

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 38 (1939-1940)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** LA GÉOMÉTRIE SENSIBLE  
**Autor:** Hjelmslev, Johannes  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-515790>

#### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 15.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## LA GÉOMÉTRIE SENSIBLE

(2<sup>me</sup> article) <sup>1</sup>.

PAR

Johannes HJELMSLEV (Copenhague).

## LA GÉOMÉTRIE DU PLAN QUADRILLÉ

### I. — PROPRIÉTÉS FONDAMENTALES DU RÉSEAU QUADRILLÉ.

1. — Dans un réseau quadrillé limité par le rectangle OABC l'on détermine chaque nœud P par les deux nombres entiers  $r$  et  $s$  (coordonnées) qui indiquent le nombre d'unités contenues dans

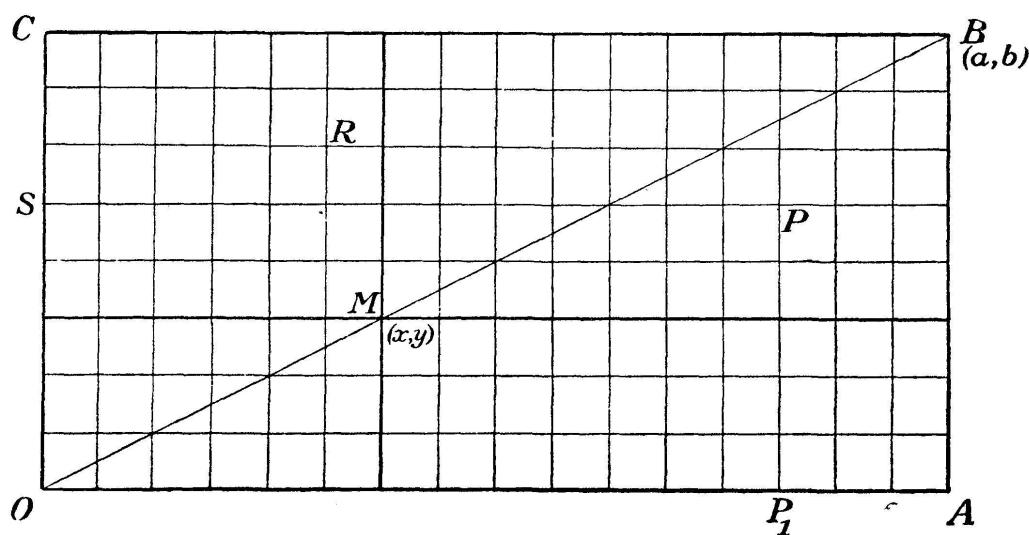


Fig. 1.

les segments  $OP_1$  et  $P_1P$ . L'on écrit  $P = (r, s)$ . En particulier  $O = (0, 0)$ ,  $B = (a, b)$ .

La diagonale OB traverse sur la figure quelques-uns des nœuds intérieurs. Soit  $M = (x, y)$  l'un d'entre eux. Les deux

<sup>1</sup> Pour le premier article, voir *L'Ens. math.*, t. 38, p. 7-26.

lignes formant le nœud M divisent tout le rectangle en quatre rectangles, un de chaque côté de la diagonale, et deux autres traversés par celle-ci. *Les deux premiers contiennent toujours le même nombre de mailles du réseau*; car les deux grands triangles que la diagonale produit en divisant tout le rectangle contiennent le même nombre de mailles entières, et les petits triangles au-dessus de la diagonale contiennent autant de mailles entières que les petits triangles sous la diagonale. En soustrayant l'on voit que les deux rectangles CM et MA qui ne sont pas traversés par la diagonale contiennent exactement le même nombre de mailles. Ajoutons à chacun de ces rectangles le rectangle OM et nous obtenons

$$ay = bx, \quad \text{ou} \quad y = \frac{b}{a}x.$$

2. — Soit P un nœud qui se trouve sous la diagonale, c'est-à-dire dans le triangle OAB. Ses coordonnées  $x, y$ , satisferont à l'inégalité

$$y < \frac{b}{a}x.$$

Pourquoi ? Tout d'abord il y a autant de mailles entières, disons  $k$ , au-dessus et au-dessous de la diagonale ; ensuite, puisque P se trouve au-dessous de la diagonale, il se trouve au moins  $k + 1$  mailles entières au-dessus de la ligne brisée OPB, alors qu'il y en a  $k$  au plus au-dessous de celle-ci. Mais le rectangle OP contient le même nombre de mailles de chaque côté de la diagonale OP, et de même le rectangle PB contient le même nombre de mailles de chaque côté de la diagonale PB. En soustrayant l'on voit que le rectangle CP contient plus de mailles que le rectangle PA, et en ajoutant le rectangle OP l'on voit qu'il y a plus de mailles à gauche de la ligne verticale par P qu'au-dessous de la ligne horizontale par P, c'est-à-dire

$$xb > ya, \quad \text{ou} \quad y < \frac{b}{a}x,$$

ce qu'il fallait démontrer.

Quant aux points  $(x, y)$  au-dessus de la diagonale, l'on établit de la même façon que

$$y > \frac{b}{a}x .$$

3. — Imaginons le réseau quadrillé divisé en carrés plus fins dont le côté est  $\frac{1}{n}$  de l'unité primitive; l'on pourra alors exprimer les nouveaux noeuds par des coordonnées fractionnaires. Mais l'on voit que le critère pour qu'un point  $(x, y)$  se trouve sur, au-dessus ou au-dessous de la diagonale OB, reste toujours respectivement

$$y = \frac{b}{a}x , \quad y > \frac{b}{a}x , \quad y < \frac{b}{a}x .$$

L'on dit alors que l'équation de la diagonale OB est  $y = \frac{b}{a}x$ .

*Exemples.* — Prenons  $a = 87$ ,  $b = 37$ , et l'unité du réseau 1 cm; si nous cherchons l'ordonnée  $y$  au point sur OB dont l'abscisse est  $x = 27$ , nous obtenons

$$y = 11 \frac{14}{29} .$$

Si l'on ne veut calculer qu'en centimètres entiers, l'on sait donc que l'ordonnée se trouve entre 11 et 12 cm. Si l'on calcule en millimètres, l'on obtient

$$y = 114 \frac{24}{29}$$

c'est-à-dire que  $y$  se trouve entre 114 et 115 mm.

Si  $x = 40$ , l'unité du réseau étant toujours 1 cm, l'on a

$$y = 17 \frac{1}{87} \text{ cm} .$$

Nous trouvons ici, il est vrai, un nombre qui est plus grand que 17. Mais  $\frac{1}{87}$  cm est peu de chose, si peu que cela existe à peine sur le dessin, et en tout cas sans importance en ce qui concerne beaucoup de mesurages. En calculant avec les mêmes nombres pour un réseau millimétrique l'on obtient  $y = 17 \frac{1}{87}$  mm,

et cette petite fraction sera sans aucune importance dans le mesurage réel.

Les nombres que l'on obtient par de tels calculs peuvent donc être plus fins que les grandeurs à mesurer. Mais naturellement ils rendent quand même le service désiré, puisqu'ils fournissent toujours les nombres inférieurs et supérieurs dont on a besoin. L'on peut employer les nombres obtenus quelle que soit l'unité du réseau, mais ils peuvent dans quelques cas se révéler trop fins, de sorte qu'il faudra se servir de nombres plus grossiers; ces derniers se déduisent immédiatement des premiers.

4. — Considérons maintenant un réseau quadrillé qui remplit tout le plan à dessiner dont nous nous servons. Pour abréger l'on appellera horizontales et verticales les deux rangées de lignes. Deux lignes perpendiculaires au milieu du plan sont les axes des coordonnées, la ligne horizontale est l'axe des  $x$ , la ligne verticale l'axe des  $y$ , leur point d'intersection est l'origine. L'on désigne chaque nœud par deux coordonnées  $x$  et  $y$ , de sorte que  $x$  (l'abscisse) désigne le nombre d'unités qu'il faut parcourir le long de l'axe des  $x$ , en partant de l'origine, pour arriver à la ligne verticale qui traverse le point considéré, tandis que  $y$  (l'ordonnée) désigne le nombre d'unités qu'il faut ensuite parcourir le long de cette ligne verticale pour atteindre le point lui-même. Il faut cependant remarquer ici que l'on munit ces deux nombres de signes; pour l'abscisse + ou — selon que l'on parcourt l'axe des  $x$  à droite ou à gauche, pour l'ordonnée + ou — selon que l'on monte ou descend de l'axe des  $x$  pour atteindre le point; on désigne le point même par  $(x, y)$ .

