

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 38 (1939-1940)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: PROPOS DU THÉORÈME FONDAMENTAL DE LA THÉORIE DES JACOBIENS
Autor: Lévy, Paul
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-515783>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 04.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

A PROPOS DU THÉORÈME FONDAMENTAL DE LA THÉORIE DES JACOBIENS

PAR

Paul LÉVY (Paris).

1. — Dans presque tous les traités d'analyse, on énonce, et l'on croit démontrer, le théorème suivant: *la condition nécessaire et suffisante pour que n fonctions u_i de n variables x_j ($i, j = 1, 2, \dots, n$) soient liées par une relation est que leur jacobien (que nous désignerons par δ) soit nul.*

Cette condition est bien nécessaire. Mais, en ce qui concerne la réciproque, nous nous proposons de montrer que, non seulement la démonstration classique est insuffisante, mais qu'il y a quelques réserves à faire sur le théorème lui-même.

Observons d'abord que son énoncé manque singulièrement de précision. D'une part, si l'on parle de jacobien, c'est sans doute qu'on admet implicitement la continuité des u_i et l'existence de leurs dérivées premières; nous admettrons aussi qu'elles sont continues. D'autre part, il faut préciser la région de l'espace décrite par le point x (de coordonnées x_j); cela peut être l'espace entier, et dans ce cas on ne change rien d'essentiel en supposant les dérivées $\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ bornées; si c'est une région finie et fermée de l'espace, elles le sont nécessairement; si de plus deux points quelconques de cette région peuvent être reliés par une ligne continue dont la longueur ne dépasse pas une valeur donnée, les u_i eux-mêmes sont bornés, ce qui modifie essentiellement la nature du problème posé.

Il faut d'autre part préciser la signification des mots « fonc-

tions liées par une relation ». La première idée qui vient à l'esprit est que toutes les relations de la forme

$$\Phi(u_1, u_2, \dots, u_n) = 0, \quad (1)$$

Φ étant une fonction continue et non identiquement nulle, peuvent être considérées comme des relations entre les u_i . Mais cela conduirait à considérer les fonctions $u = \cos x$ et $v = \sin y$ comme liées par une relation, puisqu'on peut définir des fonctions $\Phi(u, v)$ nulles dans le carré $|u| \leq 1, |v| \leq 1$, et différentes de zéro à l'extérieur de ce carré; une telle convention serait en contradiction évidente avec le sens usuel du mot « relation ». Nous conviendrons alors de dire qu'il y a une relation entre les u_i s'il y a une relation de la forme (1), la fonction Φ étant continue et presque partout différente de zéro. Cette relation définit donc un ensemble fermé et de mesure nulle, qui, par suite, n'est partout dense dans aucun volume. Inversement n'importe quel ensemble E fermé et de mesure nulle peut être défini par une relation du type (1); il n'y a qu'à prendre pour Φ la distance à cet ensemble; cette distance vérifiant évidemment la condition de Lipschitz

$$|\Phi_1 - \Phi_2| \leq r_{1,2},$$

où Φ_1 et Φ_2 sont les valeurs de Φ en deux points dont la distance est $r_{1,2}$, on voit qu'on ne modifie pas la notion de relation entre les u_i en imposant à la fonction Φ de vérifier cette condition.

Dans le cas du plan, et pour le problème qui nous occupe, où le lieu du point u est nécessairement un continu (si l'on suppose que la région décrite par x est d'un seul tenant), on peut même montrer qu'on ne change rien à la notion considérée en imposant à la fonction Φ d'avoir toutes ses dérivées de tous les ordres continues et bornées.

