Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 38 (1939-1940)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LA «COURBE CATOPTRIQUE » D'EULER
Autor: Loria, Gino
Kapitel: VII. — La troisième solution du problème.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-515787

tant. Euler ajoute qu'on peut tirer de cette remarque qu'on a encore

$$CM + MO = CM^* + M^* O ,$$

propriété que Goldbach a remarquée le premier.

VII. — La troisième solution du problème.

11. — Nous avons déjà dit qu'Euler a été amené à s'occuper de nouveau du problème catoptrique par la solution qu'en donna Oechliz, géomètre qui avait été appelé, en 1748, de Leipzig, comme professeur à Saint-Pétersbourg. La lettre qu'il écrivit à Goldbach sur ce sujet (vol. cit., p. 463) le 25 juin de cet an ne nous apprend pas ce qu'il tira du travail de son collègue et ce qu'il y ajouta; cela résulte de ce que nous allons rapporter de son importante communication.

Soit (fig. 4) MN une courbe telle que, après une double réflexion, elle reconduit un point lumineux à la source C d'où il est parti. Prolongeons la droite MN en E, F de manière qu'on ait ME = MC, NF = NC; la droite EF sera d'une longueur constante (voyez plus haut) et elle sera normale dans ses extrémités à la courbe lieu des points M, N (voyez plus bas). Cela prouve que la question proposée est ramenée à la recherche d'une courbe pourvue de ∞^1 cordes binormales de la même longueur: la possibilité de telles lignes est prouvée par l'exemple du cercle; on verra qu'il y en a un nombre infini. Lorsqu'on en a trouvée une, la courbe catoptrique s'ensuit, après avoir choisi *ad libitum* le point lumineux C[1] à l'aide de la construction suivante: Si EF est une des cordes dont on a parlé, on tire les droites CE, CF

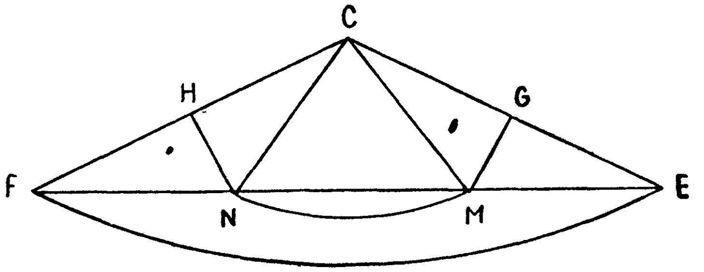

Fig. 4.

[1] Remarquons qu'auparavant on n'avait rien dit relativement à la position du foyer lumineux (cf. note, V) par rapport à la courbe cherchée.

et on en détermine les milieux G, H; les perpendiculaires menées par ces points respectivement aux droites CE, CF coupent les droites EF en deux points M, N de la courbe catoptrique; en variant la corde EF, cette courbe sera décrite complètement. Si, par exemple, on part d'un cercle, on arrive, à ce qu'affirme Euler, à une ellipse dont les foyers sont le point lumineux et le centre du cercle [1].

[1] Nous jugeons utile de donner une démonstration directe de cet énoncé (sur lequel Euler revient ailleurs dans sa correspondance) pour montrer qu'il a besoin d'un complément. A cet effet rapportons la figure (Figures 5 et 6) à un système orthogonal ayant pour origine le centre du cercle donné et comme axe des abscisses la droite OC. Soient r le rayon du cercle, ξ l'abscisse du point C et $y = x \,.\, \mathrm{tg}\, \alpha$ l'équation d'un diamètre quelconque. Les coordonnées d'une E de ses extrémités seront $r \cos \alpha$, $r \sin \alpha$ et l'équation de la perpendiculaire à CE en son milieu sera

$$(x - r\cos\alpha)^2 + (y - r\sin\alpha)^2 = (x - \xi)^2 + y^2,$$

c'est-à-dire $2(\xi - r\cos\alpha)\,x - 2\,r\sin\alpha y + r^2 - \xi^2 = 0$. Les coordonnées du point M

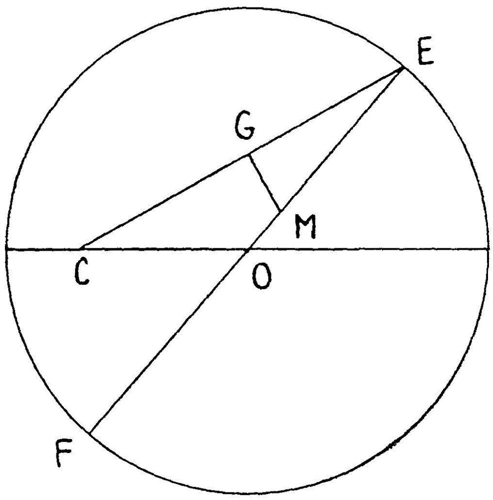

Fig. 5.

