Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 38 (1939-1940)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LA GÉOMÉTRIE SENSIBLE
Autor: Hjelmslev, Johannes
Kapitel: IV. — Longueur et aire.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-515790

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 09.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

IV. — Longueur et aire.

24. — Si deux vecteurs a et b ont le même carré, c'est-à-dire si $a \,.\, a = b \,.\, b$, ou comme on peut aussi l'écrire $a^2 = b^2$, ils satisfont aussi à la relation

$$a^2 - b^2 = 0 \qquad \text{ou} \qquad \frac{1}{2}(a + b) \,.\, (a - b) = 0 \,.$$

Il s'ensuit que les deux vecteurs a et b ont un axe de symétrie qui passe par l'origine et le milieu $\frac{1}{2}(a + b)$ du segment entre les extrémités des vecteurs. Les deux vecteurs sont donc égaux (congruents).

S'il existe un nombre rationnel $\alpha (> 0)$, qui est égal à $\sqrt{a_1^2 + a_2^2}$, les deux vecteurs a et $(\alpha, 0)$ seront congruents; l'on peut donc dire que le vecteur « a » a la longueur α. S'il n'existe au contraire aucun nombre rationnel qui soit égal à $\sqrt{a_1^2 + a_2^2}$, l'on fixe ce dernier nombre irrationnel comme longueur fictive du vecteur a. Ceci est une façon de parler que nous avons déjà introduite pour maintenir un algorithme destiné à fournir des nombres-mesure corrects du vecteur a. Mais nous lui donnerons maintenant une importance plus grande.

En effet, attribuons dans tous les cas au vecteur a la longueur fictive $\sqrt{a_1^2 + a_2^2}$ ou $\sqrt{a^2}$, ce qui revient à attribuer plus généralement la longueur fictive $\sqrt{(a - b)^2}$ au vecteur du point a au point b du réseau quadrillé; par là nous n'obtenons pas seulement un algorithme pratique pour déterminer des nombres-mesure; cet algorithme attribue en outre à tous les segments entre les nœuds du réseau des longueurs qui se prêtent aux mêmes calculs que les simples longueurs d'une échelle, car

1° les segments congruents ont les mêmes longueurs;

2° lorsqu'un segment est divisé en deux parties, sa longueur est égale à la somme des longueurs des parties.

Ceci se vérifie ainsi: le vecteur a se divise au point $b = \lambda a$ $(0 < \lambda < 1)$ en deux vecteurs dont la longueur est $\sqrt{\lambda^2 a^2} = \lambda \sqrt{a^2}$ et $\sqrt{(1 - \lambda)^2 a^2} = (1 - \lambda) \sqrt{a^2}$, et la somme de ceux-ci est justement $\sqrt{a^2}$.

25. — *Le rapport ou le produit de deux vecteurs a et b qui se trouvent sur la même droite est égal respectivement au rapport ou au produit de leurs longueurs, précédé du signe + ou — suivant que les vecteurs ont la même orientation ou l'orientation opposée;* on le vérifie immédiatement lorsqu'on pose $b = \lambda a$.

26. — Si l'on désigne par b_a le vecteur obtenu par projection de b sur a, l'on a

$$a \,.\, b = a \,.\, b_a \,.$$

En appliquant la relation précédente (25) au produit ci-dessus, l'on voit que *la longueur de b_a, muni de signe en concordance avec l'orientation de a, est égale à* $\frac{ab}{\sqrt{a^2}}$. Si a est un vecteur d'unité, c'est-à-dire un vecteur dont le carré est égal à 1, la longueur trouvée ci-dessus devient simplement ab.

27. — Si l'on multiplie un vecteur par un nombre positif λ, sa longueur sera aussi multipliée par λ.

Si l'on multiplie tous les points d'une figure par $\lambda (> 0)$, l'on obtient une nouvelle figure dont les distances seront λ fois les distances correspondantes de la figure primitive (figures homothétiques de rapport λ).

Dans deux triangles à côtés parallèles deux à deux, les longueurs des côtés correspondants sont proportionnelles (cf. § 15, application 5°).

