Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 38 (1939-1940)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LA GÉOMÉTRIE SENSIBLE

Autor: Hjelmslev, Johannes

Kapitel: IV. — Longueur et aire.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-515790

IV. — Longueur et aire.

24. — Si deux vecteurs a et b ont le même carré, c'est-à-dire si $a \,.\, a = b \,.\, b$, ou comme on peut aussi l'écrire $a^2 = b^2$, ils satisfont aussi à la relation

$$a^2 - b^2 = 0 \qquad \text{ou} \qquad \frac{1}{2}(a + b) \,.\, (a - b) = 0 \,.$$

Il s'ensuit que les deux vecteurs a et b ont un axe de symétrie qui passe par l'origine et le milieu $\frac{1}{2}(a + b)$ du segment entre les extrémités des vecteurs. Les deux vecteurs sont donc égaux (congruents).

S'il existe un nombre rationnel $\alpha (> 0)$, qui est égal à $\sqrt{a_1^2 + a_2^2}$, les deux vecteurs a et $(\alpha, 0)$ seront congruents; l'on peut donc dire que le vecteur « a » a la longueur α. S'il n'existe au contraire aucun nombre rationnel qui soit égal à $\sqrt{a_1^2 + a_2^2}$, l'on fixe ce dernier nombre irrationnel comme longueur fictive du vecteur a. Ceci est une façon de parler que nous avons déjà introduite pour maintenir un algorithme destiné à fournir des nombres-mesure corrects du vecteur a. Mais nous lui donnerons maintenant une importance plus grande.

En effet, attribuons dans tous les cas au vecteur a la longueur fictive $\sqrt{a_1^2 + a_2^2}$ ou $\sqrt{a^2}$, ce qui revient à attribuer plus généralement la longueur fictive $\sqrt{(a - b)^2}$ au vecteur du point a au point b du réseau quadrillé; par là nous n'obtenons pas seulement un algorithme pratique pour déterminer des nombres-mesure; cet algorithme attribue en outre à tous les segments entre les nœuds du réseau des longueurs qui se prêtent aux mêmes calculs que les simples longueurs d'une échelle, car

1° les segments congruents ont les mêmes longueurs;

2° lorsqu'un segment est divisé en deux parties, sa longueur est égale à la somme des longueurs des parties.

Ceci se vérifie ainsi: le vecteur a se divise au point $b = \lambda a$ $(0 < \lambda < 1)$ en deux vecteurs dont la longueur est $\sqrt{\lambda^2 a^2} = \lambda \sqrt{a^2}$ et $\sqrt{(1 - \lambda)^2 a^2} = (1 - \lambda) \sqrt{a^2}$, et la somme de ceux-ci est justement $\sqrt{a^2}$.

25. — *Le rapport ou le produit de deux vecteurs a et b qui se trouvent sur la même droite est égal respectivement au rapport ou au produit de leurs longueurs, précédé du signe $+$ ou $-$ suivant que les vecteurs ont la même orientation ou l'orientation opposée;* on le vérifie immédiatement lorsqu'on pose $b = \lambda a$.

26. — Si l'on désigne par b_a le vecteur obtenu par projection de b sur a, l'on a

$$a \cdot b = a \cdot b_a \,.$$

En appliquant la relation précédente (25) au produit ci-dessus, l'on voit que *la longueur de b_a, muni de signe en concordance avec l'orientation de a, est égale à* $\frac{ab}{\sqrt{a^2}}$. Si a est un vecteur d'unité, c'est-à-dire un vecteur dont le carré est égal à 1, la longueur trouvée ci-dessus devient simplement ab.

27. — Si l'on multiplie un vecteur par un nombre positif λ, sa longueur sera aussi multipliée par λ.

Si l'on multiplie tous les points d'une figure par $\lambda (> 0)$, l'on obtient une nouvelle figure dont les distances seront λ fois les distances correspondantes de la figure primitive (figures homothétiques de rapport λ).

Dans deux triangles à côtés parallèles deux à deux, les longueurs des côtés correspondants sont proportionnelles (cf. § 15, application 5°).