Il y a ainsi une correspondance entre l'ensemble de nœuds et tous les systèmes possibles de deux nombres entiers, positifs, négatifs, ou zéro, situés dans les limites que trace le plan à dessiner.

5. — Le réseau de nœuds peut se déplacer « sur lui-même » le long de l'axe des  $x$  ou de l'axe des  $y$ , de sorte qu'un nœud se déplace sur un autre. Une telle translation le long de l'axe des  $x$  augmentera toutes les abscisses d'un même nombre (positif ou négatif) tandis que les ordonnées resteront invariables. Le

contraire se produit si la translation a lieu le long de l'axe des  $y$ . Si l'on effectue une translation le long de l'axe des  $x$  et une translation le long de l'axe des  $y$  l'une après l'autre, le déplacement total correspondra à une simple translation qui déplace le point  $(0, 0)$  sur un autre nœud quelconque  $(a, b)$ . Cette translation déplace un nœud quelconque  $(x, y)$  sur le nœud  $(x + a, y + b)$ , de sorte que l'on peut exprimer la transformation comme suit:

$$(x, y) \rightarrow (x + a, y + b) .$$

6. — Un réseau peut se déplacer sur lui-même d'autres façons. On peut lui faire subir une rotation de  $90^\circ$  autour de l'origine, de sorte que l'axe positif des  $x$  recouvre l'axe positif des  $y$ . L'on voit alors que le point  $(x, y)$  se trouve en  $(-y, x)$ . L'on peut aussi envisager une rotation du côté opposé, par laquelle  $(x, y) \rightarrow (y, -x)$ .

Si l'on effectue, deux fois de suite, du côté positif une rotation de  $90^\circ$  autour de l'origine, le point  $(x, y)$  se trouvera en  $(-x, -y)$ . L'on appelle ce déplacement une demi-rotation autour de l'origine.

Enfin le réseau coïncide avec lui-même, grâce à une symétrie par rapport à l'axe des  $x$  ou à l'axe des  $y$ ; l'une des coordonnées change alors de signe, tandis que l'autre reste invariable.

7. — L'on constate maintenant que la ligne droite qui unit  $(0, 0)$  à  $(a, b)$ ,  $a$  et  $b$  étant positifs, et qui se prolonge de façon à contenir aussi  $(-a, -b)$ , a pour équation

$$y = \frac{b}{a}x ,$$

Ceci veut dire que tous les nœuds  $(x, y)$  qui se trouvent sur cette ligne satisfont à l'équation, tandis que les nœuds  $(x, y)$  au-dessus et au-dessous de la ligne satisfont aux inégalités

$$y \geqslant \frac{b}{a}x .$$

Ce que l'on voit directement à l'aide de 1 et 2. Au moyen d'une

symétrie (un mirage) par rapport à l'axe des  $x$  l'on obtient une ligne droite dont l'équation est

$$y = -\frac{b}{a}x ,$$

ce qui permet de constater que toutes les lignes obliques qui unissent l'origine à d'autres nœuds peuvent être représentées par l'équation

$$y = \alpha x , \quad \text{ou} \quad \alpha \geqslant 0 .$$

8. — L'on constate ensuite par une translation de  $(0, 0)$  sur  $(p, q)$  qu'une ligne droite qui traverse  $(p, q)$  et qui est parallèle à la ligne  $y = \alpha x$ , peut être représentée par l'équation

$$y - q = \alpha(x - p) ,$$

où  $\alpha$  s'appelle la pente de la ligne.

Puisque le point  $(a, b)$  se déplace sur  $(-b, a)$  par une rotation de  $90^\circ$  du côté positif, autour de l'origine, l'on constate que les pentes de deux droites perpendiculaires peuvent s'exprimer par  $\frac{b}{a}$  et  $-\frac{a}{b}$ , c'est-à-dire que le produit des pentes est égal à  $-1$ .

9. — L'on joint à ces éléments préliminaires de la géométrie analytique du réseau quadrillé des exemples variés, tels que détermination de lignes droites par deux points, de lignes perpendiculaires l'une sur l'autre, de lignes parallèles, du point d'intersection de deux lignes, etc...

Mais tout notre domaine de travail n'est toujours que le réseau quadrillé empirique dans le plan à dessiner, où les coordonnées sont des nombres entiers, en introduisant cependant — par une réduction de l'unité du réseau — les nombres fractionnaires au fur et à mesure que les applications le nécessitent.

## II. — INTRODUCTION DES VECTEURS.

10. — Nous travaillons toujours à l'aide du système de coordonnées introduit dans le chapitre précédent. Pour abréger, introduisons les notions suivantes:

Le point «  $a$  » a pour coordonnées  $(a_1, a_2)$ . La translation que l'on obtient en déplaçant l'origine sur le point  $a$  se désigne aussi par  $a$ . Elle a cet effet: les abscisses et ordonnées de tous les points s'accroissent respectivement de  $a_1$  et  $a_2$ .

Un vecteur  $a$  signifie un segment qui commence à l'origine et finit au point  $a$ . On désigne ainsi le vecteur par la même lettre  $a$  que son extrémité.

La lettre  $a$  sert donc de notation pour le point, la translation ou le vecteur, suivant les circonstances.  $a_1$  et  $a_2$  désignent de même les coordonnées du point, de la translation, ou du vecteur.

11. — De deux vecteurs  $a = (a_1, a_2)$  et  $b = (b_1, b_2)$ , l'on dérive un nouveau vecteur  $c$  que l'on appelle *la somme de  $a$  et  $b$* . Ceci signifie que l'on obtient la translation  $c$  en combinant les translations  $a$  et  $b$ . Nous savons d'après ce qui précède que l'on obtient les coordonnées de  $c$ ,  $c_1$  et  $c_2$ , en additionnant les coordonnées de  $a$  et  $b$ . L'on écrit

$$c = a + b ,$$

ce qui signifie en coordonnées,

$$c_1 = a_1 + b_1 , \quad c_2 = a_2 + b_2 .$$

Si les vecteurs  $a$  et  $b$  se trouvent sur deux lignes différentes,  $c$  est diagonale de leur parallélogramme. S'ils se trouvent sur la même ligne, l'on obtient la somme en plaçant l'un des vecteurs en prolongation de l'autre (en avant ou en arrière suivant son orientation).

Lorsqu'on additionne les vecteurs, les abscisses s'additionnent entre elles et les ordonnées de même. L'ordre des vecteurs à additionner est indifférent; de même lorsqu'il y en a plusieurs.

Un vecteur spécial est le vecteur zéro qui commence et finit à l'origine. On le désigne par  $O$ , ou  $(0, 0)$ , ou simplement par  $0$ ; la translation correspondante est nulle (immobilité).

On dit que deux vecteurs sont opposés lorsque leur somme est  $0$ . Les translations correspondantes se neutralisent alors réciproquement. Au vecteur  $a = (a_1, a_2)$  correspond le vecteur opposé  $(-a_1, -a_2)$ . On le désigne par  $(-a)$ .

12. — A propos de l'addition des vecteurs l'on peut aussi parler de soustraction, en établissant que

$$a - b = c$$

doit signifier que

$$c + b = a .$$

On s'aperçoit tout de suite que la soustraction d'un vecteur s'effectue par la soustraction de ses coordonnées, ou encore que l'on soustrait un vecteur en additionnant le vecteur opposé. Il s'ensuit aussi qu'en soustrayant un vecteur d'un autre vecteur on obtient un vecteur dont la grandeur et l'orientation s'expriment par le segment qui commence à l'extrémité du premier vecteur et finit à l'extrémité du second. Cette façon intelligible d'exprimer la soustraction a une grande importance. Et pour pouvoir l'utiliser entièrement nous étendrons la dénomination des vecteurs de telle sorte que nous parlerons du vecteur  $\overline{AB}$  d'un point quelconque A à un point quelconque B dans le réseau, en désignant par cela le vecteur dont la grandeur et l'orientation sont représentées par ce segment.

L'on écrit alors

$$\overline{AB} = B - A ;$$

l'on peut dire naturellement que cette dénomination conduit à ce que l'on devrait écrire  $\overline{OA}$  ou  $\overline{OB}$  pour A et B, mais pour les vecteurs dont l'origine est O nous maintiendrons la désignation courte, c'est-à-dire par l'extrémité seule.