28. — A un vecteur a dont la longueur $\sqrt{a^2}$ est rationnelle correspond un vecteur unité $e = \frac{a}{\sqrt{a^2}}$ aux coordonnées fractionnaires $\frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}$ et $\frac{a_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}$, et de la même orientation que a. Mais lorsque la longueur $\sqrt{a^2}$ est irrationnelle nous calculerons aussi, pour plus de commodité, avec un vecteur unité formel $e = \frac{a}{\sqrt{a^2}}$ correspondant à a, et ayant les coordonnées irrationnelles

$$\frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}} \quad \text{et} \quad \frac{a_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}} \,.$$

Tout vecteur qui se trouve sur la même ligne que a (ou parallèle à a) peut dans tous les cas être représenté par λe, où λ exprime la longueur du vecteur, muni de signe en concordance avec le vecteur a.

Une ligne droite par le point p et parallèle au vecteur a peut dans tous les cas s'exprimer au moyen du point variable

$$x = p + \lambda e ,$$

où le paramètre λ donne la longueur de la distance de a à x, muni de signe conformément à l'orientation du vecteur a; en d'autres termes λ détermine les chiffres d'une échelle sur la ligne avec p comme origine et e comme unité; e s'appelle le vecteur d'orientation de la ligne ou le vecteur d'unité.

L'équation de la ligne est

$$\hat{e}(x - p) = 0 ; \qquad (1)$$

$\hat{e}$ s'appelle le vecteur normal de la ligne tandis que l'équation (1) s'appelle la forme normale de l'équation de la ligne.

On obtient la distance de la ligne droite à un point y par projection du vecteur $y - p$ sur la normale de la ligne, et sa longueur calculée conformément à l'orientation de $\hat{e}$ (ou $\hat{a}$) est donc $\hat{e}(y - p)$. C'est-à-dire, l'on obtient la distance en remplaçant x par y dans le premier membre de (1).

Lorsqu'une ligne droite sans orientation est donnée par une équation de la forme

$$b(x - p) = 0$$

on peut la mettre sous la forme normale en la divisant par $\pm \sqrt{b^2}$, en choisissant $\pm \frac{b}{\sqrt{b^2}}$ comme vecteur normal.

29. — Un cercle de centre a et de rayon ρ a pour équation

$$(x - a)^2 = \rho^2 .$$

En un point quelconque p du cercle la tangente a la représentation paramétrique

$$x = p + \lambda (\hat{p} - \hat{a}) ,$$

et l'équation

$$(x - p)(a - p) = 0 .$$

On peut écrire l'équation ordinaire du cercle ainsi

$$x^2 + ax + \alpha = 0 ,$$

où a est un vecteur, α un scalaire; le centre est $-\frac{a}{2}$ et le rayon $\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - \alpha}$. Les points d'intersection avec la ligne $x = \lambda e$, où e est un vecteur unité se déterminent par l'équation

$$\lambda^2 + \lambda(ea) + \alpha = 0 ;$$

Le produit des racines de cette équation est égal à α qui représente ainsi la puissance de l'origine par rapport au cercle.

On étudie très facilement toute autre question concernant la géométrie du cercle au moyen de ces auxiliaires.

30. — Il existe deux sortes de déplacements qui laissent O fixe: les rotations autour de O et les déplacements inverses autour de O.

