

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 38 (1939-1940)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LA GÉOMÉTRIE SENSIBLE
Autor: Hjelmslev, Johannes
Kapitel: VI. — Le plan arithmétique.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-515790>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 17.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

37. — Pour un triangle quelconque ABC l'on a

$$\overline{BC} + \overline{CA} + \overline{AB} = 0 \quad (3)$$

et cette formule contient toute la trigonométrie.

Nous supposons que ABC détermine le sens rotatif positif dans le plan, et désignons par a , b et c les côtés du triangle — c'est-à-dire les longueurs des vecteurs \overline{BC} , \overline{CA} , \overline{AB} — et par α , β , γ les angles du triangle, α étant l'angle du vecteur \overline{AB} au vecteur \overline{AC} , β de \overline{BC} à \overline{BA} , γ de \overline{CA} à \overline{CB} . Ceci posé l'on peut déduire toutes les relations trigonométriques habituelles de (3).

En multipliant par \widehat{BC} l'on obtient, en effet,

$$ab \sin \gamma = ac \sin \beta$$

ou

$$\frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} ;$$

en élevant (3) au carré après avoir isolé \overline{BC} l'on obtient

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 bc \cdot \cos \alpha .$$

VI. — LE PLAN ARITHMÉTIQUE.

38. — Les recherches précédentes ne visent immédiatement que la géométrie du réseau quadrillé telle qu'elle se présente dans un plan à dessiner au réseau millimétrique, limité par un carré dont le côté est égal à mettons 50 cm. Chaque point est déterminé par deux nombres, d'abord des nombres entiers, ensuite — quand l'exigent les problèmes à résoudre — des nombres fractionnaires; ceux-ci sont ou bien appliqués directement à un réseau quadrillé plus fin ou bien remplacés par des nombres approximatifs appropriés; en dernier lieu aussi quelques nombres irrationnels interprétés de façon correspondante. Mais tous ces nombres sont limités, et — dans l'exemple présent — situés entre + 250 et — 250.

Les lignes droites sont représentées par des équations de premier degré. On trouve le point d'intersection de deux droites

en résolvant leurs équations. Si la résolution fournit un système de deux nombres qui ne sont pas tous les deux situés dans l'intervalle donné (entre $+ 250$ et $- 250$), les lignes en question ne se coupent pas. Si, par contre, ils s'y trouvent tous les deux on peut interpréter ce système de deux nombres de la façon exposée et ainsi déterminer un point qui appartient aux deux lignes; il arrive, cependant, que les deux droites ont plusieurs points communs (se coupent de façon indéterminée). Choisissons comme exemple les deux lignes

$$\begin{aligned}x_2 &= \frac{1}{200} x_1 , \\x_2 &= 0 ,\end{aligned}$$

(x_1, x_2) étant le point variable. L'origine est, bien entendu, un point commun $(0, 0)$; mais en posant $x_1 = 8$ (l'unité est égale à 1 mm) nous obtenons pour les deux lignes respectivement les ordonnées $\frac{1}{25}$ et 0, et cette différence est négligeable dans le plan pratique.

Les deux lignes se confondent donc le long d'un segment de 16 mm, car elles ont de chaque côté de l'origine un segment commun de 8 mm.

Soit un cercle à rayon 200 mm; menons par un point quelconque A du cercle une tangente et plaçons sur celle-ci un segment $AB = 4$ mm. Si nous menons la sécante par B et le centre du cercle, nous pourrions — d'après le théorème de la puissance d'un point par rapport à un cercle — déterminer le plus petit segment ε , découpé sur cette sécante entre B et le cercle, par la relation

$$\varepsilon(\varepsilon + 400) = 16 , \quad \text{donc} \quad \varepsilon < \frac{1}{25} ,$$

quantité négligeable dans le plan pratique.

Il en résulte que la périphérie du cercle se confond complètement avec le segment AB de la tangente, et avec un segment pareil de l'autre côté de A. La tangente et le cercle ont donc un segment commun d'au moins 8 mm.

39. — Nous allons maintenant étendre tout le calcul analytique introduit pour le réseau quadrillé de telle façon que nous

considérons tous les nombres réels sans les soumettre à aucune condition, c'est-à-dire qu'ils soient grands ou petits, rationnels ou irrationnels. Nous définissons un point (vecteur) arithmétique a comme un système de deux nombres (a_1, a_2) , où a_1 et a_2 sont des nombres quelconques réels (coordonnées). Nous appelons le point $O = (0, 0)$ l'origine. Tout système de deux points a et b , pris dans cet ordre, s'appelle un vecteur \overline{ab} ; on appelle pourtant a le vecteur Oa . Tout vecteur a détermine une translation, c'est-à-dire une transformation qui déplace le point (x_1, x_2) sur le point correspondant $(x_1 + a_1, x_2 + a_2)$. La somme et la différence de deux vecteurs se définissent comme précédemment, de sorte qu'on a toujours $\overline{ab} = b - a$. On multiplie un vecteur a par un nombre quelconque λ en multipliant les coordonnées par λ . Une ligne droite se définit par le point variable $x = a + \lambda b$ où a et b sont des vecteurs fixes. Le vecteur viré \hat{a} se définit toujours par $\hat{a} = (-a_2, a_1)$, le produit par $ab = a_1 b_1 + a_2 b_2$ et la distance entre deux points a et b par $\sqrt{(a - b)^2}$. De même, les définitions des aires et des fonctions trigonométriques restent inchangées.

40. — *Il en résulte immédiatement que toutes les recherches antérieures restent valables dans le domaine élargi*, car on calcule de la même façon avec les symboles, qu'ils signifient des nombres rationnels ou irrationnels, grands ou petits. Dans ce domaine abstrait, purement arithmétique, que nous appelons le *plan arithmétique*, il y aura toujours un et seulement un point d'intersection pour deux lignes droites non parallèles, et de même, deux points différents ne déterminent jamais plus d'une ligne droite. Un cercle et une tangente ont seulement un point commun (point de contact), et un cercle et une ligne droite n'ont jamais plus de deux points communs.

Comme toute cette analyse arithmétique comprend celle du réseau quadrillé on peut, bien entendu, l'appliquer au plan pratique en tenant compte de l'interprétation appropriée des résultats numériques dans chaque cas.

On conçoit facilement la façon dont cette analyse élargie peut servir à introduire des points d'intersection hors du plan

à dessiner, et cette notion peut servir de manière tout à fait rationnelle dans des recherches concernant le plan à dessiner limité.

41. — Nous remarquons encore que l'extension ultérieure de la géométrie élémentaire, l'extension à la *géométrie complexe* ne cause aucune difficulté quand le domaine s'étend aux nombres complexes.

Il faut seulement remarquer qu'elle entraîne l'existence de vecteurs qui ont la longueur 0 bien qu'ils ne soient pas identiques au vecteur zéro; ce sont tous les vecteurs de la forme $\lambda(1, i)$ ou $\lambda(1, -i)$ où λ est un nombre quelconque complexe. Sur la droite $x = a + \lambda(1, i)$ ou $x = a + \lambda(1, -i)$ toutes les distances seront égales à zéro. Ces lignes s'appellent les lignes isotropes; elles n'ont ni vecteur d'orientation, ni vecteur normal de sorte que les recherches basées sur ces notions ne sauraient être appliquées aux lignes isotropes. Ceci a surtout de l'importance dans la trigonométrie où les lignes sont justement représentées par des vecteurs-unité, et il y faut donc supposer qu'aucune des lignes en question n'est isotrope. Ceci à part, toutes les recherches considérées s'appliquent au domaine complexe.