L'on a  $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} = 0$  ce qui exprime seulement que les trois translations se neutralisent.

13. — D'après l'emploi habituel du nombre naturel  $m$ ,  $m$  fois le vecteur  $a$  doit désigner  $a + a + \dots + a$  ( $m$  fois).

Nous écrivons

$$ma = a + a + \dots + a \text{ ( $m$  fois)} , \quad \text{d'où} \quad ma = (ma_1, ma_2) .$$

D'après l'emploi habituel de la fraction,  $\frac{1}{q} a$  doit signifier le

vecteur qui multiplié par  $q$  produit  $a$ , c'est-à-dire

$$\frac{1}{q}a = \left( \frac{1}{q}a_1, \frac{1}{q}a_2 \right),$$

d'où

$$\frac{p}{q}a = \left( \frac{p}{q}a_1, \frac{p}{q}a_2 \right).$$

De plus, d'après l'emploi habituel du nombre négatif ( $-m$ ), ( $-m$ )  $a$  doit avoir la même signification que  $m$  ( $-a$ ), c'est-à-dire

$$(-m)a = (-ma_1, -ma_2).$$

L'on peut résumer ces règles en une seule: lorsque  $\lambda$  est un scalaire (nombre entier ou fractionnaire, positif ou négatif)  $\lambda a$  doit signifier  $(\lambda a_1, \lambda a_2)$ : on multiplie un vecteur par un scalaire  $\lambda$  en multipliant ses coordonnées par  $\lambda$ . On dit aussi que l'on multiplie le point  $a$  par  $\lambda$ . Si l'on multiplie tout un système de noeuds par  $\lambda$ , tous les vecteurs du système seront multipliés par  $\lambda$ . On dit que le nouveau système de noeuds est homothétique du système initial dans le rapport  $\lambda$ .

14. — Si l'on a deux vecteurs  $a$  et  $b$  qui satisfont à l'équation

$$b = \lambda a,$$

l'on écrit aussi

$$\frac{b}{a} = \lambda;$$

ceci pour s'exprimer ainsi: le rapport entre  $b$  et  $a$  est égal à  $\lambda$ , mais on peut seulement employer cette façon de parler pour exprimer une relation entre deux vecteurs quand ceux-ci se trouvent sur la même droite ou sur des droites parallèles.

$0 \cdot a$  signifie naturellement 0.

15. — A l'aide des coordonnées des vecteurs  $a$  et  $b$ , l'on démontre tout de suite que

$$\lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b,$$

et aussi

$$\lambda(a - b) = \lambda a - \lambda b.$$

L'on remarque de plus que

$$(\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a, \quad \text{et} \quad \lambda(\mu a) = \mu(\lambda a) = (\lambda\mu)a,$$

$\lambda$  et  $\mu$  étant deux scalaires quelconques.

*Applications.* — 1<sup>o</sup> Trouver le milieu d'un segment dont les extrémités sont  $a$  et  $b$ :

$$m = a + \frac{1}{2}(b - a) = \frac{1}{2}(a + b).$$

2<sup>o</sup> Partager en trois parties égales un segment  $a b$ . Les points intermédiaires étant  $m$  et  $n$  l'on trouve

$$m = a + \frac{1}{3}(b - a) = \frac{1}{3}(2a + b)$$

$$n = a + \frac{2}{3}(b - a) = \frac{1}{3}(a + 2b).$$

On en déduit que le point  $\frac{1}{3}(a + b + c)$  se trouve sur les trois médianes du triangle  $a b c$  et divise chacune d'elles dans le rapport 1 : 2.

3<sup>o</sup> Partager le segment  $a b$  dans le rapport  $p : q$ .

$$x = a + \frac{p}{p+q}(b - a) = \frac{pb + qa}{p+q}.$$

4<sup>o</sup> Tracer un vecteur qui commence en  $c$  et est égal à  $\lambda \overline{ab}$ .

$$x = c + \lambda(b - a).$$

5<sup>o</sup> Des relations  $\overline{AB} = \lambda \cdot \overline{ab}$ ,  $\overline{BC} = \lambda \cdot \overline{bc}$ , on déduit par addition  $\overline{AC} = \lambda \cdot \overline{ac}$ . Il en résulte l'existence de triangles où les côtés correspondants sont parallèles et les vecteurs correspondants sont proportionnels.

## 16. — Vecteur viré. — Vecteur orthogonal.

Nous définissons le vecteur *viré* d'un vecteur  $a = (a_1, a_2)$  par la relation

$$\widehat{a} = (-a_2, a_1);$$

$\widehat{a}$  est donc le vecteur que l'on obtient en faisant subir au vecteur  $a$ , du côté positif, une rotation de  $90^\circ$  autour de l'origine.

Un vecteur quelconque orthogonal à  $a$  ( $\perp a$ ) s'exprime alors par

$$\widehat{\lambda a} = (-\lambda a_2, \lambda a_1) .$$

L'on remarque que  $\widehat{a} = -a$ , et  $\widehat{a - b} = \widehat{a} - \widehat{b}$ .

Si l'on fait tourner le point  $a$  d'un angle droit autour du point  $b$ , du côté positif, le nouveau point obtenu sera

$$b + \widehat{a - b} .$$

Si l'on mène du point  $c$  le vecteur viré de  $\overline{ab}$ , son extrémité peut s'exprimer ainsi

$$c + \lambda \widehat{b - a} , \quad \text{ou} \quad c + \lambda (\widehat{b} - \widehat{a}) .$$

Si l'on construit un triangle rectangle isocèle  $a b c$  (fig. 2) du côté positif de  $\overline{ab}$ ,  $\overline{ab}$  étant la base, l'on obtient

$$c = \frac{1}{2} (a + b) + \frac{1}{2} (\widehat{b} - \widehat{a}) .$$

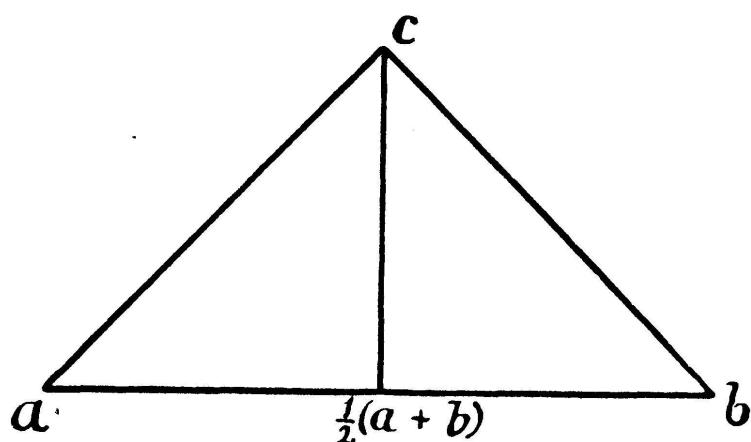


Fig. 2.

17. — Nous employons ceci pour examiner la figure PQRS, que l'on obtient en construisant sur les côtés du quadrilatère ABCD comme hypoténuses des triangles rectangles isocèles ABP, BCQ, CDR, DAS orientés positivement (fig. 3). Nous

trouvons alors :