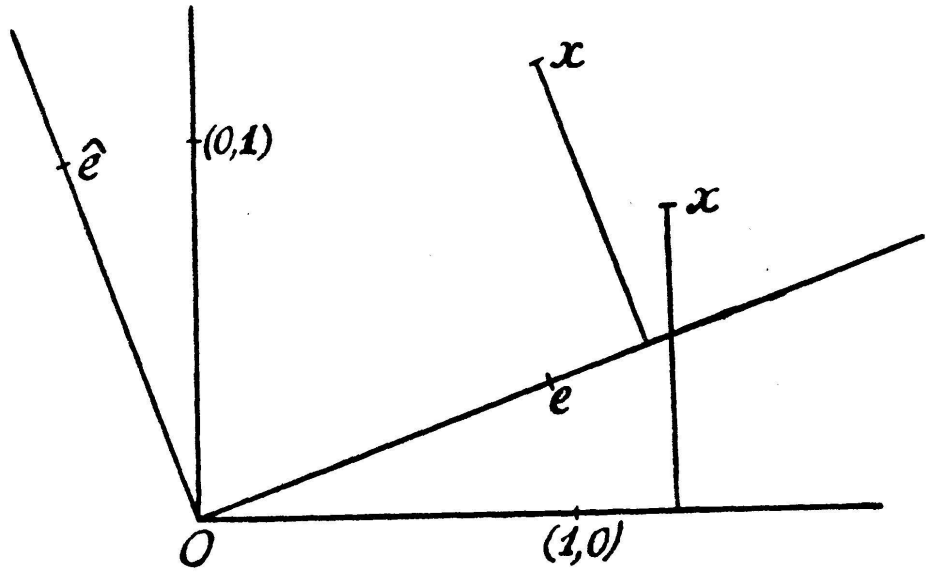


Fig. 5.

Une rotation autour de O (fig. 5) transporte le vecteur unité (1,0) sur un autre vecteur unité e, et par là chaque vecteur $(\lambda, 0)$ sur le vecteur λe; en même temps le vecteur (0, 1) se transporte sur $\hat{e}$ et chaque vecteur $(0, \mu)$ sur $\mu\hat{e}$. Elle transpor-

tera donc un point quelconque x en un point correspondant x', déterminé par la relation

$$x' = x_1 e + x_2 \widehat{e} . \tag{1}$$

L'on peut écrire ceci facilement en coordonnées; si

$$e = (e_1, e_2) , \qquad \widehat{e} = (-e_2, e_1)$$

il en résulte

$$x_1' = e_1 x_1 - e_2 x_2 ,$$

$$x_2' = e_2 x_1 + e_1 x_2 .$$

Un déplacement inverse autour de O qui déplace (1, 0) sur e, déplace en même temps (0, 1) sur $-\widehat{e}$; il s'exprime donc par la formule

$$x' = x_1 e - x_2 \widehat{e} . \tag{2}$$

Tout déplacement dans le plan se ramène à l'un des déplacements (1) ou (2) combiné avec une translation. De l'équation (1) découle la relation

$$(x' - y')^2 = (x - y)^2 , \qquad x' y' = xy , \qquad \widehat{x'} y' = \widehat{x} y ,$$

si x et y signifient deux points qui se transportent en x' et y' par une rotation autour de l'origine. Les grandeurs $(x - y)^2$, xy et $\widehat{x} y$ sont donc invariables quelle que soit la rotation autour de O.

De l'équation (2) découle de même que $(x - y)^2$ et xy sont invariables, tandis que $\widehat{x} y$ change de signe.

La longueur $\sqrt{(x - y)^2}$ est invariable quel que soit le déplacement.

31. — On peut représenter une similitude directe, formée par une rotation autour de O et une multiplication, par la formule

$$x' = x_1 a + x_2 \widehat{a}$$

où a est le vecteur qui dans la similitude correspond au vecteur unité (1, 0) sur l'axe des x, tandis que $\widehat{a}$ correspond au vecteur unité (0, 1) sur l'axe des y.

Une similitude inverse, où (1, 0) correspond à a et (0, 1) correspond à $-\widehat{a}$ est représentée par la formule

$$x' = x_1 a - x_2 \widehat{a} .$$

Les longueurs des vecteurs correspondants ont dans les deux cas le rapport constant $\sqrt{a^2}$.

32. — *Signification de* $\widehat{a\,b}$.

