

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 38 (1939-1940)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** LA «COURBE CATOPTRIQUE » D'EULER  
**Autor:** Loria, Gino  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-515787>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 04.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# LA « COURBE CATOPTRIQUE » D'EULER

PAR

Gino LORIA (Gênes, Italie).

---

## I. — INTRODUCTION ET HISTORIQUE.

1. — Dans les exposés modernes de la théorie des courbes planes, les questions traitées ont généralement comme but la détermination de lieux des points satisfaisant à des conditions données et moins souvent (et cela dans les applications de la théorie des équations différentielles) dans la recherche de toutes les lignes du plan jouissant de la même propriété (généralement de nature infinitésimale). Mais, au temps où la géométrie analytique et le calcul infinitésimal étaient des matières dans l'état d'enfance, les plus éminents géomètres avaient le courage de se proposer des problèmes d'un caractère plus élevé (leur solution générale comprend bien souvent des fonctions arbitraires) et ils arrivaient à les résoudre par des artifices originaux <sup>1</sup>. De cette manière on donnait une éclatante confirmation de ce fait que les théories jeunes manifestent une énergie (analogue à celle des gaz à l'état naissant) qui va s'affaiblissant lorsqu'elles marchent vers une forme définitive, considérée enfin comme classique. Dans l'état dont nous venons de parler se trouve la question suivante: *Déterminer toutes les courbes planes qui, comme l'ellipse, jouissent de la propriété que les rayons issus d'un point donné,*

---

<sup>1</sup> Il n'est pas sans intérêt de reconnaître que ces essais heureux ont été possibles car les mathématiciens d'autrefois ne se sentaient pas liés (comme il arrive aujourd'hui) à l'emploi des coordonnées cartésiennes ou polaires et aux formules relatives considérées aujourd'hui comme le *nec plus ultra* des moyens auxiliaires; en effet (et nous allons en rencontrer plusieurs exemples) les artifices auxquels ils ont recours, en général, consistaient dans l'emploi, comme coordonnées, de différentes variables s'imposant, dans chaque cas, par les conditions mêmes des problèmes qu'on voulait résoudre.

après une double réflexion sur une de ces courbes, supposée réfléchissante, reviennent au point de départ<sup>1</sup>.

La correspondance d'Euler avec Goldbach nous donne les preuves des longues études que le grand géomètre consacra à ce beau problème<sup>2</sup>; ses études méritent d'être examinées avec un soin tout particulier, avant tout par la valeur de ce qu'elles renferment, mais aussi parce qu'elles nous présentent le grand analyste dans le rôle d'éminent représentant de la géométrie infinitésimale synthétique qu'il joua au temps où il vivait à Berlin.

2. — On trouve l'énoncé de ce problème dans les dernières lignes de la lettre adressée par Euler à Goldbach le 16 février 1745, avec la déclaration qu'il l'a conçu lui-même (p. 314), tandis que dans la suivante, qui remonte au 19 juin de la même année, on en lit (p. 317-20) une rapide solution, accompagnée de la déclaration qu'elle a été proposée anonyme dans les *Acta eruditorum*. Sans nous arrêter sur quelques remarques des deux géomètres exposées dans deux lettres suivantes (p. 320, 327, 332 et 335), nous devons attirer l'attention de nos lecteurs sur le mémoire annexé à la lettre d'Euler du 30 novembre 1745 sous le titre *Solutio problematis in Actis Lipsiensis A. 1745 propositi* (p. 341-354), qui va être analysée tout au long dans notre travail<sup>3</sup>. Dès ce moment on en lit des mentions plus ou moins étendues dans presque toutes les lettres échangées entre les deux savants jusqu'à celle qui porte la date 27 août 1746 (*op. cit.*, p. 321, 326, 329, 332, 335, 355, 358, 367, 374, 378, 386, 395); elles sont très importantes car on y trouve une deuxième solution de la question; celle-ci apparaît de nouveau dès la lettre

<sup>1</sup> Cette question appartient évidemment à la classe des problèmes où l'on veut trouver toutes les lignes planes partageant une des qualités qui caractérisent le cercle ou les sections coniques, sur lesquelles Jean Bernoulli attira l'attention des savants dans son mémoire *Supplementum defectus Geometriae Cartesianae circa inventionem locorum* (*Acta erud.* 1696, p. 264, ou bien *Opera omnia*, t. I, p. 155).

<sup>2</sup> Ces lettres ont été insérées dans le t. I du volume: *Correspondance mathématique et physique de quelques célèbres géomètres du XVIII<sup>e</sup> siècle*, publiée par P.-H. Fuss (Saint-Pétersbourg, 1843) auquel se rapportent toutes nos citations.

<sup>3</sup> Cette solution a été publiée pour la première fois dans les *Nova acta eruditorum* de l'année 1745 (p. 523) avec le titre *Problema geometricum, propositum publice ab anonymo geometra*. Euler fit connaître l'énoncé du problème catoptrique à Daniel Bernoulli dans sa lettre du 7 juillet 1745 (voyez *Corresp.* citée, t. II, p. 578); celui-ci s'y intéressa; cela résulte de la réponse qu'il adressa à Euler le 7 septembre de la même année (même volume, p. 585).

écrite par Euler le 25 juin 1748 (*id.*, p. 463 et suiv.), lorsque Oechliz proposa un nouveau procédé de solution <sup>1</sup>, car cela lui donna l'occasion de concevoir une troisième méthode pour le résoudre, dont il s'empressa de faire part à son ami; celui-ci s'y intéressa de nouveau, comme cela est prouvé par plusieurs passages de la correspondance dont nous nous occupons (p. 470, 483, 485, 490, 498), le dernier est inséré dans la lettre qui porte la date 25 juin 1749. Dans presque toutes les lettres citées on trouve des propriétés de la *courbe catoptrique* (terme employé par les deux géomètres), avec des considérations spéciales sur les cas où elle est algébrique; leur étude offre un réel intérêt historique, car elles appartiennent à l'époque qui précède immédiatement le moment où le grand mathématicien bâlois allait donner aux mathématiques, appelées alors *sublimes*, la forme qu'elles étaient destinées à conserver, jusqu'au jour où le concept de rigueur imposa une refonte *ab imis fundamentis* de toute l'analyse infinitésimale.

## II. — FORMULES FONDAMENTALES.

3. — La base de la première méthode de résolution imaginée par Euler se trouve dans une remarquable formule exprimant la distance entre un point quelconque M d'une courbe plane et le point correspondant O de sa caustique par rapport à un point quelconque C de son plan; O est donc l'intersection du rayon réfléchi par rapport au rayon CM et de son consécutif. Euler fait la recherche par un procédé aussi ingénieux que fatigant, basé sur des considérations de géométrie élémentaire, développées magistralement, même dans les cas où les éléments considérés (segments de droite et angles) sont infinitésimaux; les coordonnées cartésiennes n'apparaissent en aucune façon, car Euler suppose que la courbe considérée soit déterminée par une relation entre le rayon vecteur  $\rho$  d'un quelconque M de ses points, ayant comme origine le point lumineux C et l'angle  $\mu$  qu'il forme avec la tangente à la courbe au point M. Au lieu de

<sup>1</sup> Il ne m'a pas été possible de trouver des renseignements ni sur ce mathématicien ni sur ses recherches citées dans le texte.

résumer le long raisonnement eulérien, nous allons déterminer la longueur du segment MO en fonction de  $\rho$  et  $\mu$ , en employant tour à tour les coordonnées orthogonales  $x, y$  ayant C comme origine et les coordonnées polaires  $\varphi, \omega$  par rapport à ce même point: de cette manière seront apaisés les doutes des personnes qui n'ont pas une foi complète dans les raisonnements ayant recours à des grandeurs infinitésimales. Remarquons d'abord que l'angle  $\mu$  formé par le rayon CM avec les tangentes au point M de la courbe considérée est déterminé en coordonnées orthogonales par la formule