$$P = \frac{1}{2}(A + B) + \frac{1}{2}(\widehat{B} - \widehat{A})$$

$$Q = \frac{1}{2}(B + C) + \frac{1}{2}(\widehat{C} - \widehat{B})$$

$$R = \frac{1}{2}(C + D) + \frac{1}{2}(\widehat{D} - \widehat{C})$$

$$S = \frac{1}{2}(D + A) + \frac{1}{2}(\widehat{A} - \widehat{D})$$

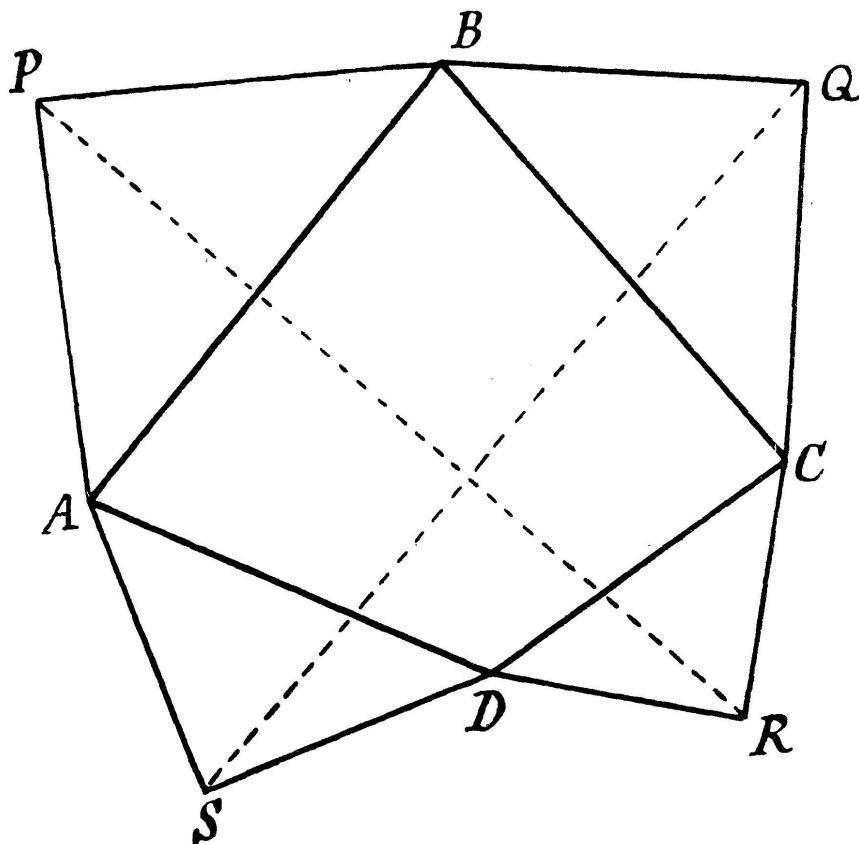


Fig. q.

D'où l'on tire :

$$\overline{PR} = \frac{1}{2}(C + D - A - B) + \frac{1}{2}(\widehat{D} + \widehat{A} - \widehat{B} - \widehat{C})$$

$$\overline{QS} = \frac{1}{2}(D + A - B - C) + \frac{1}{2}(\widehat{A} + \widehat{B} - \widehat{C} - \widehat{D}) .$$

Il en résulte

$$\widehat{\overline{QS}} = \overline{PR}$$

c'est-à-dire, les deux segments PR et QS sont égaux et orthogonaux l'un sur l'autre. En même temps l'on obtient leur orientation;

en effectuant une rotation de  $90^\circ$  du côté positif, QS aura la même orientation que PR.

Pour que le quadrilatère PQRS devienne un carré, il faut que les deux segments PR et QS aient le même milieu, c'est-à-dire

$$Q + S = P + R$$

d'où l'on déduit grâce aux relations ci-dessus

$$\widehat{C} - \widehat{B} + \widehat{A} - \widehat{D} = \widehat{B} - \widehat{A} + \widehat{D} - \widehat{C}, \quad \text{ou} \quad D - C = A - B,$$

c'est-à-dire: le quadrilatère ABCD doit être un parallélogramme.

### III. — MULTIPLICATION DES VECTEURS.

18. — *On appelle produit de deux vecteurs le scalaire que l'on obtient en additionnant le produit des abscisses entre elles et le produit des ordonnées entre elles.*

Ecrivons:

$$a \cdot b \quad \text{ou} \quad ab = a_1 b_1 + a_2 b_2.$$

Il en résulte que

$$\begin{aligned} ab &= ba, \\ a(b+c) &= ab+ac, \\ a \cdot 0 &= 0 \cdot a = 0, \\ a \widehat{a} &= 0, \quad a \cdot \lambda \widehat{a} = 0. \end{aligned}$$

19. — De l'équation

$$a(b + \lambda \widehat{a}) = ab,$$

il s'ensuit que le produit  $ab$  reste invariable lorsque l'extrémité de l'un des vecteurs parcourt une droite perpendiculaire à l'autre. Il en résulte en particulier que *le produit ab est égal au produit de l'un des vecteurs et la projection de l'autre vecteur sur le premier.*

$a \cdot b = 0$  signifie donc que les deux vecteurs  $a$  et  $b$  sont orthogonaux ou que l'un d'eux (ou les deux) est égal à zéro.

$\overbrace{ab} = 0$  signifie que  $a$  et  $b$  se trouvent sur la même ligne ou sur des lignes parallèles.

Remarquons que

$$\overbrace{ab} = a_1 b_2 - a_2 b_1 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} .$$

Au lieu du produit  $aa$  l'on écrit aussi  $a^2$  (carré de  $a$ ), donc

$$a^2 = a_1^2 + a_2^2 .$$

De l'identité

$$A(B-C) + B(C-A) + C(A-B) = 0$$

l'on déduit que lorsque  $\overline{OA}$  est orthogonal à  $\overline{BC}$  et  $\overline{OB}$  orthogonal à  $\overline{CA}$ , l'on a aussi  $\overline{OC}$  orthogonal à  $\overline{AB}$ , c'est-à-dire le théorème que les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes.

20. — L'on peut *représenter une ligne droite* menée par un point donné  $a$  et parallèle au vecteur  $b$  à l'aide d'un point variable  $x$ , exprimé par le paramètre  $\lambda$

$$x = a + \lambda b ,$$

ou par l'équation

$$(x-a)\overbrace{b} = 0 .$$

En particulier l'on a pour la ligne droite qui unit deux points donnés  $a$  et  $b$  la représentation paramétrique

$$x = a + \lambda(b-a) ,$$

ou l'équation

$$(x-a)\overbrace{(b-a)} = 0 ,$$

qui s'écrit aussi

$$x\overbrace{(a-b)} = \overbrace{ab} .$$

21. — Deux vecteurs  $a$  et  $b$  sur la même droite ont un rapport  $\lambda$ . En les multipliant par le même vecteur  $c$  (qui ne leur est

pas orthogonal) l'on obtient deux scalaires qui ont aussi le rapport  $\lambda$ . Car

$$a = \lambda b ,$$

entraîne

$$ac = \lambda \cdot bc .$$

Lorsqu'il s'agit de deux vecteurs  $a$  et  $b$  sur la même droite l'on peut donc écrire

$$\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc} ,$$

ou: dans le rapport  $\frac{a}{b}$  l'on peut multiplier le numérateur et le dénominateur par le même vecteur  $c$ .

22. — En voici une application.

L'on entend par bira rapport (ABCD) de 4 points sur une droite (fig. 4) le nombre

$$(ABCD) = \frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} : \frac{\overline{BC}}{\overline{BD}} = \\ = \frac{C - A}{D - A} : \frac{C - B}{D - B} .$$

Si l'on multiplie le numérateur et dénominateur du premier rapport par  $\widehat{A}$ , et le numérateur et dénominateur du deuxième rapport par  $\widehat{B}$ , l'on obtient :

$$(ABCD) = \frac{\widehat{A} C}{\widehat{A} D} : \frac{\widehat{B} C}{\widehat{B} D} .$$

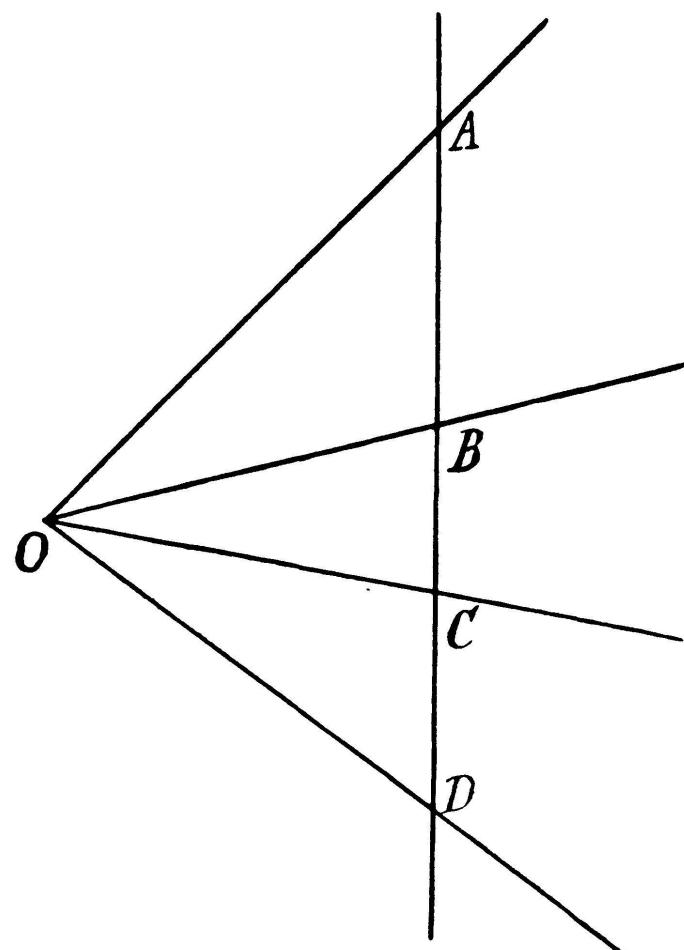


Fig. 4.

