Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 38 (1939-1940)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LA «COURBE CATOPTRIQUE » D'EULER
Autor: Loria, Gino
Kapitel: III. — Préliminaires de la première solution d'Euler.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-515787

d'une étonnante simplicité [1]. L'étude de la même figure mène aux relations suivantes:

$$\sin \mathrm{MCT} = \frac{s}{\sqrt{r^2 + s^2}}, \qquad \cos \mathrm{MCT} = \frac{r}{\sqrt{r^2 + s^2}}; \tag{6}$$

comme l'angle CMO est le double de CMT, on a encore

$$\sin \mathrm{CMO} = \frac{2s}{r^2 + s^2}, \qquad \cos \mathrm{CMO} = \frac{r^2 - s^2}{r^2 + s^2}. \tag{6'}$$

Si enfin on appelle U l'intersection du rayon réfléchi avec la droite CT (qui est la perpendiculaire menée du point C à la tangente au point M), on voit que l'angle TMU étant lui aussi égal à μ, les deux triangles CMT et MTU sont égaux, le triangle CMU est isocèle et la tangente n'est que la perpendiculaire menée à sa base par son milieu.

Remarque. — Les formules (6), (6′) et les dernières observations nous donnent l'occasion de relever, comme un caractère des procédés eulériens, l'habitude du grand géomètre de déterminer *toutes* les propriétés et de calculer *tous* les éléments de la figure considérée, même si les unes et les autres n'ont pas une liaison évidente avec la question étudiée; nous rencontrerons plus bas (voyez par exemple les dernières lignes du nº 7) des exemples de l'utilité de ce système.

III. — Préliminaires de la première solution d'Euler.

5. — Comme les coniques à centre nous assurent que le problème catoptrique est résoluble, on est en droit de considérer sur la courbe cherchée EF (fig. 2) deux points MM*, tels que le rayon, MM* premier réfléchi de CM, donne par une nouvelle

[1] Nous invitons le lecteur qui a des doutes sur la justesse de notre appréciation de ce résultat à comparer la formule (4′) à sa correspondante dans le système cartésien. En écrivant l'équation du rayon réfléchi (voyez la Remarque à la fin du nº 9) sous la forme $P(X - x) + Q(Y - y) = 0$, où P et Q sont des polynômes quadratiques en x, y, y', on a

$$\mathrm{MO} = -\frac{P + Qy'}{\begin{vmatrix} P & Q \\ P' & Q' \end{vmatrix}}.$$

réflexion le rayon M* C. Il est alors évident que le rayon réfléchi de CM* ramènerait au point C après une nouvelle réflexion; donc les points M et M* sont entre eux dans une relation permutable.

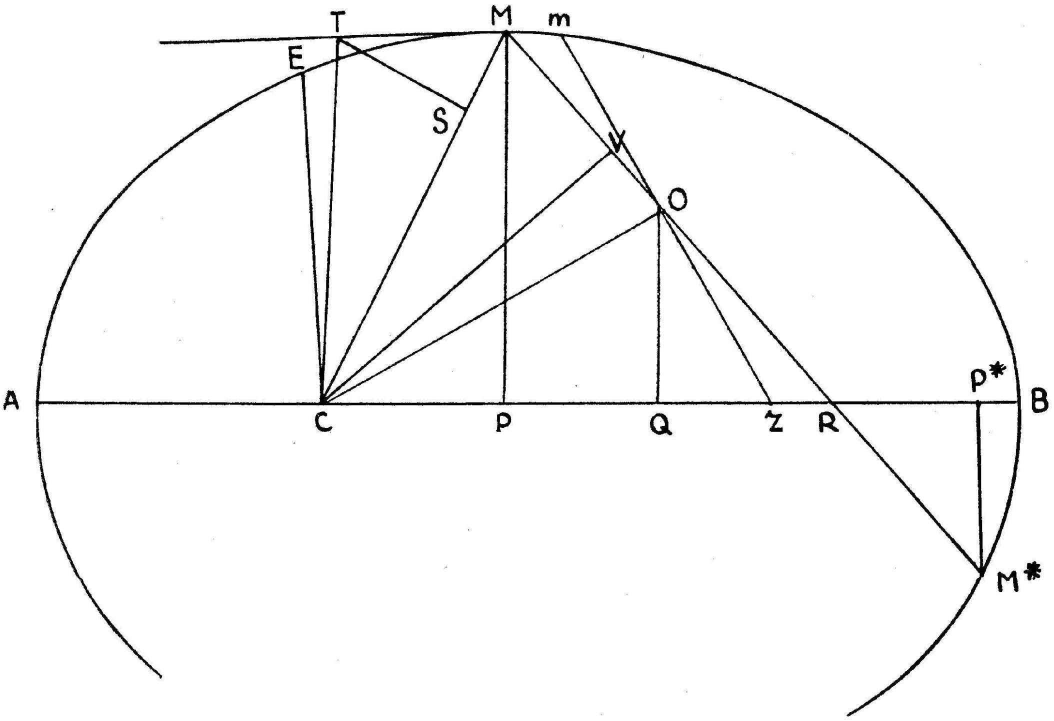

Fig. 2.