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{y \, dx - x \, dy}{x \, dx + y \, dy} ;$$

en introduisant les coordonnées polaires elle devient

$$\operatorname{tg} \mu = - \frac{\rho \cdot d\omega}{d\rho} ;$$

on en tire

$$d\omega = - \frac{d\rho \cdot \operatorname{tg} \mu}{\rho} . \tag{1}$$

Le rayon réfléchi du rayon CM aura une équation de la forme

$$\frac{Y - y}{X - x} = \lambda ,$$

où X, Y sont les coordonnées courantes et  $\lambda$  doit être déterminé par la condition qu'il forme avec CM l'angle  $180^\circ - 2\mu$ ; on a donc

$$\frac{\lambda x - y}{\lambda y + x} = \operatorname{tg} (180^\circ - \lambda) ,$$

ce qui prouve que

$$\lambda = \frac{y - x \operatorname{tg} 2\mu}{x + y \operatorname{tg} 2\mu} .$$

Il s'en suit que l'équation du rayon réfléchi est:

$$(X - x) (x \sin 2\mu - y \cos 2\mu) + (Y - y) (x \cos 2\mu + y \sin 2\mu) = 0 \tag{2}$$

La caustique étant l'enveloppe de cette droite, pour déterminer le point O il faudra combiner cette équation avec sa

dérivée, en considérant que  $x, y, \rho, \omega, \mu$  sont toutes des fonctions de la variable en fonction de laquelle est déterminée la position de tout point de la courbe. Or, en introduisant les coordonnées polaires, l'équation (2) devient :

$$(X - x) \sin (2\mu - \omega) + (Y - y) \cos (2\mu - \omega) = 0 ; \quad (2')$$

si on écrit au lieu de cette équation les deux suivantes

$$X - x = \sigma \cos (2\mu - \omega) , \quad Y - y = -\sigma \sin (2\mu - \omega) , \quad (2'')$$

$\sigma$  sera précisément la longueur cherchée, pourvu que  $\mu$  et  $\omega$  soient déterminés en tenant compte de l'équation dérivée de la (2'). Cette dérivée étant

$$\begin{aligned} [(X - x) \cos (2\mu - \omega) - (Y - y) \sin (2\mu - \omega)] (2\mu' - \omega') = \\ = x' \sin (2\mu - \omega) + y' \cos (2\mu - \omega) . \end{aligned}$$

Pour déterminer  $\sigma$  on a l'équation

$$\sigma (2d\mu - d\omega) = dx \cdot \sin (2\mu - \omega) + dy \cdot \cos (2\mu - \omega) . \quad (3)$$

Or la relation (1) donne

$$2d\mu - d\omega = \frac{2\rho \cos \mu \cdot d\mu + \sin \mu \cdot d\rho}{\rho \cos \mu} ;$$

et comme

$$dx = d\rho \cdot \cos \omega - \rho \sin \omega \cdot d\omega , \quad dy = d\rho \cdot \sin \omega + \rho \cos \omega \cdot d\omega$$

le second membre de l'équation (3) prend la forme suivante :

$$\frac{d\rho \cdot \sin \mu}{\cos \mu} .$$

L'équation (3) devient donc

$$\sigma \frac{2\rho \cos \mu \cdot d\mu + \sin \mu \cdot d\rho}{\rho \cos \mu} = \frac{d\rho \cdot \sin \mu}{\cos \mu} ,$$

qui donne  $\sigma$ , c'est-à-dire

$$MO = \frac{\rho d\rho \cdot \sin \mu}{2\rho \cos \mu \cdot d\mu + \sin \mu \cdot d\rho}; \quad (4)$$

c'est précisément la formule découverte par Euler <sup>1</sup>.

4. — Ce grand savant lui a donné une autre forme en introduisant, au lieu de  $\rho$  et  $\mu$ , deux nouvelles variables que nous

<sup>1</sup> Une formule analogue existe pour le rayon de courbure  $R$  d'une ligne plane quelconque; elle peut se démontrer par des calculs analogues à ceux employés dans le texte, comme nous allons le prouver. Nous partirons à cet effet des formules

$$\frac{Y-y}{X-x} = -\frac{1}{y'}, \quad \operatorname{tg} \mu = \frac{y-xy'}{x+yy'}$$

dont la première représente la normale et la seconde a déjà été utilisée par nous. En éliminant  $y'$  on trouve l'équation

$$\frac{Y-y}{X-x} = \frac{x \cos \mu + y \sin \mu}{x \sin \mu - y \cos \mu}.$$

En introduisant partiellement les coordonnées polaires elle devient

$$\frac{Y-y}{X-x} = \frac{\cos(\mu - \omega)}{\sin(\mu - \omega)};$$

si on lui substitue les deux

$$X-x = R \sin(\mu - \omega), \quad Y-y = R \cos(\mu - \omega),$$

$R$  sera la longueur que nous cherchons, pourvu que cette longueur soit déterminée à l'aide de l'équation dérivée de l'équation de la normale; qui est

$$(X-x) \cos(\mu - \omega) - (Y-y) \sin(\mu - \omega) = 0.$$

Cette dérivée étant

$$[(X-x) \sin(\mu - \omega) + (Y-y) \cos(\mu - \omega)](\mu' - \omega') = y' \sin(\mu - \omega) - x' \cos(\mu - \omega)$$

on trouve

$$R = \frac{y' \sin(\mu - \omega) - x' \cos(\mu - \omega)}{\mu' - \omega'}.$$

Substituant à  $x'$ ,  $y'$  leurs valeurs on obtient

$$R = \frac{\rho \sin \mu \cdot d\omega - \cos \omega \cdot d\rho}{d\mu - d\omega}$$

et comme  $d\omega$  a la valeur donnée par la formule (1) du texte, on peut faire disparaître la variable  $\omega$ ; on arrive alors à l'expression suivante de  $R$ :

$$R = \frac{-\rho \cdot d\rho}{d\rho \cdot \sin \mu + \cos \mu \cdot d\mu}$$

qui est celle annoncée; elle est remarquable car elle contient seulement des différentielles du premier ordre.

allons définir. A cet effet menons (fig. 1) du point C la droite CT perpendiculaire à la tangente au point M de la courbe et de son pied T la perpendiculaire TS au rayon vecteur CM; les nouvelles

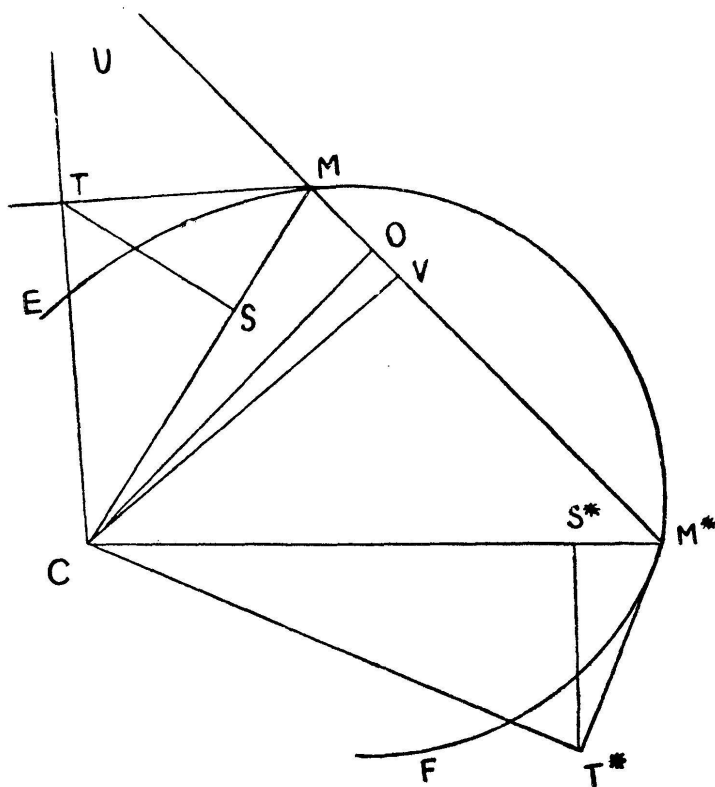


Fig. 1.