Le complément E' de E est en effet toujours la réunion d'un nombre fini ou d'une infinité dénombrable de domaines d'un seul tenant \mathcal{R}_h , tels que la frontière de chacun des \mathcal{R}_h ne comprenne aucune partie impropre au sens de la théorie du problème de Dirichlet. On peut donc y définir une fonction ω_h , solution de

$$\Delta\omega + \lambda\omega = 0,$$

où λ est la plus petite des constantes fondamentales de cette équation pour le domaine \mathcal{R}_h , et qui soit comprise entre zéro et un dans la région \mathcal{R}_h et nulle sur sa frontière. La fonction φ , nulle sur E et égale dans chacun des \mathcal{R}_h à $e^{-\frac{1}{\omega_h}}$, est alors nulle sur E , positive sur E' , et continue ainsi que toutes ses dérivées.

Désignons par $\lambda_{h,p}$ un multiplicateur positif tel que, dans \mathcal{R}_h , le produit $\lambda_{h,p}$ ait toutes ses dérivées d'ordre p au plus égales à l'unité en valeur absolue, par k_h le plus petit des nombres 1, $\lambda_{h,1}$, ..., $\lambda_{h,h}$, et par Φ une fonction nulle sur E et égale à $k_h \varphi$ dans chacun des \mathcal{R}_h . Ses dérivées d'ordre p , étant bornées dans chacun des \mathcal{R}_h , et ne pouvant y dépasser l'unité que pour les p régions d'indices $\leq p$, cette fonction est bornée dans tout le plan ainsi que n'importe laquelle de ses dérivées; comme $\Phi = 0$ caractérise les points de E , le résultat énoncé est bien établi.

Cette démonstration est en défaut dans le cas de l'espace, comme on le voit en considérant le domaine dont la frontière est constituée par la surface d'une sphère et un de ses rayons. Il semble pourtant que le résultat subsiste. Contentons-nous d'observer qu'il devient évident si l'on accepte que Φ s'annule, en dehors de E , sur un ensemble E_1 de mesure nulle; E' désignant alors le complément de $E + E_1$, on peut prendre pour E' la réunion d'une infinité dénombrable de domaines sphériques, et, à l'intérieur de chacune de ces sphères \mathcal{R}_h , prendre pour ω_h la puissance par rapport à la sphère, changée de signe.

2. — Rappelons maintenant, pour en montrer l'insuffisance, le raisonnement par lequel on démontre habituellement que $\delta = 0$ entraîne l'existence d'une relation entre les u_i . Il nous suffira de considérer le cas de deux fonctions u et v de deux variables x et y .

Si, dit-on, les quatre dérivées u'_x , u'_y , v'_x , v'_y sont nulles, u et v sont constants et, dans ce cas, on a même deux relations $u = c$, $v = c'$, vérifiées par u et v . Dans le cas contraire, supposons, pour fixer les idées, que v'_y ne soit pas nul; de $v = g(x, y)$, on tire $y = \varphi(x, v)$, et l'expression de u devient

$$u = f(x, y) = f[x, \varphi(x, v)] = f_1(x, v). \quad (2)$$

D'ailleurs

$$\delta = \frac{D(u, \varphi)}{D(x, y)} = \frac{D(u, \varphi)}{D(x, \varphi)} \frac{D(x, \varphi)}{D(x, y)} = \frac{\partial f_1(x, \varphi)}{\partial x} \varphi'_y,$$

et, comme φ'_y n'est pas nul, $\delta = 0$ entraîne $\frac{\partial f_1(x, \varphi)}{\partial x} = 0$; la relation (2) est donc une relation entre u et φ .

Il y a, dans ce raisonnement, une confusion entre le point de vue local et le point de vue global. Si le premier cas est celui où les quatre dérivées premières de u et φ sont partout nulles, dans le second, on peut sûrement trouver une des dérivées qui ne soit pas partout nulle; si tel est le cas pour φ'_y , le raisonnement que nous venons de rappeler est correct au voisinage de tout point où cette dérivée n'est pas nulle. Le résultat énoncé est donc bien établi, localement, au voisinage de tout point où les quatre dérivées premières ne sont pas toutes nulles.