Sur le point M* répétons les constructions et les considérations que nous avons exposées sur M, en employant les mêmes lettres avec un astérisque; seulement, par rapport aux signes des grandeurs, on doit tenir compte du sens des figures. Suivant Euler, on a alors cette double liste de formules:

$CT = r\,,\quad TS = s$	$C^*S^* = r^*\,,\quad T^*S^* = s^*$
$CT = \sqrt{r^2 + s^2}\,,\quad CM = \dfrac{r^2 + s^2}{r}$	$C^*T^* = \sqrt{r^{*2} + s^{*2}}\,,\quad CM^* = \dfrac{r^{*2} + s^{*2}}{r^*}$
$MT = \dfrac{s}{r}\sqrt{r^2 + s^2}$	$M^*T^* = -\dfrac{s^*}{r^*}\sqrt{r^{*2} + s^{*2}}$
$\sin CMO = \dfrac{2rs}{r^2 + s^2}\,,\quad \cos CMO = \dfrac{r^2 - s^2}{r^2 + s^2}$	$\sin CM^*O = \dfrac{2r^*s^*}{r^{*2} + s^{*2}}\,,\quad \cos CM^*O = \dfrac{r^{*2} - s^{*2}}{r^{*2} + s^{*2}}$
$MO = \dfrac{2s\,ds}{dr} + \dfrac{r^2 - s^2}{r}$	$M^*O = \dfrac{2s^*\,ds^*}{dr^*} + \dfrac{r^{*2} - s^{*2}}{r^*}$

En menant la droite CV perpendiculaire au rayon MM* on aura les relations suivantes [1]:

$CV = 2s\ ,\quad MV = \dfrac{r^2 - s^2}{r}$	$CV = -2s^*\ ,\quad M^*V = \dfrac{r^{*2} - s^{*2}}{r^*}$
$OV = -\dfrac{2s\,ds}{dr}\ ,\quad CO = \dfrac{2s\sqrt{dr^2 + ds^2}}{dr}$	$OV = \dfrac{2s^*\,ds^*}{ds^*}\ ,\quad CO = -\dfrac{2s^*\sqrt{dr^{*2} + ds^{*2}}}{dr^*}$
$\operatorname{tg} COM = \dfrac{dr}{ds}$	$\operatorname{tg} COM^* = -\dfrac{dr^*}{ds^*}$

On en tire $s^* = -s$, $-\dfrac{2s\,ds}{dr} = \dfrac{2s^*\,ds^*}{dr^*}$; d'où $dr^* + dr = 0$.

En intégrant on peut écrire $r^* + r = 2a$. Si donc on pose $r = a + v$, on aura $r^* = a - v$, v étant une *fonction impaire* de s; en choisissant *ad libitum* une fonction de cette espèce, la relation $CS = a + v$ déterminera une des courbes cherchées.

REMARQUE. — Rappelons qu'on a:

$$CS = r = \rho \sin^2 \mu\ ,\qquad \operatorname{tg}\mu = -\frac{\rho\, d\omega}{d\rho}\ ,\qquad s = \rho \sin\mu \cos\mu\ ;$$

il s'ensuit

$$\sin\mu = \frac{\rho\, d\omega}{\sqrt{d\rho^2 + \rho^2 d\omega^2}}\ ,\qquad \cos\mu = \frac{d\rho}{\sqrt{d\rho^2 + \rho^2 d\omega^2}}\ ,$$

$$s = -\frac{\rho^2\, d\rho\,.\,d\omega}{d\rho^2 + \rho^2 d\omega^2}$$

et la relation trouvée par Euler devient

$$\frac{\rho^2 d\omega^2}{d\rho^2 + \rho^2 d\omega^2} + a + v\left(\frac{\rho^2\,.\,d\rho\,.\,d\omega}{d\rho^2 + \rho^2 d\omega^2}\right) = 0\ ;$$

c'est l'équation différentielle générale des courbes catoptriques; nous allons voir comment Euler arrive à l'intégrer complètement, quelle que soit la fonction v.

---

[1] Les relations précédentes, comme les suivantes, ont été déjà prouvées, ou bien peuvent se déduire des autres; par exemple on a

$$CV = CM \sin 2\mu = \frac{r^2 + s^2}{r}\,\frac{2rs}{r^2 + s^2} = 2s\,.$$