

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 38 (1939-1940)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** LA GÉOMÉTRIE SENSIBLE  
**Autor:** Hjelmslev, Johannes  
**Kapitel:** III. — Multiplication des vecteurs.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-515790>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 17.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

en effectuant une rotation de  $90^\circ$  du côté positif, QS aura la même orientation que PR.

Pour que le quadrilatère PQRS devienne un carré, il faut que les deux segments PR et QS aient le même milieu, c'est-à-dire

$$Q + S = P + R$$

d'où l'on déduit grâce aux relations ci-dessus

$$\widehat{C} - \widehat{B} + \widehat{A} - \widehat{D} = \widehat{B} - \widehat{A} + \widehat{D} - \widehat{C}, \quad \text{ou} \quad D - C = A - B,$$

c'est-à-dire: le quadrilatère ABCD doit être un parallélogramme.

### III. — MULTIPLICATION DES VECTEURS.

18. — *On appelle produit de deux vecteurs le scalaire que l'on obtient en additionnant le produit des abscisses entre elles et le produit des ordonnées entre elles.*

Ecrivons:

$$a . b \quad \text{ou} \quad ab = a_1 b_1 + a_2 b_2 .$$

Il en résulte que

$$\begin{aligned} ab &= ba , \\ a(b + c) &= ab + ac , \\ a . 0 &= 0 . a = 0 , \\ a \widehat{a} &= 0 , \quad a . \lambda \widehat{a} = 0 . \end{aligned}$$

19. — De l'équation

$$a(b + \lambda \widehat{a}) = ab ,$$

il s'ensuit que le produit  $ab$  reste invariable lorsque l'extrémité de l'un des vecteurs parcourt une droite perpendiculaire à l'autre. Il en résulte en particulier que *le produit  $ab$  est égal au produit de l'un des vecteurs et la projection de l'autre vecteur sur le premier.*

$a . b = 0$  signifie donc que les deux vecteurs  $a$  et  $b$  sont orthogonaux ou que l'un d'eux (ou les deux) est égal à zéro.

$\widehat{a}b = 0$  signifie que  $a$  et  $b$  se trouvent sur la même ligne ou sur des lignes parallèles.

Remarquons que

$$\widehat{a}b = a_1 b_2 - a_2 b_1 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Au lieu du produit  $aa$  l'on écrit aussi  $a^2$  (carré de  $a$ ), donc

$$a^2 = a_1^2 + a_2^2.$$

De l'identité

$$A(B - C) + B(C - A) + C(A - B) = 0$$

l'on déduit que lorsque  $\overline{OA}$  est orthogonal à  $\overline{BC}$  et  $\overline{OB}$  orthogonal à  $\overline{CA}$ , l'on a aussi  $\overline{OC}$  orthogonal à  $\overline{AB}$ , c'est-à-dire le théorème que les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes.

20. — L'on peut *représenter une ligne droite* menée par un point donné  $a$  et parallèle au vecteur  $b$  à l'aide d'un point variable  $x$ , exprimé par le paramètre  $\lambda$

$$x = a + \lambda b,$$

ou par l'équation

$$(x - a) \widehat{b} = 0.$$

En particulier l'on a pour la ligne droite qui unit deux points donnés  $a$  et  $b$  la représentation paramétrique

$$x = a + \lambda(b - a),$$

ou l'équation

$$(x - a) \widehat{(b - a)} = 0,$$

qui s'écrit aussi

$$x \widehat{(a - b)} = \widehat{a}b.$$

21. — Deux vecteurs  $a$  et  $b$  sur la même droite ont un rapport  $\lambda$ . En les multipliant par le même vecteur  $c$  (qui ne leur est

pas orthogonal) l'on obtient deux scalaires qui ont aussi le rapport  $\lambda$ . Car

$$a = \lambda b ,$$

entraîne

$$ac = \lambda . bc .$$

Lorsqu'il s'agit de deux vecteurs  $a$  et  $b$  sur la même droite l'on peut donc écrire

$$\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc} ,$$

ou: dans le rapport  $\frac{a}{b}$  l'on peut multiplier le numérateur et le dénominateur par le même vecteur  $c$ .

22. — En voici une application.