variables sont les longueurs  $CS = r$  et  $TS = s$ . L'inspection de la figure prouve qu'elles sont exprimées de la manière suivante en fonction de  $\rho$  et  $\mu$

$$r = \rho \sin^2 \mu, \quad s = \rho \sin \mu \cdot \cos \mu; \quad (5)$$

inversement on a

$$\rho = \frac{r^2 + s^2}{r}, \quad \operatorname{tg} \mu = \frac{r}{s}. \quad (5')$$

Or, par un raisonnement géométrique tout à fait original (et qui prend la place du changement de variables déterminé par les formules (5) ou (5')) Euler donne à la formule (4) l'aspect suivant :

$$MO = 2s \frac{ds}{dr} + \frac{r^2 - s^2}{r}, \quad (4')$$

d'une étonnante simplicité<sup>1</sup>. L'étude de la même figure mène aux relations suivantes :

$$\sin \text{MCT} = \frac{s}{\sqrt{r^2 + s^2}}, \quad \cos \text{MCT} = \frac{r}{\sqrt{r^2 + s^2}} ; \quad (6)$$

comme l'angle CMO est le double de CMT, on a encore

$$\sin \text{CMO} = \frac{2s}{r^2 + s^2}, \quad \cos \text{CMO} = \frac{r^2 - s^2}{r^2 + s^2}. \quad (6')$$

Si enfin on appelle U l'intersection du rayon réfléchi avec la droite CT (qui est la perpendiculaire menée du point C à la tangente au point M), on voit que l'angle TMU étant lui aussi égal à  $\mu$ , les deux triangles CMT et MTU sont égaux, le triangle CMU est isocèle et la tangente n'est que la perpendiculaire menée à sa base par son milieu.

REMARQUE. — Les formules (6), (6') et les dernières observations nous donnent l'occasion de relever, comme un caractère des procédés eulériens, l'habitude du grand géomètre de déterminer *toutes* les propriétés et de calculer *tous* les éléments de la figure considérée, même si les unes et les autres n'ont pas une liaison évidente avec la question étudiée; nous rencontrerons plus bas (voyez par exemple les dernières lignes du n° 7) des exemples de l'utilité de ce système.

### III. — PRÉLIMINAIRES DE LA PREMIÈRE SOLUTION D'EULER.

5. — Comme les coniques à centre nous assurent que le problème catoptrique est résoluble, on est en droit de considérer sur la courbe cherchée EF (fig. 2) deux points MM\*, tels que le rayon, MM\* premier réfléchi de CM, donne par une nouvelle

<sup>1</sup> Nous invitons le lecteur qui a des doutes sur la justesse de notre appréciation de ce résultat à comparer la formule (4') à sa correspondante dans le système cartésien. En écrivant l'équation du rayon réfléchi (voyez la Remarque à la fin du n° 9) sous la forme  $P(X - x) + Q(Y - y) = 0$ , où P et Q sont des polynômes quadratiques en  $x, y, y'$ , on a

$$\text{MO} = - \frac{P + Qy'}{\begin{vmatrix} P & Q \\ P' & Q' \end{vmatrix}}.$$

réflexion le rayon  $M^* C$ . Il est alors évident que le rayon réfléchi de  $CM^*$  ramènerait au point  $C$  après une nouvelle réflexion; donc les points  $M$  et  $M^*$  sont entre eux dans une relation permutable.

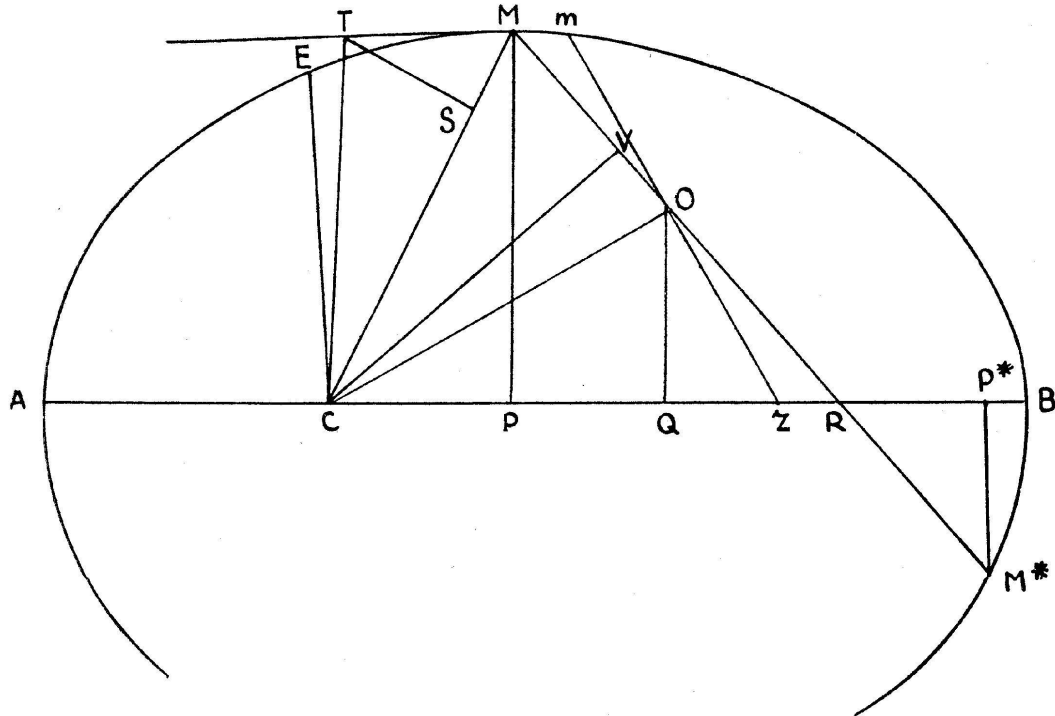


Fig. 2.

Sur le point  $M^*$  répétons les constructions et les considérations que nous avons exposées sur  $M$ , en employant les mêmes lettres avec un astérisque; seulement, par rapport aux signes des grandeurs, on doit tenir compte du sens des figures. Suivant Euler, on a alors cette double liste de formules:

$$CT = r, \quad TS = s$$

$$CT = \sqrt{r^2 + s^2}, \quad CM = \frac{r^2 + s^2}{r}$$

$$MT = \frac{s}{r} \sqrt{r^2 + s^2}$$

$$\sin CMO = \frac{2rs}{r^2 + s^2}, \quad \cos CMO = \frac{r^2 - s^2}{r^2 + s^2}$$

$$MO = \frac{2s \, ds}{dr} + \frac{r^2 - s^2}{r}$$

$$C^*S^* = r^*, \quad T^*S^* = s^*$$

$$C^*T^* = \sqrt{r^{*2} + s^{*2}}, \quad CM^* = \frac{r^{*2} + s^{*2}}{r^*}$$

$$M^*T^* = -\frac{s^*}{r^*} \sqrt{r^{*2} + s^{*2}}$$

$$\sin CM^*O = \frac{2r^*s^*}{r^{*2} + s^{*2}}, \quad \cos CM^*O = \frac{r^{*2} - s^{*2}}{r^{*2} + s^{*2}}$$

$$M^*O = \frac{2s^* \, ds^*}{dr^*} + \frac{r^{*2} - s^{*2}}{r^*}$$

En menant la droite CV perpendiculaire au rayon MM\* on aura les relations suivantes <sup>1</sup>:

$$\left. \begin{aligned} CV &= 2s, & MV &= \frac{r^2 - s^2}{r} \\ OV &= -\frac{2s ds}{dr}, & CO &= \frac{2s \sqrt{dr^2 + ds^2}}{dr} \\ \text{tg COM} &= \frac{dr}{ds} \end{aligned} \right| \begin{aligned} CV &= -2s^*, & M^*V &= \frac{r^{*2} - s^{*2}}{r^*} \\ OV &= \frac{2s^* ds^*}{ds^*}, & CO &= -\frac{2s^* \sqrt{dr^{*2} + ds^{*2}}}{dr^*} \\ \text{tg COM}^* &= -\frac{dr^*}{ds^*} \end{aligned}$$

On en tire  $s^* = -s$ ,  $-\frac{2s ds}{dr} = \frac{2s^* ds^*}{dr^*}$ ; d'où  $dr^* + dr = 0$ .