Au point de vue local, il reste à examiner ce qui se passe au voisinage d'un point $A_0(x_0, y_0)$ où l'on ait

$$u'_x = u'_y = \varphi'_x = \varphi'_y = 0, \quad (3)$$

si ces dérivées ne restent pas nulles dans ce voisinage. Il peut arriver que, dans ce voisinage, les équations (3) définissent un ensemble qui sépare la partie du plan voisine de A_0 en plusieurs régions distinctes; on pourra alors avoir différentes relations

$$\Phi_\nu(u, \varphi) = 0 \quad (\nu = 1, 2, \dots)$$

chacune étant vérifiée dans une de ces régions.

Il n'est même pas nécessaire, pour mettre en défaut le raisonnement rappelé plus haut, que les quatre équations (3) soient vérifiées sur des lignes séparant le plan en régions distinctes. Il suffit que les deux premières soient vérifiées sur certaines lignes L et les deux autres sur des lignes L' . Au voisinage d'une ligne L , il y aura sûrement une relation $\varphi = \varphi(u)$; au voisinage d'une ligne L' , il y aura sûrement une relation $u = \varphi_1(\varphi)$. Mais, si l'on traverse successivement une ligne L et une ligne L' , rien ne prouve que la relation entre u et φ puisse conserver une même forme $\Phi(u, \varphi) = 0$; comme plusieurs lignes L et L' peuvent se couper en A_0 cette objection se présente déjà dans le cas de

l'étude locale. *A fortiori* se présente-t-elle pour l'étude du plan tout entier.

On peut être tenté de répondre à ces objections de la manière suivante: le plan, ou la région du plan où u et v sont définis, peuvent en tout cas être décomposés en une infinité dénombrable au plus de régions dans chacune desquelles u et v varient en vérifiant une relation $\Phi_\nu(u, v) = 0$, séparées par des lignes ou des régions où u et v sont constants. Il suffit alors de trouver une suite d'exposants α_ν rendant convergent le produit

$$\Phi(u, v) = \prod |\Phi_\nu(u, v)|^{\alpha_\nu},$$

pour dire que, dans tout le plan, u et v vérifient la relation $\Phi(u, v) = 0$.

Mais cette suite d'exposants α_ν n'existe pas toujours; cela résulte des exemples que nous allons maintenant indiquer.

3. — *Premier exemple.* — Divisons le plan des xy en une infinité dénombrable de couronnes circulaires, séparées par des cercles concentriques de rayons $R_1, R_2, \dots, R_\nu, \dots$, indéfiniment croissants, et tels que la différence $R_{\nu+1} - R_\nu$ croisse aussi indéfiniment avec ν . Posons

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega = (R_1^2 - R^2)^2 \quad \text{pour} \quad r^2 = x^2 + y^2 \leq R_1^2, \\ \omega = (r - R_\nu)^2 (R_{\nu+1} - r)^2 \quad \text{pour} \quad R_\nu \leq r \leq R_{\nu+1} (\nu = 1, 2, \dots). \end{array} \right. \quad (4)$$

Cette fonction ω est continue, à dérivées premières continues, et admet dans la $\nu^{\text{ième}}$ couronne circulaire un maximum m_ν qui augmente indéfiniment avec ν . En désignant par α un nombre irrationnel, posons

$$u = \omega \cos \nu \pi \alpha, \quad v = \omega \sin \nu \pi \alpha \quad (R_\nu \leq r \leq R_{\nu+1}). \quad (5)$$

Nous obtenons ainsi deux fonctions u et v continues ainsi que leurs dérivées premières. Le lieu du point (u, v) est constitué par une infinité de segments OM_ν , portés par des demi-droites formant un ensemble partout dense dans le plan; la longueur m_ν du segment OM_ν augmentant indéfiniment avec ν , l'ensemble de ces segments eux-mêmes est aussi partout dense, de sorte qu'il

ne peut y avoir aucune relation entre u et v . Pourtant le jacobien de ces deux fonctions est partout nul.

En remplaçant w par $w e^{\frac{1}{w}}$, on aurait un exemple analogue, mais pour lequel toutes les dérivées de tous les ordres de u et v seraient continues.

On peut naturellement varier à l'infini le schéma précédent, en considérant d'autres modes de décomposition du plan en une infinité dénombrable de régions.