28. — A un vecteur a dont la longueur $\sqrt{a^2}$ est rationnelle correspond un vecteur unité $e = \frac{a}{\sqrt{a^2}}$ aux coordonnées fractionnaires $\frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}$ et $\frac{a_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}$, et de la même orientation que a. Mais lorsque la longueur $\sqrt{a^2}$ est irrationnelle nous calculerons aussi, pour plus de commodité, avec un vecteur unité formel $e = \frac{a}{\sqrt{a^2}}$ correspondant à a, et ayant les coordonnées irrationnelles

$$\frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}} \quad \text{et} \quad \frac{a_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}} \,.$$

Tout vecteur qui se trouve sur la même ligne que a (ou parallèle à a) peut dans tous les cas être représenté par λe, où λ exprime la longueur du vecteur, muni de signe en concordance avec le vecteur a.

Une ligne droite par le point p et parallèle au vecteur a peut dans tous les cas s'exprimer au moyen du point variable

$$x = p + \lambda e \ ,$$

où le paramètre λ donne la longueur de la distance de a à x, muni de signe conformément à l'orientation du vecteur a; en d'autres termes λ détermine les chiffres d'une échelle sur la ligne avec p comme origine et e comme unité; e s'appelle le vecteur d'orientation de la ligne ou le vecteur d'unité.

L'équation de la ligne est

$$\widehat{e}\,(x - p) = 0 \ ; \tag{1}$$

$\widehat{e}$ s'appelle le vecteur normal de la ligne tandis que l'équation (1) s'appelle la forme normale de l'équation de la ligne.

On obtient la distance de la ligne droite à un point y par projection du vecteur $y - p$ sur la normale de la ligne, et sa longueur calculée conformément à l'orientation de $\widehat{e}$ (ou $\widehat{a}$) est donc $\widehat{e}(y - p)$. C'est-à-dire, l'on obtient la distance en remplaçant x par y dans le premier membre de (1).

Lorsqu'une ligne droite sans orientation est donnée par une équation de la forme

$$b\,(x - p) = 0$$

on peut la mettre sous la forme normale en la divisant par $\pm \sqrt{b^2}$, en choisissant $\pm \dfrac{b}{\sqrt{b^2}}$ comme vecteur normal.

29. — Un cercle de centre a et de rayon ρ a pour équation

$$(x - a)^2 = \rho^2 \ .$$

En un point quelconque p du cercle la tangente a la représentation paramétrique

$$x = p + \lambda\,(\widehat{p} - \widehat{a}) \ ,$$

et l'équation

$$(x - p)\,(a - p) = 0 \ .$$

On peut écrire l'équation ordinaire du cercle ainsi

$$x^2 + ax + \alpha = 0 \ ,$$

où a est un vecteur, α un scalaire; le centre est $-\frac{a}{2}$ et le rayon $\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - \alpha}$. Les points d'intersection avec la ligne $x = \lambda e$, où e est un vecteur unité se déterminent par l'équation

$$\lambda^2 + \lambda(ea) + \alpha = 0 \ ;$$

Le produit des racines de cette équation est égal à α qui représente ainsi la puissance de l'origine par rapport au cercle.

On étudie très facilement toute autre question concernant la géométrie du cercle au moyen de ces auxiliaires.

30. — Il existe deux sortes de déplacements qui laissent O fixe: les rotations autour de O et les déplacements inverses autour de O.