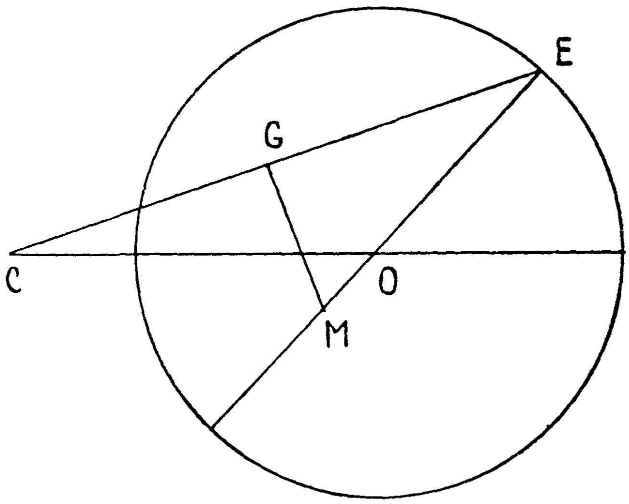

Fig. 6.

où elle coupe le diamètre considéré seront de la forme $\sigma \,.\, \cos\alpha$, $\sigma \,.\, \sin\alpha$ et on trouve, à l'aide de l'équation précédente

$$\sigma = \frac{\xi^2 - r^2}{2(\xi\cos\alpha - r)} \;.$$

L'équation du lieu du point M s'obtiendra en éliminant α entre les équations

$$x = \frac{(\xi^2 - r^2)\cos\alpha}{2(\xi\cos\alpha - r)}\,, \qquad y = x\,\mathrm{tg}\,\alpha\;;$$

elle est donc

$$\left(\frac{\xi^2 - r^2}{2} - \xi x\right)^2 = r^2(x^2 + y^2)\;;$$

cela prouve que le lieu est une section conique. En transportant l'origine des coordonnées au milieu du segment CO cette équation devient

$$\frac{X^2}{\frac{r^2}{4}} + \frac{Y^2}{\frac{r^2 - \xi^2}{4}} = 1\;;$$

les points C, O sont donc en effet les foyers de la courbe et la courbe est une ellipse

12. — Pour épuiser le problème catoptrique, il faut montrer comment est représentée analytiquement une courbe ayant ∞^1 cordes égales entre elles et binormales à cette courbe (cela en prouvera *a posteriori* l'existence). Choisissons à cet effet (fig. 7) un axe d'origine A et appelons x, y les coordonnées AP, EP d'un point quelconque E de la courbe; par le point E il passe une corde binormale dont l'autre extrémité F a pour coordonnées AQ $=$ X, PQ $= -$ Y. Comme la corde EF est normale à la courbe aux points E, F, si R est le point où elle coupe l'axe, PR et QR seront les sous-normales correspondantes ; donc

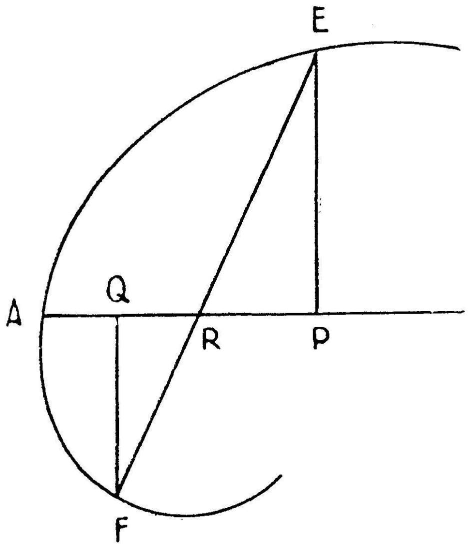

Fig. 7.

$$\mathrm{PR} = y \cdot \frac{dy}{dx}, \qquad \mathrm{QR} = -\mathrm{Y} \cdot \frac{d\mathrm{Y}}{d\mathrm{X}};$$

et, comme

$$\frac{\mathrm{EP}}{\mathrm{PR}} = \frac{\mathrm{FQ}}{\mathrm{QR}},$$

on aura encore

$$\frac{dx}{dy} = \frac{d\mathrm{X}}{d\mathrm{Y}}.$$

Si p est la valeur de ces deux fractions, on aura:

$$dx = p \cdot dy, \qquad d\mathrm{X} = p \cdot d\mathrm{Y}$$

$$\mathrm{PR} = \frac{y}{p}, \qquad \mathrm{QR} = -\frac{\mathrm{Y}}{p}, \qquad \mathrm{PQ} = \mathrm{X} - x = \frac{y - \mathrm{Y}}{p}.$$

seulement lorsque le point C est intérieur au cercle donné; lorsqu'il est extérieur elle est une hyperbole. La droite GM, étant la bissectrice de l'angle CME, est la tangente en M à la courbe.