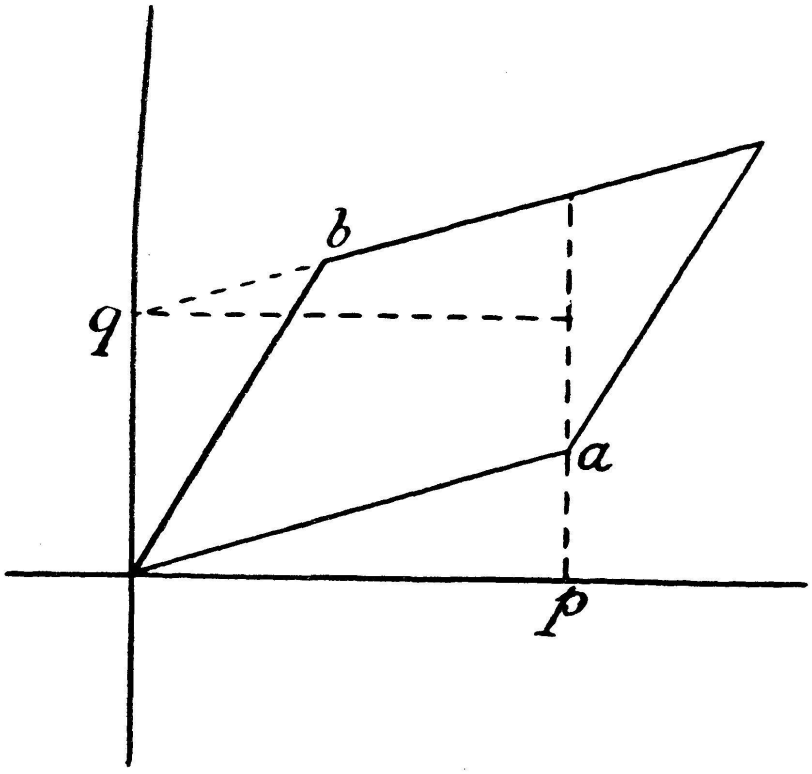
$\widehat{a\,b}$ ne change pas de valeur, lorsqu'on déplace l'extrémité de l'un des vecteurs parallèlement à l'autre; l'on a

$$\widehat{a\,(b + \lambda a)} = \widehat{a\,b} ,$$

et

$$\widehat{(a + \lambda \widehat{b})\,b} = \widehat{a\,b} .$$

Si l'on mène par b, parallèle au vecteur a (fig. 6), une ligne



Fi5. 6.

qui coupe l'axe des y en q, et par a, parallèle au vecteur q, une ligne qui coupe l'axe des x en p, l'on obtient

$$\widehat{a\,b} = \widehat{a\,q} = \widehat{p\,q} .$$

Ce produit est l'aire du rectangle formé par p et q, et puisque des réflexions élémentaires connues montrent que celui-ci est égal au parallélogramme aq qui est lui-même égal au parallélogramme ab, nous voyons que l'aire du parallélogramme formé par les deux vecteurs a et b s'exprime par $\widehat{a\,b}$; nous devons cependant remarquer que ce nombre est muni du signe $+$ ou $-$ suivant que le sens rotatif de a vers b est orienté du côté positif ou du côté négatif.

Nous fixons donc le nombre $\widehat{a\,b}$ *comme nombre-mesure du parallélogramme formé par les deux vecteurs* a *et* b, *nommés dans cet ordre. Au triangle qui a* a *et* b *pour côtés nous attribuons le nombre-mesure* $\frac{1}{2}\,\widehat{a\,b}$.

33. — Afin de fixer des nombres-mesure pour les aires d'autres figures nous considérons d'abord un triangle quelconque abc (fig. 7); nous effectuons une translation qui déplace a sur l'origine de sorte que

$$b \longrightarrow b - a\,, \qquad c \longrightarrow c - a\,.$$

Le nouveau triangle a l'aire

$$\frac{1}{2}\,(\widehat{b} - \widehat{a})\,(c - a) = \\ = \frac{1}{2}\,(\widehat{b\,c} + \widehat{c\,a} + \widehat{a\,b})$$