Cette expression ne change pas de valeur lorsqu'on multiplie A par un scalaire quelconque  $\lambda$ ; non plus lorsqu'on multiplie B, C

ou D par un scalaire quelconque. Mais cela signifie qu'elle reste invariable lorsque les points A, B, C, D se déplacent d'une façon absolument quelconque sur les 4 droites qui les réunissent à O. Il en résulte entre autre que toute ligne droite coupera les 4 lignes en 4 points de même bi-rapport.

23. — Comme exemple de calcul de vecteurs nous allons résoudre le problème suivant:

Décomposer un vecteur  $c$  en deux autres aux orientations connues  $a$  et  $b$ , naturellement non parallèles.

De l'équation

$$\alpha a + \beta b = c ,$$

nous obtenons, en multipliant respectivement par  $\hat{b}$  et  $\hat{a}$ ,

$$\alpha = \frac{\hat{b} c}{\hat{b} a} , \quad \beta = \frac{\hat{a} c}{\hat{a} b} ,$$

ce qui est identique à la résolution connue des deux équations

$$\begin{aligned} a_1 \alpha + b_1 \beta &= c_1 , \\ a_2 \alpha + b_2 \beta &= c_2 . \end{aligned}$$

Si l'on introduit les solutions obtenues dans l'équation initiale, l'on obtient l'identité

$$(\hat{a} b) c = (\hat{a} c) b - (\hat{b} c) a ;$$

si l'on remplace  $c$  par  $\hat{c}$  l'on a, en multipliant ensuite par un vecteur quelconque  $d$ ,

$$(\hat{a} b) (\hat{c} d) = (ac) (bd) - (bc) (ad) ,$$

c'est-à-dire la formule bien connue pour le produit de deux déterminants

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ d_1 & d_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ac & ad \\ bc & bd \end{vmatrix} .$$

Il en résulte spécialement

$$(\hat{a} b)^2 = a^2 b^2 - (ab)^2$$

ou

$$(\hat{a} b)^2 + (ab)^2 = a^2 b^2 .$$

## IV. — LONGUEUR ET AIRE.

24. — Si deux vecteurs  $a$  et  $b$  ont le même carré, c'est-à-dire si  $a \cdot a = b \cdot b$ , ou comme on peut aussi l'écrire  $a^2 = b^2$ , ils satisfont aussi à la relation

$$a^2 - b^2 = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{1}{2}(a + b) \cdot (a - b) = 0.$$

Il s'ensuit que les deux vecteurs  $a$  et  $b$  ont un axe de symétrie qui passe par l'origine et le milieu  $\frac{1}{2}(a + b)$  du segment entre les extrémités des vecteurs. Les deux vecteurs sont donc égaux (congruents).

S'il existe un nombre rationnel  $\alpha (> 0)$ , qui est égal à  $\sqrt{a_1^2 + a_2^2}$ , les deux vecteurs  $a$  et  $(\alpha, 0)$  seront congruents; l'on peut donc dire que le vecteur «  $a$  » a la longueur  $\alpha$ . S'il n'existe au contraire aucun nombre rationnel qui soit égal à  $\sqrt{a_1^2 + a_2^2}$ , l'on fixe ce dernier nombre irrationnel comme longueur fictive du vecteur  $a$ . Ceci est une façon de parler que nous avons déjà introduite pour maintenir un algorithme destiné à fournir des nombres-mesure corrects du vecteur  $a$ . Mais nous lui donnerons maintenant une importance plus grande.

En effet, attribuons dans tous les cas au vecteur  $a$  la longueur fictive  $\sqrt{a_1^2 + a_2^2}$  ou  $\sqrt{a^2}$ , ce qui revient à attribuer plus généralement la longueur fictive  $\sqrt{(a - b)^2}$  au vecteur du point  $a$  au point  $b$  du réseau quadrillé; par là nous n'obtenons pas seulement un algorithme pratique pour déterminer des nombres-mesure; cet algorithme attribue en outre à tous les segments entre les nœuds du réseau des longueurs qui se prêtent aux mêmes calculs que les simples longueurs d'une échelle, car

- 1º les segments congruents ont les mêmes longueurs;
- 2º lorsqu'un segment est divisé en deux parties, sa longueur est égale à la somme des longueurs des parties.

Ceci se vérifie ainsi: le vecteur  $a$  se divise au point  $b = \lambda a$  ( $0 < \lambda < 1$ ) en deux vecteurs dont la longueur est  $\sqrt{\lambda^2 a^2} = \lambda \sqrt{a^2}$  et  $\sqrt{(1 - \lambda)^2 a^2} = (1 - \lambda) \sqrt{a^2}$ , et la somme de ceux-ci est justement  $\sqrt{a^2}$ .

25. — *Le rapport ou le produit de deux vecteurs  $a$  et  $b$  qui se trouvent sur la même droite est égal respectivement au rapport ou au produit de leurs longueurs, précédé du signe + ou — suivant que les vecteurs ont la même orientation ou l'orientation opposée ; on le vérifie immédiatement lorsqu'on pose  $b = \lambda a$ .*

26. — Si l'on désigne par  $b_a$  le vecteur obtenu par projection de  $b$  sur  $a$ , l'on a

$$a \cdot b = a \cdot b_a .$$

En appliquant la relation précédente (25) au produit ci-dessus, l'on voit que *la longueur de  $b_a$ , muni de signe en concordance avec l'orientation de  $a$ , est égale à  $\frac{ab}{\sqrt{a^2}}$ .* Si  $a$  est un vecteur d'unité, c'est-à-dire un vecteur dont le carré est égal à 1, la longueur trouvée ci-dessus devient simplement  $ab$ .

27. — Si l'on multiplie un vecteur par un nombre positif  $\lambda$ , sa longueur sera aussi multipliée par  $\lambda$ .

Si l'on multiplie tous les points d'une figure par  $\lambda (> 0)$ , l'on obtient une nouvelle figure dont les distances seront  $\lambda$  fois les distances correspondantes de la figure primitive (figures homothétiques de rapport  $\lambda$ ).

Dans deux triangles à côtés parallèles deux à deux, les longueurs des côtés correspondants sont proportionnelles (cf. § 15, application 5<sup>o</sup>).

28. — A un vecteur  $a$  dont la longueur  $\sqrt{a^2}$  est rationnelle correspond un vecteur unité  $e = \frac{a}{\sqrt{a^2}}$  aux coordonnées fractionnaires  $\frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}$  et  $\frac{a_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}$ , et de la même orientation que  $a$ . Mais lorsque la longueur  $\sqrt{a^2}$  est irrationnelle nous calculerons aussi, pour plus de commodité, avec un vecteur unité formel  $e = \frac{a}{\sqrt{a^2}}$  correspondant à  $a$ , et ayant les coordonnées irrationnelles

$$\frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}} \quad \text{et} \quad \frac{a_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}} .$$

Tout vecteur qui se trouve sur la même ligne que  $a$  (ou parallèle à  $a$ ) peut dans tous les cas être représenté par  $\lambda e$ , où  $\lambda$  exprime la longueur du vecteur, muni de signe en concordance avec le vecteur  $a$ .

Une ligne droite par le point  $p$  et parallèle au vecteur  $a$  peut dans tous les cas s'exprimer au moyen du point variable

$$x = p + \lambda e ,$$

où le paramètre  $\lambda$  donne la longueur de la distance de  $a$  à  $x$ , muni de signe conformément à l'orientation du vecteur  $a$ ; en d'autres termes  $\lambda$  détermine les chiffres d'une échelle sur la ligne avec  $p$  comme origine et  $e$  comme unité;  $e$  s'appelle le vecteur d'orientation de la ligne ou le vecteur d'unité.

L'équation de la ligne est

$$\hat{e}(x - p) = 0 ; \quad (1)$$

$\hat{e}$  s'appelle le vecteur normal de la ligne tandis que l'équation (1) s'appelle la forme normale de l'équation de la ligne.