En intégrant on peut écrire  $r^* + r = 2a$ . Si donc on pose  $r = a + \varphi$ , on aura  $r^* = a - \varphi$ ,  $\varphi$  étant une *fonction impaire* de  $s$ ; en choisissant *ad libitum* une fonction de cette espèce, la relation  $CS = a + \varphi$  déterminera une des courbes cherchées.

REMARQUE. — Rappelons qu'on a:

$$CS = r = \rho \sin^2 \mu, \quad \text{tg } \mu = -\frac{\rho d\omega}{d\rho}, \quad s = \rho \sin \mu \cos \mu;$$

il s'ensuit

$$\begin{aligned} \sin \mu &= \frac{\rho d\omega}{\sqrt{d\rho^2 + \rho^2 d\omega^2}}, & \cos \mu &= \frac{d\rho}{\sqrt{d\rho^2 + \rho^2 d\omega^2}}, \\ s &= -\frac{\rho^2 d\rho \cdot d\omega}{d\rho^2 + \rho^2 d\omega^2} \end{aligned}$$

et la relation trouvée par Euler devient

$$\frac{\rho^2 d\omega^2}{d\rho^2 + \rho^2 d\omega^2} + a + \varphi \left( \frac{\rho^2 \cdot d\rho \cdot d\omega}{d\rho^2 + \rho^2 d\omega^2} \right) = 0;$$

c'est l'équation différentielle générale des courbes catoptriques; nous allons voir comment Euler arrive à l'intégrer complètement, quelle que soit la fonction  $\varphi$ .

<sup>1</sup> Les relations précédentes, comme les suivantes, ont été déjà prouvées, ou bien peuvent se déduire des autres; par exemple on a

$$CV = CM \sin 2\mu = \frac{r^2 + s^2}{r} \cdot \frac{2rs}{r^2 + s^2} = 2s.$$

## IV. — LA PREMIÈRE SOLUTION D'EULER.

6. — Les formules à appliquer maintenant sont les suivantes (voyez la fig. 2):

$$\begin{aligned} \text{TS} &= -s, & \text{CS} &= a + \nu \quad (\nu \text{ fonction impaire de } s) \\ \sin \text{CMO} &= \frac{2(a + \nu)s}{(a + \nu)^2 + s^2}, & \cos \text{CMO} &= \frac{(a + \nu)^2 - s^2}{(a + \nu)^2 + s^2} \\ \text{CM} &= a + \nu + \frac{s^2}{a + \nu}, & \text{MO} &= \frac{2s ds}{d\nu} + a + \nu - \frac{s^2}{a + \nu} \\ \text{CO} &= \frac{2s \sqrt{d\nu^2 + ds^2}}{d\nu}, & \text{tg CMO} &= \frac{d\nu}{ds}. \end{aligned}$$

Nous choisissons à présent comme axe une droite quelconque AB passant par le point C. Soit R son intersection avec le rayon réfléchi MM\* et  $\omega$  l'angle que celui-ci forme avec l'axe; si l'on pose  $\cos \omega = \frac{u}{c}$  ( $c$  étant une constante différente de 0), on aura  $\sin \omega = \frac{\sqrt{c^2 - u^2}}{c}$ ,  $d\omega = -\frac{du}{\sqrt{c^2 - u^2}}$  et  $u$  sera aussi une fonction impaire de  $s$ . Soit  $mOr$  le rayon réfléchi consécutif au rayon MOR; on aura  $\widehat{\text{Cr}m} = \omega + d\omega$  et ensuite  $\widehat{\text{M}Om} = d\omega$ . Mais on a déjà trouvé  $\widehat{\text{M}Om} = \frac{dr}{ds} = (\text{car } r = a + \nu) \frac{d\nu}{ds}$ ,  $d\omega = \frac{d\nu}{s} = -\frac{du}{\sqrt{c^2 - u^2}}$ ; donc on conclut:

$$s = -\frac{d\nu \cdot \sqrt{c^2 - u^2}}{du};$$

$u$  sera une fonction impaire de  $s$ , donc inversement  $s$  et  $\nu$  seront des fonctions impaires de  $u$ .

On observe à présent que dans le triangle CRM on connaît les angles et le côté CM; en conséquence le théorème des sinus nous donne

$$\text{CR} = -\frac{2c \cdot d\nu}{du}, \quad \text{RV} = -\frac{2u \cdot d\nu}{du}$$

et ensuite

$$\text{MR} = a + \nu - \frac{2u \cdot d\nu}{du} - \frac{(c^2 - u^2) \cdot d\nu^2}{(a + \nu) \cdot du^2}.$$

Menons la droite MP perpendiculaire à l'axe ACB; comme on a  $MP = MR \cdot \sin \omega$ , à cause des formules qu'on a trouvées, on peut écrire

$$MP = \left( a + v - 2 \frac{u \cdot dv}{du} - \frac{dv^2}{du^2} \frac{c^2 - u^2}{a + v} \right) \frac{\sqrt{c^2 - u^2}}{c},$$

où le signe ambigu du radical correspond à la symétrie de la courbe catoptrique par rapport à l'axe AB. On a encore

$$RP = MR \cos \omega = \frac{u(a + v)}{c} - \frac{2u^2 \cdot dv}{c \cdot du} - \frac{u(c^2 - u^2)}{c(a + v)} \frac{dv^2}{du^2}$$

et, à cause de la valeur de CR,

$$CP = \frac{dv^2}{du^2} \cdot \frac{u(c^2 - u^2)}{c(c + v)} - 2 \frac{dv}{du} \frac{c^2 - u^2}{c} - \frac{u(a + v)}{c}.$$

Si donc nous prenons comme premier axe d'un système cartésien la droite AB et comme origine le point C, on aura  $CP = x$  et  $MP = y$ .

Euler trouve convenable de changer dans les formules précédentes le signe de  $v$ ; par conséquent il écrit comme il suit les formules qui donnent la solution du problème:

$$\left\{ \begin{aligned} x &= -\frac{u(a - v)}{c} \left[ 1 - \frac{du}{dv} \frac{c^2 - u^2 + c\sqrt{c^2 - u^2}}{u(a - v)} \right] \left[ 1 - \frac{du}{dv} \frac{c^2 - u^2 - c\sqrt{c^2 - u^2}}{u(a - v)} \right] \\ y &= \frac{c^2 - u^2}{c(a - v)} \left[ a - v + (c + u) \frac{dv}{du} \right] \left[ a - v - (c - u) \frac{dv}{du} \right]; \end{aligned} \right. \quad (7)$$

en supposant que ces formules déterminent le point M de la première réflexion, celles qui se rapportent au point M\* de la seconde s'en déduisent en échangeant les signes de  $u$ ,  $v$  et du radical.