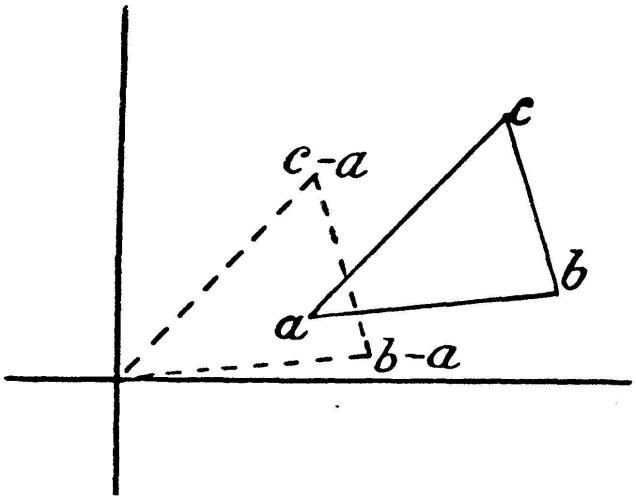


Fig. 7.

et nous fixons donc ceci comme nombre-mesure pour l'aire du $\Delta\,abc$. L'expression s'interprète immédiatement comme la somme des trois triangles Obc, Oca, Oab. La façon dont elle a été formée établit *a priori* qu'elle est indépendante de la position de l'origine par rapport au triangle et de toute translation du triangle.

34. — *Pour l'aire d'un polygone quelconque* abcde *il semble donc naturel de fixer le nombre-mesure*

$$\frac{1}{2}\,(\widehat{a\,b} + \widehat{b\,c} + \widehat{c\,d} + \widehat{d\,e} + \widehat{e\,a})$$

et l'on voit facilement que toute translation de la figure laisse invariable cette expression.

Pour faire voir que tout déplacement direct laisse invariable ce nombre-mesure — d'où il découle que les figures congruentes auront les mêmes aires — il faut seulement démontrer encore que toute rotation autour de O le laisse invariable. Mais ceci résulte de ce qui précède car cette rotation laisse invariable tous les termes $\widehat{ab}$, $\widehat{bc}$ ... Les déplacements inverses font changer de signe aux aires.

Nous vérifions ultérieurement que le nombre-mesure susdit satisfait à la condition suivante: si une figure est divisée en deux parties, la somme des aires de celles-ci sera égale à l'aire de la figure entière. Ceci se vérifie immédiatement, car dans l'expression (fig. 8):

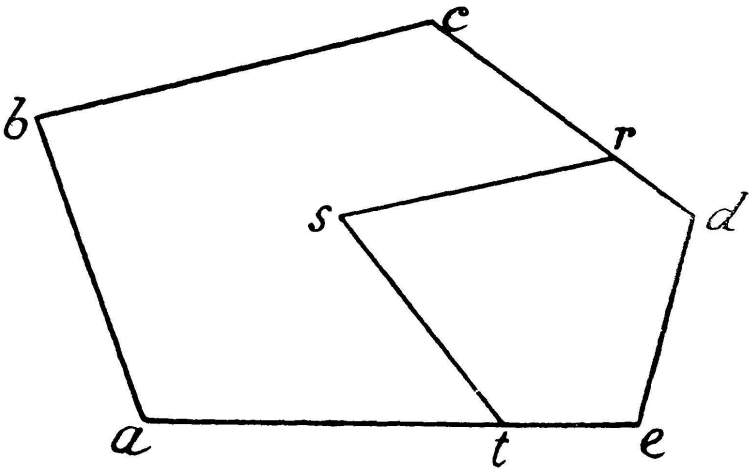


Fig. 8.

$$\frac{1}{2}(\widehat{ab} + \widehat{bc} + \widehat{cr} + \widehat{rs} + \widehat{st} + \widehat{ta}) + \frac{1}{2}(\widehat{rd} + \widehat{de} + \widehat{et} + \widehat{ts} + \widehat{sr})$$

l'on a

$$\widehat{cr} + \widehat{rd} = \widehat{cd} ,$$

$$\widehat{et} + \widehat{ta} = \widehat{ea} ,$$

car ceci exprime seulement que les « triangles » *crd* et *eta* ont l'aire zéro; comme de plus

$$\widehat{rs} + \widehat{st} + \widehat{ts} + \widehat{sr} = 0$$

la somme des deux parties devient justement égale à l'aire entière

$$\frac{1}{2}(\widehat{ab} + \widehat{bc} + \widehat{cd} + \widehat{de} + \widehat{ea}) .$$