4. — *Deuxième exemple.* (Cet exemple est dû à M. Laurent Schwartz.) — Considérons dans le plan des u, v une courbe de Jordan qui, indéfiniment prolongée, remplisse un ensemble partout dense dans le plan; par exemple

$$u = x \sin x, \quad v = x \sin \alpha x, \quad (6)$$

α étant irrationnel. Le paramètre étant x , et u et v étant ainsi indépendants de y , le jacobien de ces fonctions est nul; pourtant il n'y a aucune relation entre u et v .

De même, en posant

$$u_i = x_1 \sin \alpha_i x_1 \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (7)$$

on obtient, si les α_i sont linéairement indépendants, n fonctions de x_1, x_2, \dots, x_n dont le jacobien est nul, et telles même que tous les $\frac{D(u_i, u_j)}{D(x_h, x_k)}$ sont nuls, puisque les u_i ne dépendent que de x_1 . Pourtant l'ensemble des positions du point (u_1, u_2, \dots, u_n) est partout dense, dans tout l'espace.

On peut généraliser d'une manière analogue le premier exemple en remplaçant les demi-droites qui portent les vecteurs OM_v par des demi-droites formant un ensemble dense dans toutes les directions possibles de l'espace à n dimensions.

5. — Dans les exemples précédents, nous ne nous sommes pas préoccupés de borner les dérivées $\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$. Dans ces conditions le résultat subsiste si le point x est assujéti à rester dans une région finie de l'espace; une transformation continue permet en

effet de faire correspondre à l'espace entier cette région, ou une sphère qui lui soit intérieure.

Si au contraire nous supposons les $\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ bornés, il est essentiel de distinguer le cas où le point x décrit l'espace entier (ou certaines portions infinies de l'espace) et celui où il est astreint à rester dans une région finie.

Dans le premier cas le résultat obtenu subsiste. Dans le premier exemple, il suffit de multiplier ω par un facteur constant dans chacune des régions considérées, de manière que les dérivées du produit soient bornées dans tout le plan (ou dans tout l'espace); pourvu que les régions considérées soient de plus en plus grandes, cela n'empêche pas les vecteurs OM_v d'avoir des longueurs de plus en plus grandes. Dans le second exemple, il suffit de supposer que la courbe de Jordan considérée soit décrite avec une vitesse bornée (en fonction de x_1); ainsi, dans les formules (6) et (7), il suffit de remplacer x_1 par $\sqrt{x_1}$.

Il est bien clair, au contraire, que si les $\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ sont bornés, et si le point x reste dans une région bornée, le point u reste aussi dans une région bornée, et son lieu ne peut pas être dense dans tout l'espace. La question suivante se pose alors: peut-il être dense dans une région bornée de l'espace? Si la réponse est affirmative, le théorème généralement énoncé doit être considéré comme faux; si elle est négative, il peut être considéré comme exact, à condition d'en préciser l'énoncé en spécifiant que les $\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ sont bornés. C'est cette seconde alternative qui est réalisée, comme nous allons le voir, par un raisonnement très simple dû à M. Laurent Schwartz.

Le point x décrivant une région \mathcal{R} que l'on peut supposer fermée, le lieu du point u est un continu E , borné et fermé. Sa mesure est au plus

$$\int_{\mathcal{R}} |\delta| dx_1 dx_2 \dots dx_n, \quad (8)$$

c'est-à-dire zéro, puisque $\delta = 0$; E ne peut donc être dense dans aucun volume, c'est-à-dire qu'il y a bien une relation entre les u_i .

Ce raisonnement très simple nous paraît devoir être précisé sur un point. Ce qu'on démontre en général dans les traités d'analyse, ce qui, en tout cas, résulte de la théorie du changement de variables dans les intégrales multiples, c'est que, si δ n'est pas nul, l'intégrale (8) représente la mesure de l'ensemble décrit par le point u quand x décrit \mathcal{R} , à condition de compter chaque partie de ce volume autant de fois qu'elle est décrite; si donc on ne compte chaque partie qu'une fois, on obtient une mesure bornée supérieurement par l'intégrale (8). Mais, si δ est partout nul dans \mathcal{R} , le raisonnement tombe en défaut: il n'y a pas correspondance biunivoque entre (x) et (u) , et la théorie du changement de variables ne s'applique plus.

