Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 38 (1939-1940)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: UNE FONCTION CONTINUE SANS DÉRIVÉE

Autor: Lebesgue, Henri

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-515781

UNE FONCTION CONTINUE SANS DÉRIVÉE

PAR

Henri Lebesgue, Membre de l'Institut (Paris).

Avant d'exposer son intéressant exemple de fonction dépourvue de dérivée, M. R. Tambs Lyche remarque très justement que la première fonction de cette nature, celle due à Weierstrass, conviendrait mal pour un enseignement élémentaire; cela m'a conduit à rechercher comment, de ce point de vue pédagogique, améliorer cet exemple qui, utilisant le développement en série de Fourier, a le grand avantage de montrer que des fonctions non dérivables peuvent se présenter au cours d'un calcul d'allure tout à fait normale. Cela est facile, aussi l'observation qui suit n'est certainement pas nouvelle; il peut cependant être utile de la publier ici.

Soit, par exemple, la fonction, évidemment continue,

$$f(x) = \sum_1^\infty \frac{1}{2^n} \sin 2^{n^2} x = \sum_1^\infty u_n(x) \ , \qquad (1)$$

On a:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \sum_1^\infty \frac{1}{2^n h} \left[\sin 2 n^2 (x+h) - \sin 2 n^2 x\right] \ . \qquad (2)$$

La limite supérieure de la valeur absolue du $n^{\text{ième}}$ terme de (2) est aussi celle de $|u_n'(x)|$, donc la valeur absolue de la somme des $m - 1$ premiers termes de (2) est au plus

$$\sum_1^{m-1} \frac{1}{2^n} 2^{n^2} = \sum_1^{m-1} 2^{n^2-n} < 2^{(m-1)^2-(m-1)+1} = 2^{m^2-3m+3} \ ,$$

car chaque terme 2^{n^2-n} est inférieur à la moitié du suivant.

Donnons à h les quatre valeurs

$$h_1 = \frac{\pi}{2^{m^2+1}}, \quad h_2 = \frac{-\pi}{2^{m^2+1}}, \quad h_3 = \frac{3\pi}{2^{m^2+1}}, \quad h_4 = \frac{-3\pi}{2^{m^2+1}};$$

les arcs $\alpha_n = 2^{n^2}x$ subissent alors, pour $n > m$, des accroissements, positifs ou négatifs, qui sont des multiples entiers de 2π et, par suite, (2) se réduit à ses m premiers termes.

Pour $n = m$, l'arc α_n subit un accroissement

$$\frac{\pi}{2}, \quad \text{ou} \quad -\frac{\pi}{2}, \quad \text{ou} \quad \frac{3\pi}{2}, \quad \text{ou} \quad -\frac{3\pi}{2};$$

d'où, pour $\sin \alpha_m$, un accroissement $(\cos \alpha_m - \sin \alpha_m)$ ou $-(\cos \alpha_m + \sin \alpha_m)$, et la somme des carrés de ces deux quantités étant égale à 2, l'une d'elles au moins n'est pas inférieure à 1 en valeur absolue. Ainsi, la valeur absolue du $m^{\text{ième}}$ terme de (2) est au moins

$$\frac{1}{2^m \dfrac{3\pi}{2^{m^2+1}}} = \frac{2^{m^2-m+1}}{3\pi},$$

soit pour h_1 et h_4, soit pour h_2 et h_3, et d'ailleurs ce terme aura tel signe que nous voudrons puisque h_1 et h_4, h_2 et h_3 donnent des résultats de signes contraires.

En résumé, on aura:

$$\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right| > \frac{2^{m^2-m+1}}{3\pi} - 2^{m^2-3m+3};$$

donc $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ augmente indéfiniment en valeur absolue pour la suite des valeurs de h que nous associons à la suite des entiers m, et cela avec le signe que nous voulons.

La fonction f(x) *n'a donc en aucun point une dérivée déterminée, ni finie, ni infinie.*

Si, au lieu d'avoir affaire à des élèves débutants, il s'agissait d'étudiants au courant des profonds résultats de M. DENJOY sur l'indétermination du rapport (2), la fonction $f(x)$ fournirait un exercice facile et instructif: classer les diverses valeurs de x dans les quatre types prévus par M. Denjoy.