On obtient la distance de la ligne droite à un point  $y$  par projection du vecteur  $y - p$  sur la normale de la ligne, et sa longueur calculée conformément à l'orientation de  $\hat{e}$  (ou  $\hat{a}$ ) est donc  $\hat{e}(y - p)$ . C'est-à-dire, l'on obtient la distance en remplaçant  $x$  par  $y$  dans le premier membre de (1).

Lorsqu'une ligne droite sans orientation est donnée par une équation de la forme

$$b(x - p) = 0$$

on peut la mettre sous la forme normale en la divisant par  $\pm \sqrt{b^2}$ , en choisissant  $\pm \frac{b}{\sqrt{b^2}}$  comme vecteur normal.

29. — Un cercle de centre  $a$  et de rayon  $\rho$  a pour équation

$$(x - a)^2 = \rho^2 .$$

En un point quelconque  $p$  du cercle la tangente a la représentation paramétrique

$$x = p + \lambda (\hat{p} - \hat{a}) ,$$

et l'équation

$$(x - p)(a - p) = 0 .$$

On peut écrire l'équation ordinaire du cercle ainsi

$$x^2 + ax + \alpha = 0,$$

où  $a$  est un vecteur,  $\alpha$  un scalaire; le centre est  $-\frac{a}{2}$  et le rayon  $\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - \alpha}$ . Les points d'intersection avec la ligne  $x = \lambda e$ , où  $e$  est un vecteur unité se déterminent par l'équation

$$\lambda^2 + \lambda(ea) + \alpha = 0;$$

Le produit des racines de cette équation est égal à  $\alpha$  qui représente ainsi la puissance de l'origine par rapport au cercle.

On étudie très facilement toute autre question concernant la géométrie du cercle au moyen de ces auxiliaires.

30. — Il existe deux sortes de déplacements qui laissent  $O$  fixe: les rotations autour de  $O$  et les déplacements inverses autour de  $O$ .

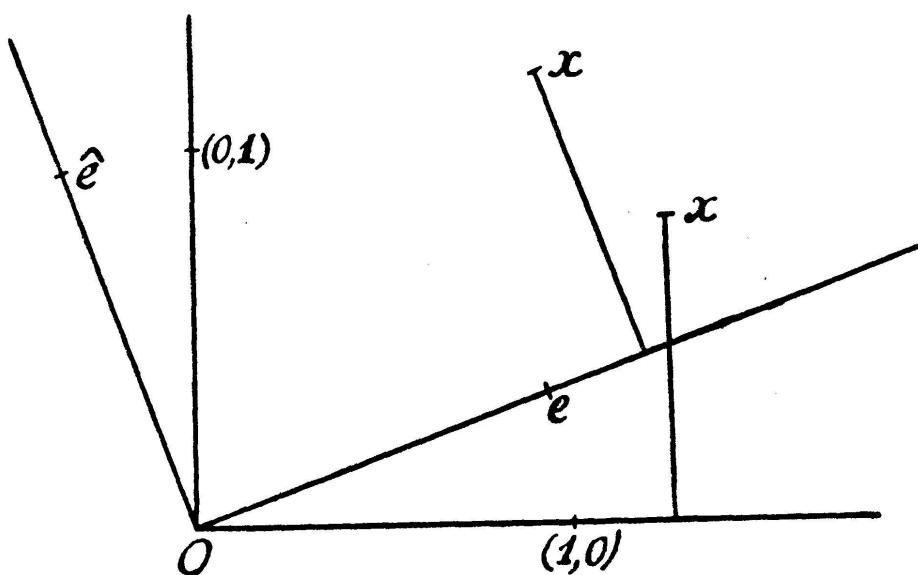


Fig. 5.

Une rotation autour de  $O$  (fig. 5) transporte le vecteur unité  $(1,0)$  sur un autre vecteur unité  $e$ , et par là chaque vecteur  $(\lambda, 0)$  sur le vecteur  $\lambda e$ ; en même temps le vecteur  $(0, 1)$  se transporte sur  $\hat{e}$  et chaque vecteur  $(0, \mu)$  sur  $\hat{\mu} e$ . Elle transpor-

tera donc un point quelconque  $x$  en un point correspondant  $x'$ , déterminé par la relation

$$x' = x_1 e + \hat{x_2} e. \quad (1)$$

L'on peut écrire ceci facilement en coordonnées; si

$$e = (e_1, e_2), \quad \hat{e} = (-e_2, e_1)$$

il en résulte

$$x'_1 = e_1 x_1 - e_2 x_2,$$

$$x'_2 = e_2 x_1 + e_1 x_2.$$

Un déplacement inverse autour de O qui déplace  $(1, 0)$  sur  $e$ , déplace en même temps  $(0, 1)$  sur  $\hat{e}$ ; il s'exprime donc par la formule

$$x' = x_1 e - \hat{x_2} e. \quad (2)$$

Tout déplacement dans le plan se ramène à l'un des déplacements (1) ou (2) combiné avec une translation. De l'équation (1) découle la relation

$$(x' - y')^2 = (x - y)^2, \quad x' y' = xy, \quad \hat{x'} y' = \hat{x} y,$$

si  $x$  et  $y$  signifient deux points qui se transportent en  $x'$  et  $y'$  par une rotation autour de l'origine. Les grandeurs  $(x - y)^2$ ,  $xy$  et  $\hat{x} y$  sont donc invariables quelle que soit la rotation autour de O.

De l'équation (2) découle de même que  $(x - y)^2$  et  $xy$  sont invariables, tandis que  $\hat{x} y$  change de signe.

La longueur  $\sqrt{(x - y)^2}$  est invariable quel que soit le déplacement.

31. — On peut représenter une similitude directe, formée par une rotation autour de O et une multiplication, par la formule

$$x' = x_1 a + \hat{x_2} \hat{a}$$

où  $a$  est le vecteur qui dans la similitude correspond au vecteur unité  $(1, 0)$  sur l'axe des  $x$ , tandis que  $\hat{a}$  correspond au vecteur unité  $(0, 1)$  sur l'axe des  $y$ .

Une similitude inverse, où  $(1, 0)$  correspond à  $a$  et  $(0, 1)$  correspond à  $-\widehat{a}$  est représentée par la formule

$$x' = x_1 a - x_2 \widehat{a}.$$

Les longueurs des vecteurs correspondants ont dans les deux cas le rapport constant  $\sqrt{a^2}$ .

### 32. — Signification de $\widehat{a} b$ .

$\widehat{a} b$  ne change pas de valeur, lorsqu'on déplace l'extrémité de l'un des vecteurs parallèlement à l'autre; l'on a

$$\widehat{a} (b + \lambda a) = \widehat{a} b,$$

et

$$(\widehat{a} + \lambda \widehat{b}) b = \widehat{a} b.$$

Si l'on mène par  $b$ , parallèle au vecteur  $a$  (fig. 6), une ligne

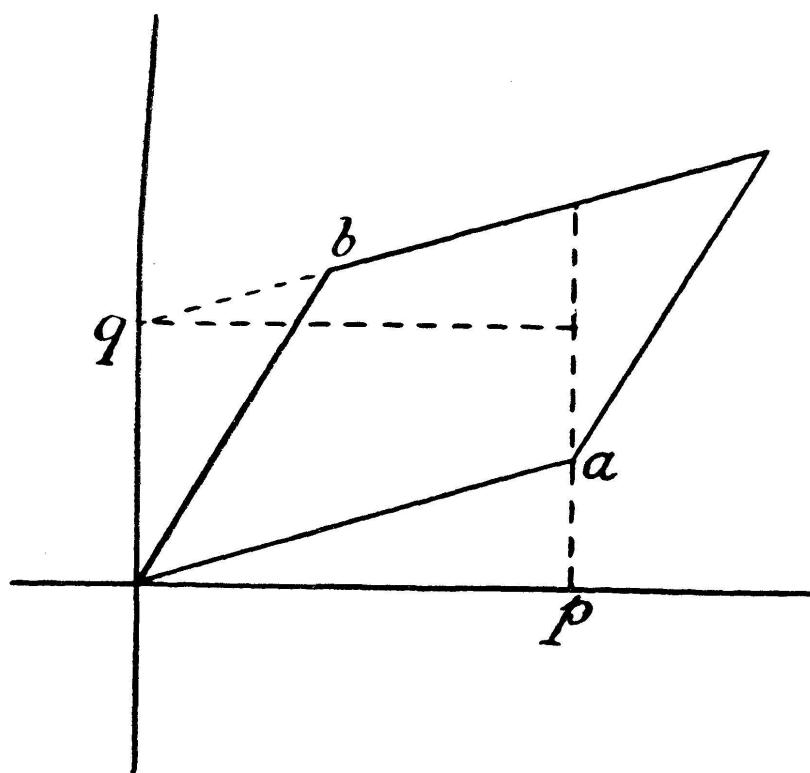


Fig. 6.