REMARQUE. — A toute équation  $f(u, v) = 0$  entre  $u$  et  $v$  correspond une courbe catoptrique particulière; si  $f$  est une fonction algébrique, on peut la supposer rationnelle et entière; la même chose arrivera alors par rapport aux dérivées  $\frac{\partial f}{\partial u}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial v}$ ; cela prouve qu'en substituant à  $\frac{dv}{du}$  le rapport  $-\frac{\partial f}{\partial u} : \frac{\partial f}{\partial v}$  les for-

<sup>1</sup> Comme  $u$  et  $v$  sont liées par une relation, les équations (7) nous offrent peut-être le premier exemple de la représentation des coordonnées d'une courbe à l'aide de deux paramètres, entre lesquels il existe une relation connue.

mules (7) deviendront algébriques en  $u, v$ ; entre elles et l'équation  $f(u, v) = 0$  on pourra éliminer ces quantités et on arrivera à une équation également algébrique en  $x, y$ : cela prouve l'existence d'un nombre indéfini de courbes catoptriques, toutes algébriques.

V. — QUELQUES CONSÉQUENCES DES FORMULES TROUVÉES.  
EXEMPLES.

7. — Les formules (7) mènent à toutes les propriétés de la courbe catoptrique; bornons-nous à citer celles dont parle Euler. La courbe catoptrique coupe orthogonalement l'axe en deux points dont la distance est  $2a$ . L'ordonnée EC du point C est fournie en posant  $x = 0$  dans la première des formules (7); sa valeur est donc

$$-\frac{2c(a-v)(\sqrt{c^2-u^2} \pm c)}{u^2};$$

tandis que les points d'ordonnées *maxima* sont donnés par les formules

$$x = c \frac{dv}{du}, \quad y = \frac{c \sqrt{c^2-u^2}}{u} \frac{dv}{du},$$

etc.<sup>1</sup>

Euler remarque encore que des formules exposées on peut tirer aisément la représentation analytique de la caustique de la

<sup>1</sup> Les mêmes formules permettraient l'étude des relations géométriques ayant lieu entre la courbe catoptrique et le point lumineux C. Par exemple, elles portent à la conclusion que ce point n'appartient jamais à cette courbe. En effet, des équations

$$-\frac{u(a-v)}{c} + 2 \frac{c^2-u^2}{c} \frac{dv}{du} + \frac{u(c^2-u^2)}{c(a-v)} \left(\frac{dv}{du}\right)^2 = 0$$

$$a-v + 2u \frac{dv}{du} - \frac{c^2-u^2}{a-x} \left(\frac{dv}{du}\right)^2 = 0,$$

on tire, en ajoutant à la première la seconde multipliée par  $\frac{u}{c}$ ,

$$2c \frac{dv}{du} = 0;$$

comme  $c \neq 0$ , on a  $\frac{dv}{du}$  nul et les équations précédentes donnent  $a-v=0$ ; en conséquence les (7) deviennent en général  $x=0, y=0$  et la courbe catoptrique se réduirait au point lumineux.

courbe considérée; en effet, si on mène OQ perpendiculaire à l'axe et qu'on appelle  $p, q$  les coordonnées CQ et OQ du point O, on trouve

$$\left\{ \begin{array}{l} p = \frac{2(c^2 - u^2) d\nu - 2u \cdot ds \cdot \sqrt{c^2 - u^2}}{c \cdot du} \\ q = \frac{2(c^2 - u^2) ds + 2u \sqrt{c^2 - u^2} d\nu}{c \cdot du} \end{array} \right. \quad (8)$$

8. — Euler applique ses formules à trois exemples déterminés chacun par une relation entre  $u$  et  $\nu$ ; le choix est fait de manière à obtenir des courbes algébriques; nous allons les exposer.

I. Soit  $\nu = u$ ; on en tire  $CR = 2c$ , par conséquent le point R est fixe; tous les rayons de première réflexion passent par le même point; on est porté alors à supposer que la courbe catoptrique soit une section conique centrale. Pour le prouver il suffit de remarquer que, dans notre cas, les formules (7) deviennent

$$x = \frac{2ac^2 - (a^2 + c^2)u}{c(c - u)}, \quad y = \frac{(a^2 - c^2) \sqrt{c^2 - u^2}}{c(a - u)} \quad (9)$$

en éliminant  $u$  on trouve comme résultat

$$a^2(x^2 + y^2) = (a^2 - c^2 - cx),$$

équation donnée sans démonstration par Euler dans sa lettre à Goldbach du 7 août 1745 (vol. cit. p. 327): on peut remarquer que cette équation équivaut à l'équation polaire

$$\rho = \frac{a^2 - c^2}{a(a - c \cos \omega)},$$

d'où il s'ensuit qu'il s'agit d'une ellipse ou d'une hyperbole suivant que  $a \geq c$ . On arrive à la même conclusion <sup>1</sup> en opérant la transformation de coordonnées déterminée par les formules suivantes:

$$x = X + a, \quad y = Y;$$

<sup>1</sup> Ce qui suit ne se trouve pas chez Euler.

on trouve alors

$$X = \frac{a(c^2 - au)}{c(a - u)}, \quad Y = \frac{(a^2 - c^2) \sqrt{c^2 - u^2}}{c(a - u)}$$

d'où l'on tire

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{a^2 - c^2} = 1 .$$

II. Le second des exemples choisis par Euler correspond à l'hypothèse qu'entre  $u$  et  $v$  il existe la relation  $v = \frac{u^3}{c^2}$ ,  $c$  étant une constante<sup>1</sup>; comme on a alors  $\frac{dv}{du} = \frac{3u^2}{c^2}$  les équations (7) deviennent:

$$\begin{cases} x = -\frac{u(ac^2 - u^3)}{c^3} \left(1 - 3u \frac{c^2 - u^2 + c\sqrt{c^2 - u^2}}{ac^2 - u^3}\right) \left(1 - 3u \frac{c^2 - u^2 - c\sqrt{c^2 - u^2}}{ac^2 - u^3}\right), \\ y = \frac{c^2 - u^2}{c^3(ac^2 - u^3)} (ac^2 - 3cu^3 + 2u^3)(ac^2 + 3cu^2 + 2u^3) . \end{cases} \quad (10)$$

Pour les interpréter géométriquement Euler se sert de la caustique de la courbe obtenue; on a dans ce cas

$$s = \frac{3u^2}{c^2} \sqrt{c^2 - u^2}$$

et les formules (8) fournissent la représentation paramétrique qui suit:

$$p = \frac{6u^2(2u^2 - c^2)}{c^3}, \quad q = \frac{12u(c^2 - u^2)^{\frac{3}{2}}}{c^3} . \quad (11)$$

Pour donner à ces expressions une forme plus convenable on peut avoir recours à l'angle  $\omega$  déjà considéré: comme on a

$$\cos \omega = \frac{u}{c}, \quad \sin \omega = \frac{\sqrt{c^2 - u^2}}{c}, \quad \cos 2\omega = \frac{2u - c^2}{c^2},$$

au lieu des équations (11), on a:

$$p = 6c \cos^2 \omega \cdot \cos 2\omega, \quad q = 6c \sin \omega \cdot \sin 2\omega \quad (11')$$

<sup>1</sup> Euler a été, probablement, amené à s'occuper de ce cas par un passage de la lettre de Goldbach du 9 novembre 1745 (vol. cit. p. 336) où, sans égard à l'homogénéité, on suppose  $v = u^3$ .

et sous cette forme il est aisé de reconnaître qu'il s'agit d'une hypocycloïde à trois rebroussements<sup>1</sup>; Euler en donne la figure exacte et en trouve l'équation cartésienne sous la forme suivante :

$$p^4 + 2 p^2 q^2 + q^4 + 30 cpq^2 - 18 cp^3 - 9 c^2 q^2 + 108 c^2 p^2 - 216 c^3 p = 0 ;$$

il peut alors conclure qu'il s'agit d'une courbe algébrique du 4<sup>me</sup> ordre. Ce qui précède nous autorise à conclure que *dans le cas considéré la courbe catoptrique est l'anticaustique d'une hypocycloïde à trois rebroussements*. On voit en même temps que, tandis qu'on croyait que cette courbe s'était présentée pour la première fois à Steiner vers le moitié du XIX<sup>e</sup> siècle comme enveloppe de droites de Simson d'un triangle quelconque<sup>2</sup>, son origine remonte à un siècle auparavant et est liée au nom d'un autre célèbre mathématicien suisse.

