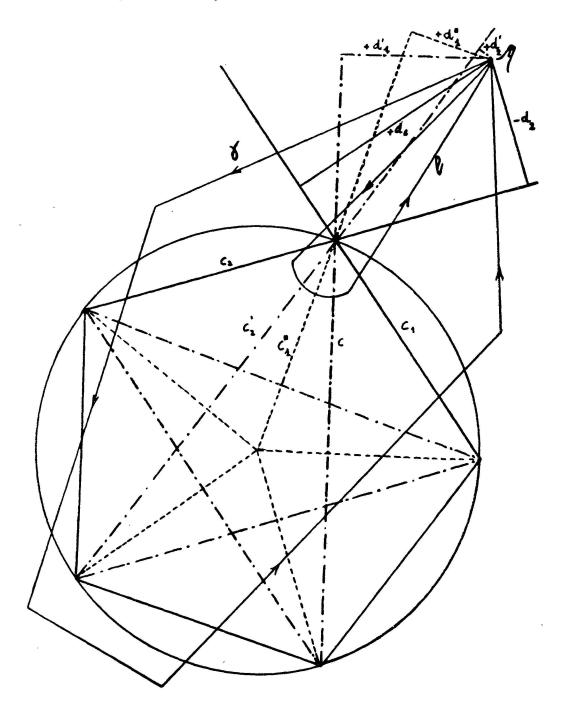
$$\frac{+\ d_1-d_2}{l}=\frac{+\ d_1^{'}+\ d_2^{'}}{l'}=\frac{+\ d_1^{''}}{l''}$$

 $\operatorname{et}$ 

$$\frac{d_2^2 - d_1^2}{S} = \frac{d_2^{'2} - d_1^{'2}}{S'} \cdot$$

Remarque. — Décrivons le circuit particulier suivant. A partir de M, entrons dans C par  $c_i$  puis tournons autour du point de concours des rayons et retournons en M par  $c_i$ . La formule (1') devient

$$rac{d_i-d_i}{l}\equivrac{\Sigma\,\pm\,d_i^{''}}{l''}$$
 d'où  $\Sigma\,\pm\,d_i^{''}\,\equiv\,0$  .



Cette dernière relation est évidente si C'' est pair, les distances d'' se détruisant deux à deux.

b) Entre un polygone semi-régulier équiangle C (ou C') et le corps C''' formé par l'ensemble des bissectrices de C (ou de C')

pour autant qu'une bissectrice quelconque aboutisse à un sommet où elle soit de nouveau bissectrice. La formule (1) devient

$$\frac{\Sigma \pm d_i}{l} \equiv \frac{\Sigma \pm d_i^{'''}}{l^{'''}}$$
, (1")

où  $d_i^{\prime\prime\prime}$  et  $l^{\prime\prime\prime}$  représentent les éléments de C $^{\prime\prime\prime}$  correspondant à  $d_i$  et l.

Pour l'hexagone semi-régulier, l = l'''.

- 2. Nous considérons les distances à un certain nombre de côtés du polygone et de leurs étoilés. La proposition qui s'applique à tous les côtés, dans le cas de la puissance un, à savoir: « La somme (algébrique) des distances d'un point aux côtés d'un polygone régulier est constante pour tous les points du plan » est évidente en mécanique. Elle exprime que le moment résultant d'un système de forces dont la résultante est nulle est constant.
- 3. Remarque sur le calcul de la surface des polygones. Soit O le centre du cercle circonscrit à C (ou à C'), joignons O aux différents sommets de C; nous divisons le polygone en triangles isocèles tous égaux entre eux si C est régulier, égaux deux à deux si C est semi-régulier. Par S', nous entendons la somme des surfaces de tous ces triangles; il y a donc des régions du polygone recouvertes plusieurs fois; ceci revient à dire que les surfaces recouvertes plusieurs fois sont comptées autant de fois qu'elles sont recouvertes.

D'après cette façon de calculer la surface, à un polygone régulier pair correspond toujours un polygone de même surface y compris lui-même. La même chose pour les polygones semi-réguliers doublement pairs. Dans ce cas, la formule (2) s'écrit:

$$\Sigma \,\pm\, d_i^2 \,\equiv\, \Sigma \,\pm\, d_i^{'2}$$
 .

Soient C et C' deux polygones pour lesquels S = S'; désignons par  $s_i$  la surface de C recouverte i fois; par  $s_i'$  celle de C', nous obtenons

$$\Sigma i s_i = \Sigma i' s_i'$$
.

La plus grande valeur de i dépend de la forme du polygone; elle n'est pas forcément égale à celle de i'.

- 4. Appliquée à un lacet autour d'un sommet, la formule (1) implique la proposition suivante vraie pour les polygones réguliers et semi-réguliers: La perpendiculaire élevée en un point d'une bissectrice issue d'un sommet quelconque détermine sur les côtés du polygone et de ses étoilés des longueurs inversement proportionnelles aux périmètres. Réciproquement, si deux polygones satisfont à cette condition, ils ont même potentiel dans le domaine connexe du point à l'infini.
- 5. Proposition analogue pour deux polyèdres dans l'espace. Soient C l'icosaèdre régulier situé à distance finie;  $f_i$  l'une de ses faces, S sa surface, V son volume et C' le dodécaèdre régulier de troisième espèce dont les arêtes coïncident avec celles de C,  $f_i'$ , S' et V' les éléments de C' correspondant à  $f_i$ , S et V. A partir d'un point M extérieur à C, décrivons un circuit fermé quelconque, autour d'une ou de plusieurs arêtes des polyèdres, qui évite les sommets. Désignons par  $d_i$  et  $d_i'$  la distance qui va du point M aux différents plans qui supportent les faces  $f_i$  et  $f_i'$  franchies lors du circuit.

Nous obtenons

$$\frac{\Sigma \pm d_i}{S} \equiv \frac{\Sigma \pm d_i'}{S'} , \qquad (1)$$

les distances sont comptées positivement dans le sens où l'on a traversé et négativement dans l'autre; et

$$\frac{\Sigma \pm d_i^2}{V} \equiv \frac{\Sigma \pm d_i^{\prime 2}}{V^{\prime}} , \qquad (2)$$

les termes de ces sommes sont comptés positivement lorsqu'on entre dans le corps et négativement lorsqu'on en sort.

6. — Remarque sur le calcul du volume V'. — Joignons le point O, centre de la sphère circonscrite au polyèdre, aux différents sommets de toutes les faces; nous divisons ainsi le polyèdre en douze pyramides à base pentagonale. Par volume du polyèdre, nous entendons la somme des volumes de ces douze pyramides; il y a donc des régions du polyèdre qui appartiennent à plusieurs pyramides.