L'on entend par bi-rapport (ABCD) de 4 points sur une droite (fig. 4) le nombre

$$\begin{aligned} (ABCD) &= \frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} : \frac{\overline{BC}}{\overline{BD}} = \\ &= \frac{C - A}{D - A} : \frac{C - B}{D - B} . \end{aligned}$$

Si l'on multiplie le numérateur et dénominateur du premier rapport par  $\widehat{A}$ , et le numérateur et dénominateur du deuxième rapport par  $\widehat{B}$ , l'on obtient :

$$(ABCD) = \frac{\widehat{AC}}{\widehat{AD}} : \frac{\widehat{BC}}{\widehat{BD}} .$$

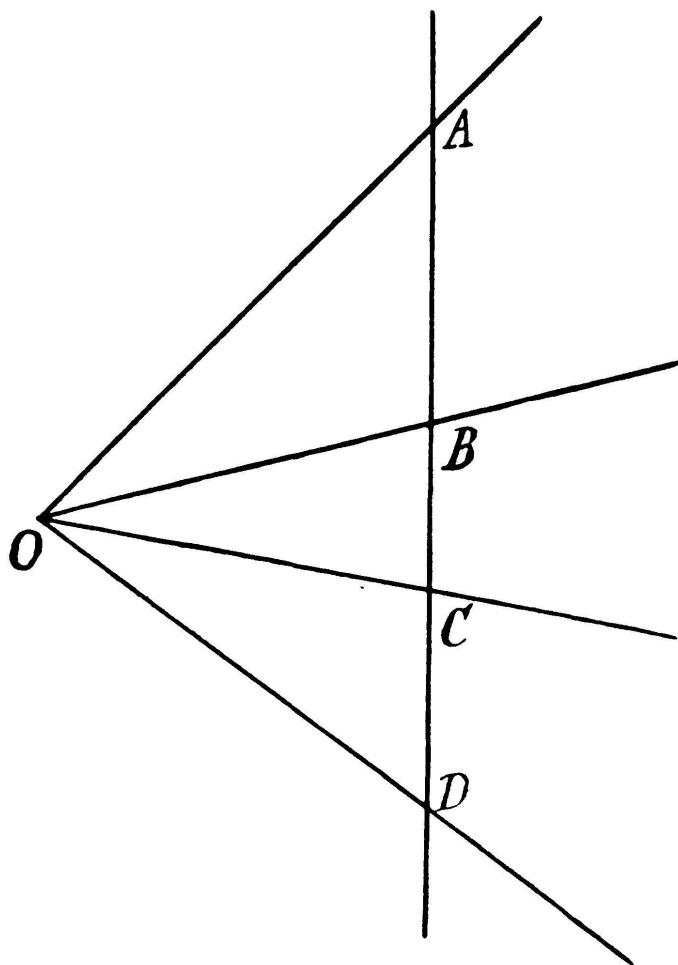


Fig. 4.

Cette expression ne change pas de valeur lorsqu'on multiplie A par un scalaire quelconque  $\lambda$ ; non plus lorsqu'on multiplie B, C

ou D par un scalaire quelconque. Mais cela signifie qu'elle reste invariable lorsque les points A, B, C, D se déplacent d'une façon absolument quelconque sur les 4 droites qui les réunissent à O. Il en résulte entre autre que toute ligne droite coupera les 4 lignes en 4 points de même bi-rapport.

23. — Comme exemple de calcul de vecteurs nous allons résoudre le problème suivant:

Décomposer un vecteur  $c$  en deux autres aux orientations connues  $a$  et  $b$ , naturellement non parallèles.

De l'équation

$$\alpha a + \beta b = c ,$$

nous obtenons, en multipliant respectivement par  $\widehat{b}$  et  $\widehat{a}$ ,

$$\alpha = \frac{\widehat{b} c}{\widehat{b} a} , \quad \beta = \frac{\widehat{a} c}{\widehat{a} b} ,$$

ce qui est identique à la résolution connue des deux équations

$$\begin{aligned} a_1 \alpha + b_1 \beta &= c_1 , \\ a_2 \alpha + b_2 \beta &= c_2 . \end{aligned}$$

Si l'on introduit les solutions obtenues dans l'équation initiale, l'on obtient l'identité

$$(\widehat{a} b) c = (\widehat{a} c) b - (\widehat{b} c) a ;$$

si l'on remplace  $c$  par  $\widehat{c}$  l'on a, en multipliant ensuite par un vecteur quelconque  $d$ ,

$$(\widehat{a} b) (\widehat{c} d) = (ac) (bd) - (bc) (ad) ,$$

c'est-à-dire la formule bien connue pour le produit de deux déterminants

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ d_1 & d_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ac & ad \\ bc & bd \end{vmatrix} .$$

Il en résulte spécialement

$$(\widehat{a} b)^2 = a^2 b^2 - (ab)^2$$

ou

$$(\widehat{a} b)^2 + (ab)^2 = a^2 b^2 .$$