III. Euler s'est occupé d'un troisième cas dans sa lettre du 7 août 1745 (vol. cit., p. 327); c'est celui qui correspond à l'hypothèse  $uv = c^2$  avec  $c = a$ ; il dit que la courbe à laquelle on arrive est du 12<sup>me</sup> degré, qu'elle a la représentation paramétrique suivante

$$x = \frac{3a^3 - a^2v - 3au^2 - u^3}{u^2}, \quad y = \frac{a^3 - a^2u - 3au^2 - u^3}{u^3} \sqrt{a^2 - u^2},$$

et qu'en conséquence il est facile de la dessiner.

## VI. — LA SECONDE SOLUTION EULÉRIENNE.

9. — Quoique le grand géomètre pût se considérer comme satisfait pour avoir atteint le but proposé, sa correspondance scientifique prouve qu'il ne cessa de s'occuper de la courbe catoptrique et, utilisant l'extraordinaire faculté qu'il avait d'imaginer des procédés originaux, il arriva à une seconde solution tout à fait nouvelle qu'il communiqua à Goldbach le 25 janvier 1746 (vol. cit., p. 359) et dont nous allons donner un résumé. Elle est une application de la solution de cet autre problème:

<sup>1</sup> Voyez par exemple G. LORIA, *Spezielle algebraische und transscendente ebene Kurven*, II. Aufl. (Leipzig, 1910), t. I, p. 162; édit. italienne t. I (Milan, 1930), p. 192.

<sup>2</sup> J. STEINER, *Ueber eine besondere Curve dritter Classe (und vierter Ordnung)* (J. de Crelle, t. LIII, 1856).



où l'intégrale a un sens car, d'après l'hypothèse,  $r$  et  $u$  sont liés entre eux par la relation donnée  $f(r, \varphi) = 0$ . Si  $US = t$  et si on ajoute le segment  $RS = \frac{ru}{c}$ , on conclut

$$RU = a + \frac{ru}{c} - \int \frac{r \cdot du}{c},$$

c'est-à-dire

$$RU = a + \int \frac{u \cdot dr}{c}. \tag{12}$$

Or si on prend arbitrairement le point R sur l'axe, on connaîtra la valeur de  $r$  et par conséquent on aura l'angle  $\varphi$  et on pourra mener la droite RU et déterminer sur elle le point U. On tire alors la droite CU, on la coupe en deux parties égales au point T et on trace par ce point la perpendiculaire à la droite CU: ce sera la tangente à la courbe cherchée au point M où elle coupe la droite RU; cela prouve que, en déplaçant le point R sur l'axe choisi, cette courbe sera construite par ses points et ses tangentes.

REMARQUE. — Afin de se rendre compte de la valeur et de l'originalité de la voie suivie par Euler pour arriver aux courbes cherchées, il est bon d'avoir sous les yeux le procédé qu'on devrait suivre si on voulait résoudre le problème par les procédés modernes. En employant les coordonnées orthogonales, observons à cet effet que le rayon lumineux CM et la normale au point M ( $x, y$ ) ont comme équations respectives

$$\frac{Y}{X} = \frac{y}{x}, \quad \frac{Y - y}{X - x} = -\frac{1}{y'}$$

et qu'elles forment entre elles l'angle  $\alpha$  déterminé par la formule

$$\text{tg } \alpha = \frac{x + yy'}{y - xy'}$$

Le rayon réfléchi aura lui aussi une équation de la forme

$$Y - y = \lambda(X - x),$$

et le coefficient  $\lambda$  devra être déterminé par la condition que l'angle que le rayon réfléchi forme avec la normale est égal à  $-\alpha$ ; on a donc

$$\frac{1 + \lambda y'}{\lambda - y'} = -\frac{x + yy'}{y - xy'}$$

d'où l'équation suivante du rayon réfléchi :

$$\frac{Y - y}{X - x} + \frac{y(1 - y'^2) - 2xy'}{x(1 - y'^2) + 2yy'} = 0 .$$

Cela prouve qu'on a :

$$r = \frac{2y'(x^2 + y^2)}{2xy' - y(1 - y'^2)} , \quad \varphi = - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{y(1 - y'^2) - 2xy'}{x(1 - y'^2) + 2yy'} . \quad (13)$$

Substituant ces valeurs dans l'équation donnée  $f(r, \varphi) = 0$ , on aura l'équation différentielle du problème. Il s'en suit que, par la formule (12), Euler a réduit le problème aux quadratures, quelle que soit la fonction  $f(r, \varphi) = 0$ . Ajoutons que même la simple vérification de la formule (12) au moyen des relations (13) exige des calculs longs et assez compliqués.

10. — Pour appliquer le résultat obtenu à la recherche de la courbe catoptrique, Euler suppose que le rayon réfléchi passe par le point appartenant comme M à cette courbe; il remarque alors que si, au lieu de l'angle CRM, on considère connu l'angle CRO, on doit parvenir à la même valeur de  $r$ . Or, comme  $\widehat{\text{CRO}} = 180^\circ - \widehat{\text{CRM}}$ , son sinus et son cosinus sont égaux et de signes contraires à ceux de l'angle CRM; cela prouve que  $r$  doit être une fonction paire de  $\frac{u}{c}$  et  $\frac{s}{c}$ . Ayant choisi  $r$  de cette manière, la courbe catoptrique s'engendre de la manière suivante :

Posons  $\text{MR} = z$  et considérons le triangle CMR; nous en tirons :

$$\text{CM} = \sqrt{r^2 + z^2 - 2rz \frac{u}{c}} = \text{RU} - z = a + \int \frac{u \cdot dz}{c} - z ,$$

d'où

$$z = \frac{\left( a + \int \frac{u \cdot dz}{c} \right)^2 - r^2}{2 \left( a + \int \frac{u \cdot dr}{c} - \frac{ur}{c} \right)} .$$

$z$  étant connue, on aura

$$\text{PM} = y = \frac{sr}{c} , \quad \text{PR} = \frac{uz}{c} , \quad \text{CP} = x = r - \frac{uz}{c}$$

$$\text{CM} = \text{UM} = \text{RU} - z = a + \int \frac{u \cdot dr}{c} - z ;$$

de cette manière le problème est résolu en général. Si l'on veut arriver à des courbes algébriques, on posera avec Euler

$$\int \frac{r \cdot du}{c} = \varphi \quad \text{ou bien} \quad \int \frac{u \cdot dr}{c} = \frac{ur}{c} - \varphi ;$$

$\varphi$  sera une fonction impaire, qu'on peut choisir arbitrairement. Comme  $r = c \frac{d\varphi}{du}$ , on aura

$$\int \frac{u \cdot dr}{c} = u \frac{d\varphi}{du} - \varphi$$

et par suite (voyez plus haut)

$$\text{RM} = \frac{\left(a - \varphi + u \frac{d\varphi}{du}\right)^2 - c^2 \left(\frac{d\varphi}{du}\right)^2}{2(a - \varphi)} = \frac{a - \varphi}{2} + u \frac{d\varphi}{du} - \frac{s^2}{2(a - \varphi)} \left(\frac{d\varphi}{du}\right)^2 .$$

