Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 38 (1939-1940)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LA GÉOMÉTRIE SENSIBLE

Autor: Hjelmslev, Johannes

Kapitel: V. — Trigonométrie.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-515790

V. — Trigonométrie.

35. — Nous appelons *angle orienté* un système de deux droites orientées, nommées dans un ordre déterminé. Si les vecteurs unité correspondants sont a et b, l'angle est désigné par (a, b). Par extension naturelle des définitions élémentaires nous définissons cosinus et sinus ainsi

$$\cos (a\,,\ b) = a\,b\ , \tag{1}$$

$$\sin (a\,,\ b) = \widehat{a\,b}\ . \tag{2}$$

Comme tout déplacement direct (rotation et translation) laisse ab et $\widehat{a\,b}$ invariables, l'on voit que les angles directement congruents ont le même cosinus et sinus.

La somme de deux angles (a, b) et (b, c) se définit par l'angle (a, c). L'angle (a, a), (ou l'angle formé par deux droites parallèles de même orientation) est désigné aussi par 0 de sorte que $\cos 0 = 1$, $\sin 0 = 0$. On pose l'angle $(b,\ a) = -(a,\ b)$ puisque $(b,\ a) + (a,\ b) = 0$, et il en résulte que $\cos (-u) = \cos u$, $\sin (-u) = -\sin u$. L'on pose encore l'angle $(a,\ \widehat{a})$ égal à R (ou traditionnellement $90°$) ce qui entraîne $\cos R = 0$, $\sin R = 1$. L'angle $(a, -a)$ est, par conséquent, égal à $2\,R$ (ou $180°$) et $\cos 2\,R = -1$, $\sin 2\,R = 0$.

D'ailleurs, par ceci, on n'a nullement introduit une méthode générale pour mesurer les angles.

36. — Si l'on introduit les coordonnées dans les relations (1) et (2) l'on a

$$\cos (a\,,\ b) = a_1\,b_1 + a_2\,b_2\ ,$$
$$\sin (a\,,\ b) = a_1\,b_2 - a_2\,b_1\ ,$$

d'où résultent directement les relations

$$\cos (u - v) = \cos u \cos v + \sin u \sin v\ ,$$
$$\sin (u - v) = \sin u \cos v - \cos u \sin v\ ,$$

qui fournissent toutes les formules habituelles goniométriques.

37. — Pour un triangle quelconque ABC l'on a

$$\overline{\mathrm{BC}} + \overline{\mathrm{CA}} + \overline{\mathrm{AB}} = 0 \qquad (3)$$

et cette formule contient toute la trigonométrie.

Nous supposons que ABC détermine le sens rotatif positif dans le plan, et désignons par a, b et c les côtés du triangle — c'est-à-dire les longueurs des vecteurs $\overline{\mathrm{BC}}$, $\overline{\mathrm{CA}}$, $\overline{\mathrm{AB}}$ — et par α, β, γ les angles du triangle, α étant l'angle du vecteur $\overline{\mathrm{AB}}$ au vecteur $\overline{\mathrm{AC}}$, β de $\overline{\mathrm{BC}}$ à $\overline{\mathrm{BA}}$, γ de $\overline{\mathrm{CA}}$ à $\overline{\mathrm{CB}}$. Ceci posé l'on peut déduire toutes les relations trigonométriques habituelles de (3). En multipliant par $\overset{\wedge}{\overline{\mathrm{BC}}}$ l'on obtient, en effet,

$$ab \sin \gamma = ac \sin \beta$$

ou

$$\frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}\ ;$$

en élevant (3) au carré après avoir isolé $\overline{\mathrm{BC}}$ l'on obtient

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,bc\,.\,\cos \alpha\ .$$

VI. — Le plan arithmétique.

38. — Les recherches précédentes ne visent immédiatement que la géométrie du réseau quadrillé telle qu'elle se présente dans un plan à dessiner au réseau millimétrique, limité par un carré dont le côté est égal à mettons 50 cm. Chaque point est déterminé par deux nombres, d'abord des nombres entiers, ensuite — quand l'exigent les problèmes à résoudre — des nombres fractionnaires; ceux-ci sont ou bien appliqués directement à un réseau quadrillé plus fin ou bien remplacés par des nombres approximatifs appropriés; en dernier lieu aussi quelques nombres irrationnels interprétés de façon correspondante. Mais tous ces nombres sont limités, et — dans l'exemple présent — situés entre + 250 et — 250.

Les lignes droites sont représentées par des équations de premier degré. On trouve le point d'intersection de deux droites