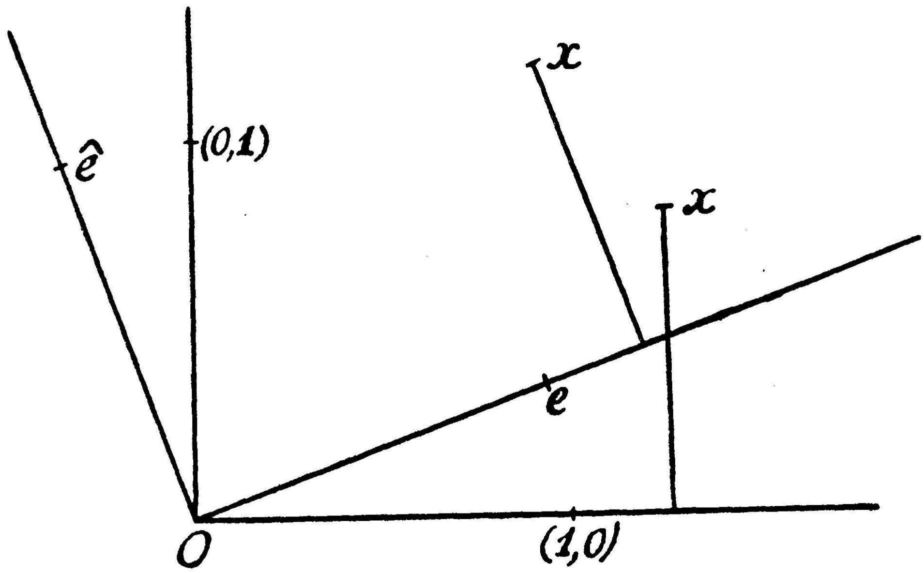

Fig. 5.

Une rotation autour de O (fig. 5) transporte le vecteur unité (1,0) sur un autre vecteur unité e, et par là chaque vecteur $(\lambda, 0)$ sur le vecteur λe; en même temps le vecteur (0, 1) se transporte sur $\hat{e}$ et chaque vecteur $(0, \mu)$ sur $\mu \hat{e}$. Elle transportera donc un point quelconque x en un point correspondant x', déterminé par la relation

$$x' = x_1 e + x_2 \hat{e} \,. \tag{1}$$

L'on peut écrire ceci facilement en coordonnées; si

$$e = (e_1\,,\, e_2)\;, \qquad \hat{e} = (-\,e_2\,,\, e_1)$$

il en résulte

$$x_1' = e_1 x_1 - e_2 x_2 \;,$$

$$x_2' = e_2 x_1 + e_1 x_2 \;.$$

Un déplacement inverse autour de O qui déplace (1, 0) sur e, déplace en même temps (0, 1) sur $-\hat{e}$; il s'exprime donc par la formule

$$x' = x_1 e - x_2 \hat{e} \,. \tag{2}$$

Tout déplacement dans le plan se ramène à l'un des déplacements (1) ou (2) combiné avec une translation. De l'équation (1) découle la relation

$$(x' - y')^2 = (x - y)^2 \;, \qquad x'y' = xy \;, \qquad \hat{x}'y' = \hat{x}y \;,$$

si x et y signifient deux points qui se transportent en x' et y' par une rotation autour de l'origine. Les grandeurs $(x - y)^2$, xy et $\hat{x}y$ sont donc invariables quelle que soit la rotation autour de O.

De l'équation (2) découle de même que $(x - y)^2$ et xy sont invariables, tandis que $\hat{x}y$ change de signe.

La longueur $\sqrt{(x - y)^2}$ est invariable quel que soit le déplacement.

31. — On peut représenter une similitude directe, formée par une rotation autour de O et une multiplication, par la formule

$$x' = x_1 a + x_2 \hat{a}$$

où a est le vecteur qui dans la similitude correspond au vecteur unité (1, 0) sur l'axe des x, tandis que $\hat{a}$ correspond au vecteur unité (0, 1) sur l'axe des y.

Une similitude inverse, où (1, 0) correspond à a et (0, 1) correspond à $-\widehat{a}$ est représentée par la formule

$$x' = x_1\, a - x_2\, \widehat{a}\ .$$

Les longueurs des vecteurs correspondants ont dans les deux cas le rapport constant $\sqrt{a^2}$.

32. — *Signification de* $\widehat{a\, b}$.