En se rappelant que  $s^2 + u^2 = c^2$ , on arrive à la solution suivante du problème:

$$\left\{ \begin{array}{l} y = \frac{(a - \varphi)s}{2c} + \frac{su}{c} \frac{d\varphi}{du} - \frac{s^3}{2c(a - \varphi)} \left(\frac{d\varphi}{du}\right)^2 , \\ x = \frac{s^2}{c} \frac{d\varphi}{du} - \frac{u(a - \varphi)}{2c} + \frac{us^2}{2(a - \varphi)} \left(\frac{d\varphi}{du}\right)^2 ; \end{array} \right. \quad (14)$$

on peut ajouter qu'on a

$$\text{CM} = \frac{a - \varphi}{2} + \frac{s^2}{2(a - \varphi)} \left(\frac{d\varphi}{du}\right)^2 .$$

On tire de ces formules qui représentent la courbe cherchée,

$$\text{CM} + \text{MR} = a - \varphi + u \frac{d\varphi}{du} ;$$

d'où, en changeant les signes de  $u, \varphi$ ,

$$\text{CM}^* + \text{M}^*\text{R} = a + \varphi - u \frac{d\varphi}{du} ;$$

en conséquence

$$\text{CM} + \text{MR} + \text{CM}^* + \text{M}^*\text{R} = 2a ;$$

donc le chemin parcouru par un point lumineux, partant de la source C et y revenant après une double réflexion, est cons-

tant. Euler ajoute qu'on peut tirer de cette remarque qu'on a encore

$$CM + MO = CM^* + M^*O,$$

propriété que Goldbach a remarquée le premier.

## VII. — LA TROISIÈME SOLUTION DU PROBLÈME.

11. — Nous avons déjà dit qu'Euler a été amené à s'occuper de nouveau du problème catoptrique par la solution qu'en donna Oechliz, géomètre qui avait été appelé, en 1748, de Leipzig, comme professeur à Saint-Pétersbourg. La lettre qu'il écrivit à Goldbach sur ce sujet (vol. cit., p. 463) le 25 juin de cet an ne nous apprend pas ce qu'il tira du travail de son collègue et ce qu'il y ajouta; cela résulte de ce que nous allons rapporter de son importante communication.

Soit (fig. 4) MN une courbe telle que, après une double réflexion, elle reconduit un point lumineux à la source C d'où il est

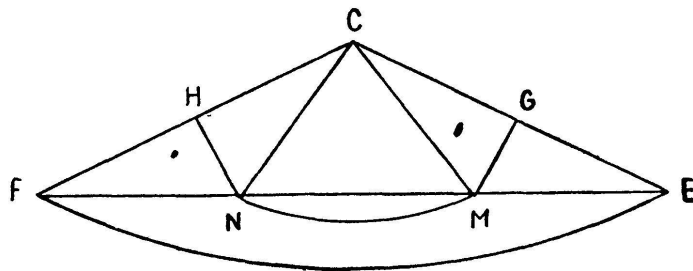


Fig. 4.

parti. Prolongeons la droite MN en E, F de manière qu'on ait  $ME = MC$ ,  $NF = NC$ ; la droite EF sera d'une longueur constante (voyez plus haut) et elle sera normale dans ses extrémités à la

courbe lieu des points M, N (voyez plus bas). Cela prouve que la question proposée est ramenée à la recherche d'une courbe pourvue de  $\infty^1$  cordes binormales de la même longueur: la possibilité de telles lignes est prouvée par l'exemple du cercle; on verra qu'il y en a un nombre infini. Lorsqu'on en a trouvée une, la courbe catoptrique s'ensuit, après avoir choisi *ad libitum* le point lumineux C<sup>1</sup> à l'aide de la construction suivante: Si EF est une des cordes dont on a parlé, on tire les droites CE, CF

<sup>1</sup> Remarquons qu'auparavant on n'avait rien dit relativement à la position du foyer lumineux (cf. note, V) par rapport à la courbe cherchée.

et on en détermine les milieux G, H; les perpendiculaires menées par ces points respectivement aux droites CE, CF coupent les droites EF en deux points M, N de la courbe catoptrique; en variant la corde EF, cette courbe sera décrite complètement. Si, par exemple, on part d'un cercle, on arrive, à ce qu'affirme Euler, à une ellipse dont les foyers sont le point lumineux et le centre du cercle <sup>1</sup>.

<sup>1</sup> Nous jugeons utile de donner une démonstration directe de cet énoncé (sur lequel Euler revient ailleurs dans sa correspondance) pour montrer qu'il a besoin d'un complément. A cet effet rapportons la figure (Figures 5 et 6) à un système orthogonal ayant pour origine le centre du cercle donné et comme axe des abscisses la droite OC. Soient  $r$  le rayon du cercle,  $\xi$  l'abscisse du point C et  $y = x \cdot \operatorname{tg} \alpha$  l'équation d'un diamètre quelconque. Les coordonnées d'une E de ses extrémités seront  $r \cos \alpha, r \sin \alpha$  et l'équation de la perpendiculaire à CE en son milieu sera

$$(x - r \cos \alpha)^2 + (y - r \sin \alpha)^2 = (x - \xi)^2 + y^2,$$

c'est-à-dire  $2(\xi - r \cos \alpha)x - 2r \sin \alpha y + r^2 - \xi^2 = 0$ . Les coordonnées du point M

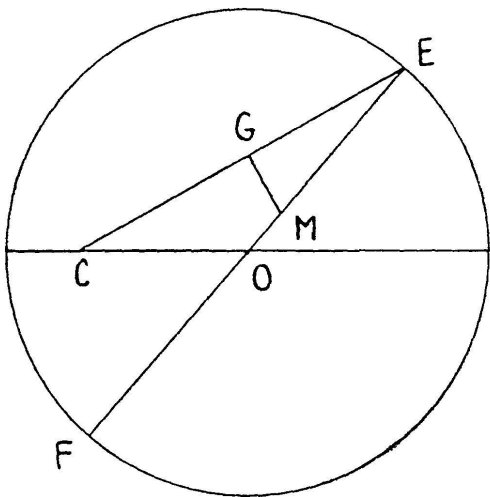


Fig. 5.

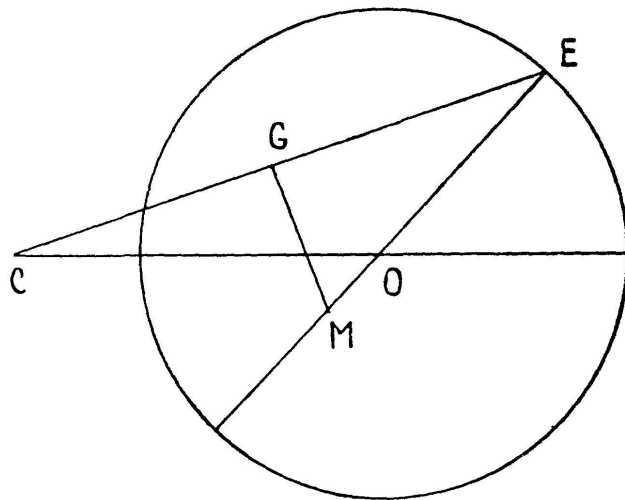


Fig. 6.

où elle coupe le diamètre considéré seront de la forme  $\sigma \cdot \cos \alpha, \sigma \cdot \sin \alpha$  et on trouve, à l'aide de l'équation précédente

$$\sigma = \frac{\xi^2 - r^2}{2(\xi \cos \alpha - r)}.$$

L'équation du lieu du point M s'obtiendra en éliminant  $\alpha$  entre les équations

$$x = \frac{(\xi^2 - r^2) \cos \alpha}{2(\xi \cos \alpha - r)}, \quad y = x \operatorname{tg} \alpha;$$

elle est donc

$$\left(\frac{\xi^2 - r^2}{2} - \xi x\right)^2 = r^2(x^2 + y^2);$$

cela prouve que le lieu est une section conique. En transportant l'origine des coordonnées au milieu du segment CO cette équation devient

$$\frac{X^2}{\frac{r^2}{4}} + \frac{Y^2}{\frac{r^2 - \xi^2}{4}} = 1;$$

les points C, O sont donc en effet les foyers de la courbe et la courbe est une ellipse