Ajoutons que lorsqu'on connaît d'une section conique les axes en grandeur et position, pour la décrire à l'aide du procédé découvert par Euler, on prendra comme point fixe un de ses foyers et l'autre comme centre du cercle auxiliaire et comme diamètre de ce dernier le demi-axe focal de la conique.

Différentiant, on trouve

$$\frac{dy - dY}{p} - (y - Y)\frac{dp}{p^2} = dX - dx = p(dY - dy)$$

et ensuite

$$\frac{(y - Y) \cdot dp}{p^2} = \frac{(dy - dY)(1 + p^2)}{p}$$

$$\frac{dy - dY}{y - Y} = \frac{dp}{p(1 + p^2)} = \frac{dp}{p} - \frac{p\,dp}{p^2} .$$

Intégrant, on a:

$$\log(y - Y) = \log 2a + \log p - \log\sqrt{1 + p^2} ,$$

ou bien

$$y - Y = \frac{2ap}{\sqrt{1 + p^2}} ,$$

d'où successivement:

$$x - X = \frac{2a}{\sqrt{1 + p^2}}$$

$$PE + QF = y - Y = \frac{2ap}{\sqrt{1 + p^2}} ,$$

$$\overline{EF}^2 = \overline{PQ}^2 + (PE + QF)^2 = 4a^2 .$$

La corde EF est donc d'une longueur constante $2a$.

Si P est une fonction de p, on peut poser

$$y = P + \frac{ap}{\sqrt{1 + p^2}} , \qquad Y = P - \frac{ap}{\sqrt{1 + p^2}} ;$$

par conséquent

$$dy = dP + \frac{a \cdot dp}{(1 + p^2)^{\frac{3}{2}}} , \qquad dx = p \cdot dy = P\,dp + \frac{ap \cdot dp}{(1 + p^2)^{\frac{3}{2}}} .$$

On a donc enfin

$$x = \int P\,dp - \frac{a}{\sqrt{1 + p^2}} , \qquad y = P + \frac{ap}{\sqrt{1 + p^2}} . \qquad (15)$$

Chaque choix de la fonction P de p donne une solution du problème qui, en conséquence, en admet un nombre indéfini.

Afin que la courbe à laquelle on arrive soit continue, il faut que la fonction P ait la même qualité; et pour obtenir ce résultat Euler croit *nécessaire* (attention, lecteurs !) que P soit une fonction *rationnelle* de p; comme exemple il suppose $P = 2bp$ et il arrive à la courbe

$$x = bp^2 - \frac{a}{\sqrt{1+p^2}} + a \,, \qquad y = 2\,bp + \frac{ap}{\sqrt{1+p^2}} \,,$$

algébrique du 6me degré; enfin il dit que, non seulement il est aisé de la construire, mais que *la même chose* arrive pour toutes les courbes qu'il a obtenues.

13. — La communication de ces importants résultats produisit chez Goldbach, comme il est bien naturel, le plus vif intérêt; mais, dès ce moment, la correspondance des deux savants se détacha de la courbe catoptrique pour se tourner vers les courbes à un nombre infini de binormales égales, découvertes par Euler. Sans nous arrêter à quelques simples conséquences tirées par Goldbach des formules de son éminent correspondant et qui se rapportent aux valeurs extrêmes des coordonnées (vol. cit., p. 470 et 483), nous remarquons les éclaircissements qu'il a demandés sur l'existence de diamètres et en général sur la forme des nouvelles lignes; cela amena Euler à entrer en plus de détails, à lui fournir (*id.*, p. 485, 490 et 498) des beaux dessins des nouvelles courbes et — ce qui est bien plus important — à introduire la considération méthodique de leurs développées et à exposer quelques remarques très originales sur leurs propriétés: qu'il nous suffise de dire que ces développées sont d'une forme semblable à l'hypocycloïde à trois rebroussements déjà rencontrée par notre géomètre (voir no 8).

VIII. — Conclusions.

14. — Les considérations que nous venons de citer ont une importance secondaire par rapport au problème qui fait l'objet de notre mémoire; mais elles en possèdent une très grande pour