$\widehat{a\, b}$ ne change pas de valeur, lorsqu'on déplace l'extrémité de l'un des vecteurs parallèlement à l'autre; l'on a

$$\widehat{a\,(b} + \lambda a) = \widehat{a\, b}\ ,$$

et

$$\widehat{(a} + \lambda \widehat{b)}\, b = \widehat{a\, b}\ .$$

Si l'on mène par b, parallèle au vecteur a (fig. 6), une ligne

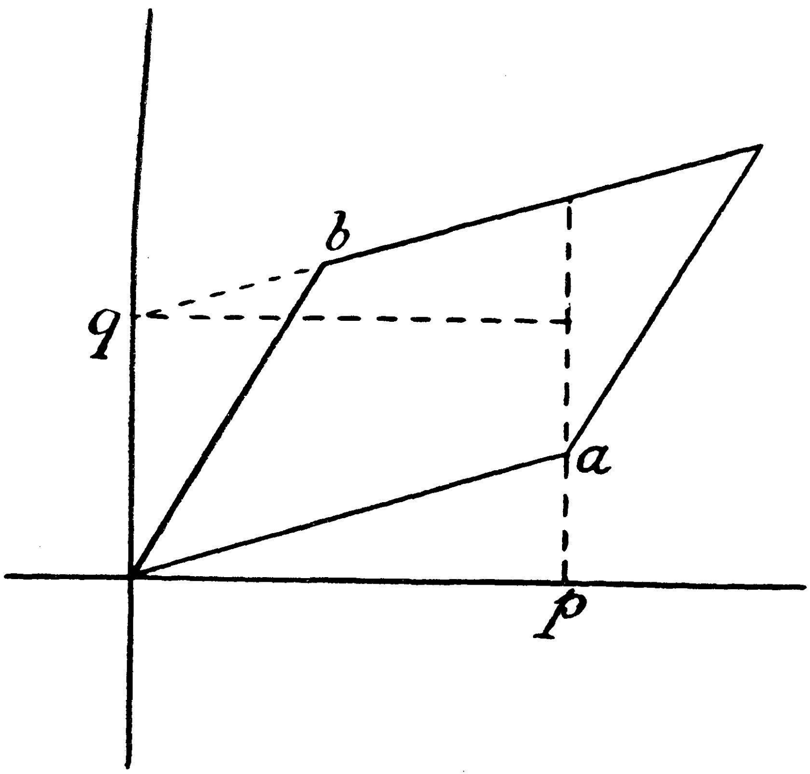

Fig. 6.

qui coupe l'axe des y en q, et par a, parallèle au vecteur q, une ligne qui coupe l'axe des x en p, l'on obtient

$$\widehat{a\, b} = \widehat{a\, q} = \widehat{p\, q}\ .$$

Ce produit est l'aire du rectangle formé par p et q, et puisque des réflexions élémentaires connues montrent que celui-ci est égal au parallélogramme aq qui est lui-même égal au parallélogramme ab, nous voyons que l'aire du parallélogramme formé par les deux vecteurs a et b s'exprime par $\widehat{a\,b}$; nous devons cependant remarquer que ce nombre est muni du signe $+$ ou $-$ suivant que le sens rotatif de a vers b est orienté du côté positif ou du côté négatif.

Nous fixons donc le nombre $\widehat{a\,b}$ *comme nombre-mesure du parallélogramme formé par les deux vecteurs* a *et* b, *nommés dans cet ordre. Au triangle qui a* a *et* b *pour côtés nous attribuons le nombre-mesure* $\frac{1}{2}\,\widehat{a\,b}$.

33. — Afin de fixer des nombres-mesure pour les aires d'autres figures nous considérons d'abord un triangle quelconque abc (fig. 7); nous effectuons une translation qui déplace a sur l'origine de sorte que

$$b \longrightarrow b - a\ , \qquad c \longrightarrow c - a\ .$$

Le nouveau triangle a l'aire

$$\frac{1}{2}\,\widehat{(b - a)\,(c - a)} = \frac{1}{2}\,(\widehat{b\,c} + \widehat{c\,a} + \widehat{a\,b})$$