qui coupe l'axe des  $y$  en  $q$ , et par  $a$ , parallèle au vecteur  $q$ , une ligne qui coupe l'axe des  $x$  en  $p$ , l'on obtient

$$\widehat{a} b = \widehat{a} q = \widehat{p} q.$$

Ce produit est l'aire du rectangle formé par  $p$  et  $q$ , et puisque des réflexions élémentaires connues montrent que celui-ci est égal au parallélogramme  $aq$  qui est lui-même égal au parallélogramme  $ab$ , nous voyons que l'aire du parallélogramme formé par les deux vecteurs  $a$  et  $b$  s'exprime par  $\widehat{ab}$ ; nous devons cependant remarquer que ce nombre est muni du signe + ou — suivant que le sens rotatif de  $a$  vers  $b$  est orienté du côté positif ou du côté négatif.

*Nous fixons donc le nombre  $\widehat{ab}$  comme nombre-mesure du parallélogramme formé par les deux vecteurs  $a$  et  $b$ , nommés dans cet ordre. Au triangle qui a  $a$  et  $b$  pour côtés nous attribuons le nombre-mesure  $\frac{1}{2} \widehat{ab}$ .*

33. — Afin de fixer des nombres-mesure pour les aires d'autres figures nous considérons d'abord un triangle quelconque  $abc$  (fig. 7); nous effectuons une

translation qui déplace  $a$  sur l'origine de sorte que

$$b \rightarrow b - a, \quad c \rightarrow c - a.$$

Le nouveau triangle a l'aire

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (\widehat{b-a} \widehat{c-a}) &= \\ &= \frac{1}{2} (\widehat{bc} + \widehat{ca} + \widehat{ab}) \end{aligned}$$

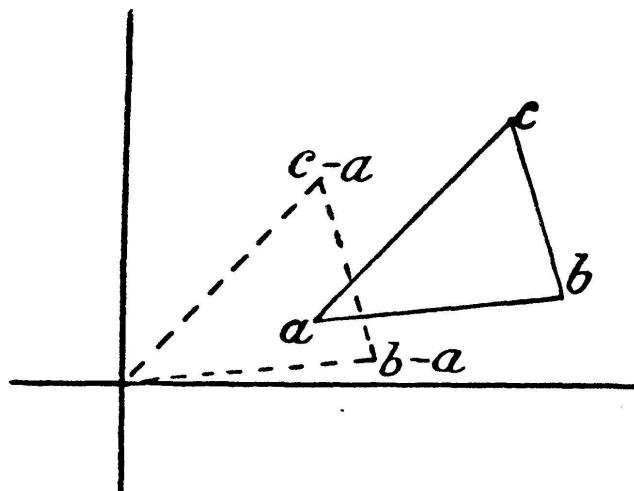


Fig. 7.

et nous fixons donc ceci comme nombre-mesure pour l'aire du  $\Delta abc$ . L'expression s'interprète immédiatement comme la somme des trois triangles  $Obc$ ,  $Oca$ ,  $Oab$ . La façon dont elle a été formée établit *a priori* qu'elle est indépendante de la position de l'origine par rapport au triangle et de toute translation du triangle.

34. — Pour l'aire d'un polygone quelconque  $abcde$  il semble donc naturel de fixer le nombre-mesure

$$\frac{1}{2} (\widehat{ab} + \widehat{bc} + \widehat{cd} + \widehat{de} + \widehat{ea})$$

et l'on voit facilement que toute translation de la figure laisse invariable cette expression.

Pour faire voir que tout déplacement direct laisse invariable ce nombre-mesure — d'où il découle que les figures congruentes auront les mêmes aires — il faut seulement démontrer encore que toute rotation autour de O le laisse invariable. Mais ceci résulte de ce qui précède car cette rotation laisse invariable tous les termes  $\widehat{ab}$ ,  $\widehat{bc}$  ... Les déplacements inverses font changer de signe aux aires.

Nous vérifions ultérieurement que le nombre-mesure susdit satisfait à la condition suivante: si une figure est divisée en deux parties, la somme des aires de celles-ci sera égale à l'aire de la figure entière. Ceci se vérifie immédiatement, car dans l'expression (fig. 8):

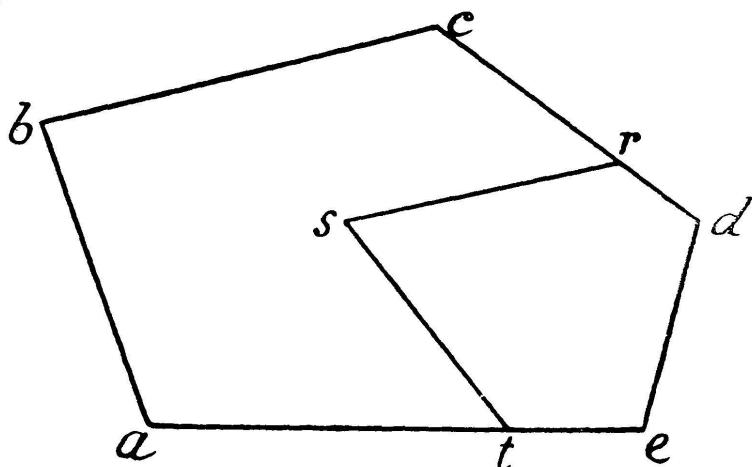


Fig. 8.

$$\frac{1}{2} (\widehat{ab} + \widehat{bc} + \widehat{cr} + \widehat{rs} + \widehat{st} + \widehat{ta}) + \frac{1}{2} (\widehat{rd} + \widehat{de} + \widehat{et} + \widehat{ts} + \widehat{sr})$$

l'on a

$$\widehat{cr} + \widehat{rd} = \widehat{cd},$$

$$\widehat{et} + \widehat{ta} = \widehat{ea},$$

car ceci exprime seulement que les « triangles »  $crd$  et  $eta$  ont l'aire zéro; comme de plus

$$\widehat{rs} + \widehat{st} + \widehat{ts} + \widehat{sr} = 0$$

la somme des deux parties devient justement égale à l'aire entière

$$\frac{1}{2} (\widehat{ab} + \widehat{bc} + \widehat{cd} + \widehat{de} + \widehat{ea}).$$

## V. — TRIGONOMÉTRIE.

35. — Nous appelons *angle orienté* un système de deux droites orientées, nommées dans un ordre déterminé. Si les vecteurs unité correspondants sont  $a$  et  $b$ , l'angle est désigné par  $(a, b)$ . Par extension naturelle des définitions élémentaires nous définissons cosinus et sinus ainsi

$$\cos (a, b) = a \cdot b , \quad (1)$$

$$\sin (a, b) = \widehat{ab} . \quad (2)$$

Comme tout déplacement direct (rotation et translation) laisse  $ab$  et  $\widehat{ab}$  invariables, l'on voit que les angles directement congruents ont le même cosinus et sinus.

La somme de deux angles  $(a, b)$  et  $(b, c)$  se définit par l'angle  $(a, c)$ . L'angle  $(a, a)$ , (ou l'angle formé par deux droites parallèles de même orientation) est désigné aussi par 0 de sorte que  $\cos 0 = 1$ ,  $\sin 0 = 0$ . On pose l'angle  $(b, a) = -(a, b)$  puisque  $(b, a) + (a, b) = 0$ , et il en résulte que  $\cos (-u) = \cos u$ ,  $\sin (-u) = -\sin u$ . L'on pose encore l'angle  $(a, a)$  égal à R (ou traditionnellement  $90^\circ$ ) ce qui entraîne  $\cos R = 0$ ,  $\sin R = 1$ . L'angle  $(a, -a)$  est, par conséquent, égal à  $2R$  (ou  $180^\circ$ ) et  $\cos 2R = -1$ ,  $\sin 2R = 0$ .