Il est facile de répondre à cette objection, par exemple en raisonnant par continuité. Introduisant un paramètre λ , on peut évidemment définir des fonctions continues φ_j ($j = 1, 2, \dots, n$) des x_i et de λ , se réduisant aux u_i pour $\lambda = 0$, et dont le jacobien $\Delta(\lambda)$ soit égal à λ . Alors l'intégrale (8), où δ est remplacé par $\Delta(\lambda) = \lambda$, borne supérieurement le volume $V(\lambda)$ décrit par le point (φ) ; ce volume tend donc vers zéro avec λ . Or la surface transformée d'une surface donnée dans \mathcal{R} varie d'une manière continue avec λ ; si donc E remplissait une sphère de rayon ρ , pour λ assez petit, $V(\lambda)$ remplirait un volume limité par une surface très voisine de celle de cette sphère, et qui, par exemple, contiendrait à son intérieur la sphère de rayon $\frac{\rho}{2}$ concentrique à la précédente; c'est impossible, puisque $V(\lambda)$ tend vers zéro.

On peut aussi donner un raisonnement géométrique direct. Si δ est nul en un point x_0 , on peut, à tout ε positif, faire correspondre un nombre $\eta(\varepsilon)$ tel que, si x décrit une sphère de centre x_0 et de rayon $\rho \leq \eta(\varepsilon)$, u décrive un volume de mesure au plus égale à $\frac{4}{3} \pi \rho^3 \varepsilon$. Si δ est partout nul dans \mathcal{R} , on peut alors recouvrir \mathcal{R} par une infinité dénombrable de sphères Σ_ν , ayant chacune cette propriété que, si x décrit Σ_ν , u décrit un ensemble de mesure au plus égale au produit par ε du volume de Σ_ν ; on peut s'arranger de plus pour que, Σ'_ν désignant une sphère concentrique à Σ_ν et de rayon deux fois plus petit, les sphères Σ'_ν soient extérieures les unes aux autres. Le volume total des sphères Σ_ν est alors au plus égal à $2^n \Omega$ (Ω étant le volume de \mathcal{R}), et la mesure

de E est donc au plus $2^n \Omega \varepsilon$; ε étant arbitrairement petit, elle est nulle, c.q.f.d.

Naturellement, lorsque \mathcal{R} augmente et arrive à comprendre tout l'espace, la mesure de E reste nulle; mais on ne peut plus affirmer que cet ensemble soit fermé. Le résultat finalement obtenu peut donc s'énoncer comme suit.

Si u_1, u_2, \dots, u_n sont des fonctions de x_1, x_2, \dots, x_n continues, à dérivées premières continues et bornées, et à jacobien nul, le lieu du point u de coordonnées u_1, u_2, \dots, u_n , est un ensemble E de mesure nulle. Si le point x de coordonnées x_1, x_2, \dots, x_n reste dans une région \mathcal{R} bornée, l'ensemble E est fermé, et n'est par suite dense dans aucun volume; il existe alors entre les u_i une relation

$$\Phi(u_1, u_2, \dots, u_n) = 0,$$

la fonction Φ étant continue, et presque partout différente de zéro; on peut par exemple prendre pour Φ la distance à E . Si le point x décrit tout l'espace, il peut au contraire arriver que E soit partout dense, dans tout l'espace.

C'est naturellement le premier de ces résultats qui s'applique dans le cas où le point x décrit, non l'espace euclidien, mais une sphère de Riemann à n dimensions. Si n fonctions de ce point sont continues, à dérivées premières continues, les dérivées géométriques étant bornées, et si leur jacobien est nul, il existe une relation entre elles.