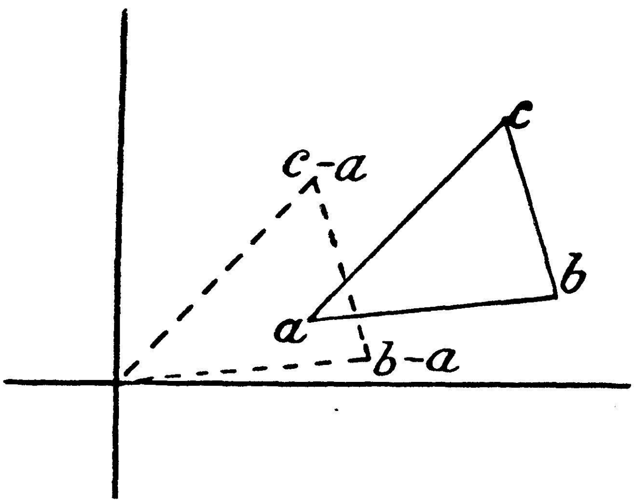

Fig. 7.

et nous fixons donc ceci comme nombre-mesure pour l'aire du $\Delta\,abc$. L'expression s'interprète immédiatement comme la somme des trois triangles Obc, Oca, Oab. La façon dont elle a été formée établit *a priori* qu'elle est indépendante de la position de l'origine par rapport au triangle et de toute translation du triangle.

34. — *Pour l'aire d'un polygone quelconque* abcde *il semble donc naturel de fixer le nombre-mesure*

$$\frac{1}{2}\,(\widehat{a\,b} + \widehat{b\,c} + \widehat{c\,d} + \widehat{d\,e} + \widehat{e\,a})$$

et l'on voit facilement que toute translation de la figure laisse invariable cette expression.

Pour faire voir que tout déplacement direct laisse invariable ce nombre-mesure — d'où il découle que les figures congruentes auront les mêmes aires — il faut seulement démontrer encore que toute rotation autour de O le laisse invariable. Mais ceci résulte de ce qui précède car cette rotation laisse invariable tous les termes $\widehat{ab}$, $\widehat{bc}$ ... Les déplacements inverses font changer de signe aux aires.

Nous vérifions ultérieurement que le nombre-mesure susdit satisfait à la condition suivante: si une figure est divisée en deux parties, la somme des aires de celles-ci sera égale à l'aire de la figure entière. Ceci se vérifie immédiatement, car dans l'expression (fig. 8):

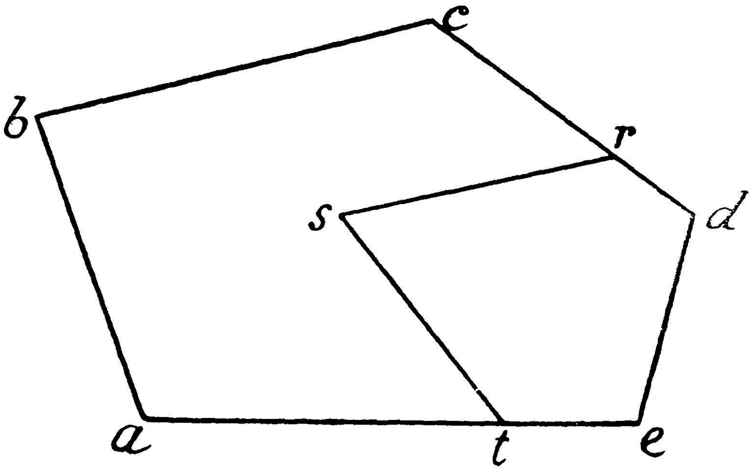

Fig. 8.

$$\frac{1}{2}(\widehat{ab} + \widehat{bc} + \widehat{cr} + \widehat{rs} + \widehat{st} + \widehat{ta}) + \frac{1}{2}(\widehat{rd} + \widehat{de} + \widehat{et} + \widehat{ts} + \widehat{sr})$$

l'on a

$$\widehat{cr} + \widehat{rd} = \widehat{cd} ,$$

$$\widehat{et} + \widehat{ta} = \widehat{ea} ,$$

car ceci exprime seulement que les « triangles » *crd* et *eta* ont l'aire zéro; comme de plus

$$\widehat{rs} + \widehat{st} + \widehat{ts} + \widehat{sr} = 0$$

la somme des deux parties devient justement égale à l'aire entière

$$\frac{1}{2}(\widehat{ab} + \widehat{bc} + \widehat{cd} + \widehat{de} + \widehat{ea}) .$$