D'ailleurs, par ceci, on n'a nullement introduit une méthode générale pour mesurer les angles.

36. — Si l'on introduit les coordonnées dans les relations (1) et (2) l'on a

$$\cos (a, b) = a_1 b_1 + a_2 b_2 ,$$

$$\sin (a, b) = a_1 b_2 - a_2 b_1 ,$$

d'où résultent directement les relations

$$\cos (u - v) = \cos u \cos v + \sin u \sin v ,$$

$$\sin (u - v) = \sin u \cos v - \cos u \sin v ,$$

qui fournissent toutes les formules habituelles goniométriques.

37. — Pour un triangle quelconque ABC l'on a

$$\overline{BC} + \overline{CA} + \overline{AB} = 0 \quad (3)$$

et cette formule contient toute la trigonométrie.

Nous supposons que ABC détermine le sens rotatif positif dans le plan, et désignons par  $a$ ,  $b$  et  $c$  les côtés du triangle — c'est-à-dire les longueurs des vecteurs  $\overline{BC}$ ,  $\overline{CA}$ ,  $\overline{AB}$  — et par  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  les angles du triangle,  $\alpha$  étant l'angle du vecteur  $\overline{AB}$  au vecteur  $\overline{AC}$ ,  $\beta$  de  $\overline{BC}$  à  $\overline{BA}$ ,  $\gamma$  de  $\overline{CA}$  à  $\overline{CB}$ . Ceci posé l'on peut déduire toutes les relations trigonométriques habituelles de (3).

En multipliant par  $\overline{\triangle}$  l'on obtient, en effet,

$$ab \sin \gamma = ac \sin \beta$$

ou

$$\frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} ;$$

en élevant (3) au carré après avoir isolé  $\overline{BC}$  l'on obtient

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 bc \cdot \cos \alpha .$$

## VI. — LE PLAN ARITHMÉTIQUE.

38. — Les recherches précédentes ne visent immédiatement que la géométrie du réseau quadrillé telle qu'elle se présente dans un plan à dessiner au réseau millimétrique, limité par un carré dont le côté est égal à mettons 50 cm. Chaque point est déterminé par deux nombres, d'abord des nombres entiers, ensuite — quand l'exigent les problèmes à résoudre — des nombres fractionnaires; ceux-ci sont ou bien appliqués directement à un réseau quadrillé plus fin ou bien remplacés par des nombres approximatifs appropriés; en dernier lieu aussi quelques nombres irrationnels interprétés de façon correspondante. Mais tous ces nombres sont limités, et — dans l'exemple présent — situés entre + 250 et — 250.

Les lignes droites sont représentées par des équations de premier degré. On trouve le point d'intersection de deux droites

en résolvant leurs équations. Si la résolution fournit un système de deux nombres qui ne sont pas tous les deux situés dans l'intervalle donné (entre + 250 et — 250), les lignes en question ne se coupent pas. Si, par contre, ils s'y trouvent tous les deux on peut interpréter ce système de deux nombres de la façon exposée et ainsi déterminer un point qui appartient aux deux lignes; il arrive, cependant, que les deux droites ont plusieurs points communs (se coupent de façon indéterminée). Choisissons comme exemple les deux lignes

$$\begin{aligned}x_2 &= \frac{1}{200}x_1 , \\x_2 &= 0 ,\end{aligned}$$

$(x_1, x_2)$  étant le point variable. L'origine est, bien entendu, un point commun  $(0, 0)$ ; mais en posant  $x_1 = 8$  (l'unité est égale à 1 mm) nous obtenons pour les deux lignes respectivement les ordonnées  $\frac{1}{25}$  et 0, et cette différence est négligeable dans le plan pratique.

Les deux lignes se confondent donc le long d'un segment de 16 mm, car elles ont de chaque côté de l'origine un segment commun de 8 mm.

Soit un cercle à rayon 200 mm; menons par un point quelconque A du cercle une tangente et plaçons sur celle-ci un segment  $AB = 4$  mm. Si nous menons la sécante par B et le centre du cercle, nous pourrons — d'après le théorème de la puissance d'un point par rapport à un cercle — déterminer le plus petit segment  $\varepsilon$ , découpé sur cette sécante entre B et le cercle, par la relation

$$\varepsilon(\varepsilon + 400) = 16 , \quad \text{donc} \quad \varepsilon < \frac{1}{25} ,$$

quantité négligeable dans le plan pratique.

Il en résulte que la périphérie du cercle se confond complètement avec le segment AB de la tangente, et avec un segment pareil de l'autre côté de A. La tangente et le cercle ont donc un segment commun d'au moins 8 mm.

39. — Nous allons maintenant étendre tout le calcul analytique introduit pour le réseau quadrillé de telle façon que nous

considérons tous les nombres réels sans les soumettre à aucune condition, c'est-à-dire qu'ils soient grands ou petits, rationnels ou irrationnels. Nous définissons un point (vecteur) arithmétique  $a$  comme un système de deux nombres  $(a_1, a_2)$ , où  $a_1$  et  $a_2$  sont des nombres quelconques réels ( coordonnées). Nous appelons le point  $O = (0, 0)$  l'origine. Tout système de deux points  $a$  et  $b$ , pris dans cet ordre, s'appelle un vecteur  $\overline{ab}$ ; on appelle pourtant  $a$  le vecteur  $Oa$ . Tout vecteur  $a$  détermine une translation, c'est-à-dire une transformation qui déplace le point  $(x_1, x_2)$  sur le point correspondant  $(x_1 + a_1, x_2 + a_2)$ . La somme et la différence de deux vecteurs se définissent comme précédemment, de sorte qu'on a toujours  $\overline{ab} = b - a$ . On multiplie un vecteur  $a$  par un nombre quelconque  $\lambda$  en multipliant les coordonnées par  $\lambda$ . Une ligne droite se définit par le point variable  $x = a + \lambda b$  où  $a$  et  $b$  sont des vecteurs fixes. Le vecteur viré  $\hat{a}$  se définit toujours par  $\hat{a} = (-a_2, a_1)$ , le produit par  $ab = a_1 b_1 + a_2 b_2$  et la distance entre deux points  $a$  et  $b$  par  $\sqrt{(a - b)^2}$ . De même, les définitions des aires et des fonctions trigonométriques restent inchangées.

40. — *Il en résulte immédiatement que toutes les recherches antérieures restent valables dans le domaine élargi*, car on calcule de la même façon avec les symboles, qu'ils signifient des nombres rationnels ou irrationnels, grands ou petits. Dans ce domaine abstrait, purement arithmétique, que nous appelons le *plan arithmétique*, il y aura toujours un et seulement un point d'intersection pour deux lignes droites non parallèles, et de même, deux points différents ne déterminent jamais plus d'une ligne droite. Un cercle et une tangente ont seulement un point commun (point de contact), et un cercle et une ligne droite n'ont jamais plus de deux points communs.

Comme toute cette analyse arithmétique comprend celle du réseau quadrillé on peut, bien entendu, l'appliquer au plan pratique en tenant compte de l'interprétation appropriée des résultats numériques dans chaque cas.

On conçoit facilement la façon dont cette analyse élargie peut servir à introduire des points d'intersection hors du plan

à dessiner, et cette notion peut servir de manière tout à fait rationnelle dans des recherches concernant le plan à dessiner limité.

41. — Nous remarquons encore que l'extension ultérieure de la géométrie élémentaire, l'extension à la *géométrie complexe* ne cause aucune difficulté quand le domaine s'étend aux nombres complexes.

Il faut seulement remarquer qu'elle entraîne l'existence de vecteurs qui ont la longueur 0 bien qu'ils ne soient pas identiques au vecteur zéro; ce sont tous les vecteurs de la forme  $\lambda(1, i)$  ou  $\lambda(1, -i)$  où  $\lambda$  est un nombre quelconque complexe. Sur la droite  $x = a + \lambda(1, i)$  ou  $x = a + \lambda(1, -i)$  toutes les distances seront égales à zéro. Ces lignes s'appellent les lignes isotropes; elles n'ont ni vecteur d'orientation, ni vecteur normal de sorte que les recherches basées sur ces notions ne sauraient être appliquées aux lignes isotropes. Ceci a surtout de l'importance dans la trigonométrie où les lignes sont justement représentées par des vecteurs-unité, et il y faut donc supposer qu'aucune des lignes en question n'est isotrope. Ceci à part, toutes les recherches considérées s'appliquent au domaine complexe.