12. — Pour épuiser le problème catoptrique, il faut montrer comment est représentée analytiquement une courbe ayant  $\infty^1$

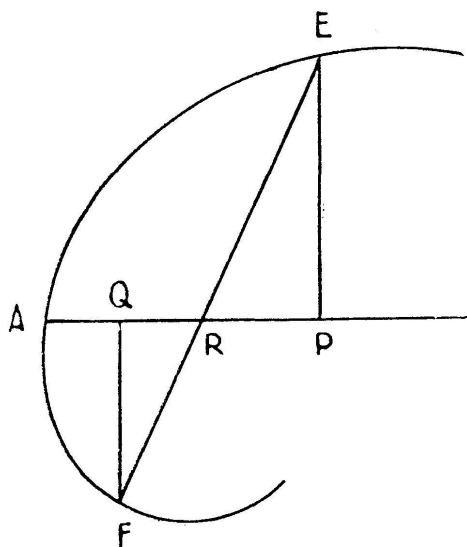


Fig. 7.

cordes égales entre elles et binormales à cette courbe (cela en prouvera *a posteriori* l'existence). Choisissons à cet effet (fig. 7) un axe d'origine A et appelons  $x, y$  les coordonnées AP, EP d'un point quelconque E de la courbe; par le point E il passe une corde binormale dont l'autre extrémité F a pour coordonnées AQ = X, PQ = -Y. Comme la corde EF est normale à la courbe aux points E, F, si R est le point où elle coupe l'axe, PR et QR seront les

sous-normales correspondantes ; donc

$$PR = y \cdot \frac{dy}{dx}, \quad QR = -Y \cdot \frac{dY}{dX};$$

et, comme

$$\frac{EP}{PR} = \frac{FQ}{QR},$$

on aura encore

$$\frac{dx}{dy} = \frac{dX}{dY}.$$

Si  $p$  est la valeur de ces deux fractions, on aura :

$$dx = p \cdot dy, \quad dX = p \cdot dY$$

$$PR = \frac{y}{p}, \quad QR = -\frac{Y}{p}, \quad PQ = X - x = \frac{y - Y}{p}.$$

seulement lorsque le point C est intérieur au cercle donné; lorsqu'il est extérieur elle est une hyperbole. La droite GM, étant la bissectrice de l'angle CME, est la tangente en M à la courbe.

Ajoutons que lorsqu'on connaît d'une section conique les axes en grandeur et position, pour la décrire à l'aide du procédé découvert par Euler, on prendra comme point fixe un de ses foyers et l'autre comme centre du cercle auxiliaire et comme diamètre de ce dernier le demi-axe focal de la conique.

Différentiant, on trouve

$$\frac{dy - dY}{p} - (y - Y) \frac{dp}{p^2} = dX - dx = p(dY - dy)$$

et ensuite

$$\frac{(y - Y) \cdot dp}{p^2} = \frac{(dy - dY)(1 + p^2)}{p}$$

$$\frac{dy - dY}{y - Y} = \frac{dp}{p(1 + p^2)} = \frac{dp}{p} - \frac{p dp}{p^2}.$$

Intégrant, on a :

$$\log(y - Y) = \log 2a + \log p - \log \sqrt{1 + p^2},$$

ou bien

$$y - Y = \frac{2ap}{\sqrt{1 + p^2}},$$

d'où successivement :

$$x - X = \frac{2a}{\sqrt{1 + p^2}}$$

$$PE + QF = y - Y = \frac{2ap}{\sqrt{1 + p^2}},$$

$$\overline{EF}^2 = \overline{PQ}^2 + (PE + QF)^2 = 4a^2.$$

La corde EF est donc d'une longueur constante  $2a$ .

Si P est une fonction de  $p$ , on peut poser

$$y = P + \frac{ap}{\sqrt{1 + p^2}}, \quad Y = P - \frac{ap}{\sqrt{1 + p^2}};$$

par conséquent

$$dy = dP + \frac{a \cdot dp}{(1 + p^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad dx = p \cdot dy = P dp + \frac{ap \cdot dp}{(1 + p^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

On a donc enfin

$$x = \int P dp - \frac{a}{\sqrt{1 + p^2}}, \quad y = P + \frac{ap}{\sqrt{1 + p^2}}. \quad (15)$$

Chaque choix de la fonction P de  $p$  donne une solution du problème qui, en conséquence, en admet un nombre indéfini.

Afin que la courbe à laquelle on arrive soit continue, il faut que la fonction  $P$  ait la même qualité; et pour obtenir ce résultat Euler croit *nécessaire* (attention, lecteurs!) que  $P$  soit une fonction *rationnelle* de  $p$ ; comme exemple il suppose  $P = 2bp$  et il arrive à la courbe

$$x = bp^2 - \frac{a}{\sqrt{1+p^2}} + a, \quad y = 2bp + \frac{ap}{\sqrt{1+p^2}},$$

algébrique du 6<sup>me</sup> degré; enfin il dit que, non seulement il est aisé de la construire, mais que *la même chose* arrive pour toutes les courbes qu'il a obtenues.

13. — La communication de ces importants résultats produisit chez Goldbach, comme il est bien naturel, le plus vif intérêt; mais, dès ce moment, la correspondance des deux savants se détacha de la courbe catoptrique pour se tourner vers les courbes à un nombre infini de binormales égales, découvertes par Euler. Sans nous arrêter à quelques simples conséquences tirées par Goldbach des formules de son éminent correspondant et qui se rapportent aux valeurs extrêmes des coordonnées (vol. cit., p. 470 et 483), nous remarquons les éclaircissements qu'il a demandés sur l'existence de diamètres et en général sur la forme des nouvelles lignes; cela amena Euler à entrer en plus de détails, à lui fournir (*id.*, p. 485, 490 et 498) des beaux dessins des nouvelles courbes et — ce qui est bien plus important — à introduire la considération méthodique de leurs développées et à exposer quelques remarques très originales sur leurs propriétés: qu'il nous suffise de dire que ces développées sont d'une forme semblable à l'hypocycloïde à trois rebroussements déjà rencontrée par notre géomètre (voir n<sup>o</sup> 8).

#### VIII. — CONCLUSIONS.

14. — Les considérations que nous venons de citer ont une importance secondaire par rapport au problème qui fait l'objet de notre mémoire; mais elles en possèdent une très grande pour

ceux qui désirent suivre l'évolution de la pensée eulérienne, car on y aperçoit la source de ses recherches sur les courbes *orbiformes* et *triangulaires*<sup>1</sup>; on y trouve même des remarques sur leur construction qui acquérèrent avec le temps et par des nouvelles recherches du grand géomètre une portée plus générale. Ajoutons que l'apparition récente dans la littérature mathématique des courbes orbiformes, sous le nom de *courbes d'une largeur constante*, assurent à Euler, même dans ce champ, la place d'un vrai précurseur.

Mais les études sur lesquelles nous avons fixé par ce travail l'attention des mathématiciens ont encore une grande valeur au point de vue de la doctrine; car elles prouvent une fois de plus que l'examen direct et profond d'une question géométrique peut permettre de vaincre des difficultés (intégrations) contre lesquelles échouent les procédés classiques de l'analyse infinitésimale: et c'est presque par une ironie de la destinée qu'à cette conclusion nous amène l'examen de travaux de celui qui est avec raison considéré comme le type le plus parfait de l'analyste pur.

Pratovecchio (Arezzo), juillet-août 1940.

---

<sup>1</sup> Voyez le mémoire *De curvis triangularibus* (Acta Acad. Petrogr. 1778). Comp. *Spezielle alg. und transsc. ebene Kurven*, I Bd. (II. Aufl., 1910), p. 374 et suiv.

---