

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 38 (1939-1940)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** LE CALCUL DES VARIATIONS GLOBAL  
**Autor:** Threlfall, W.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-515779>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 04.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# LE CALCUL DES VARIATIONS GLOBAL<sup>1</sup>

PAR

W. THRELFALL (Francfort s. M.).

---

La théorie dont je vais vous donner un aperçu s'appuie sur des idées d'Henri POINCARÉ. Il s'agit d'un chapitre de l'analyse globale. Cette discipline, très moderne, n'est cependant pas encore universellement connue. Mais, par sa beauté et son caractère d'unité elle peut soutenir la comparaison avec la théorie classique des fonctions, qui, envisagée du point de vue de Riemann, est une théorie globale, elle aussi: elle ne se borne pas au voisinage d'un point, mais traite la fonction analytique dans toute son étendue.

Les dernières décades ont été très fertiles pour les mathématiques. On a créé de grandes théories en dehors des théories classiques, p. ex. la théorie des nombres algébriques, l'algèbre axiomatique ou la théorie de la relativité.

Les progrès sont si vastes qu'un seul mathématicien ne pourrait pas embrasser d'un coup d'œil tout le domaine. Certains ont mal interprété ces progrès et y ont voulu voir un manque d'unité à la place d'un développement fécond.

En effet, exiger d'un mathématicien qu'il connaisse toutes les théories qui ont été inventées dans les divers coins du globe serait trop demander. On n'exige pas de lui non plus qu'il connaisse parfaitement toutes ces théories, de même qu'il serait abusif d'exiger d'un chef d'orchestre qu'il connaisse toutes les symphonies qui ont été composées à travers les âges.

Le chef d'orchestre qui dirige pour la première fois un nouveau

---

<sup>1</sup> Conférence faite à l'Institut des Hautes Etudes de Belgique, le 28 octobre 1938

morceau de musique est tout de même dans une position plus favorable que le mathématicien qui fait connaître une nouvelle théorie. Le premier s'adresse au cœur humain qui peut sentir sans comprendre et sans effort intellectuel, tandis que le second ne peut parler que devant un auditoire plus restreint habitué aux développements des théories scientifiques. Il est vrai que la rigueur classique effraie parfois les non-initiés qui n'entrevoient pas toujours comment elle se concilie avec une imagination productive.

Quant à cette discipline d'analyse globale moderne, au lieu d'introduire une dispersion et une destruction dans le domaine mathématique, elle inaugure, bien au contraire, une unification des deux branches de cette science: elle fait disparaître les frontières entre la Géométrie et l'Analyse.

On a de tout temps, il est vrai, parlé de l'analyse globale. Mais, à part la théorie des fonctions de Riemann, ces idées ont été isolées et étaient même quelquefois plutôt des curiosités mathématiques. Elles ne sont devenues une véritable science qu'avec Poincaré. C'est Henri Poincaré qui a eu le mérite d'inventer et d'arithmétiser la topologie. De cette façon, il a donné aux savants les moyens de faire une science systématique en partant de ces données disparates. C'est un des plus grands mérites de ce mathématicien qui fut sans doute le plus génial et le plus riche en idées parmi les mathématiciens de son temps.

Le développement des idées que je vais vous présenter dans ma conférence d'aujourd'hui, est dû à M. Marston MORSE <sup>1</sup>, et ce développement sur le calcul des variations global repose tout entier sur la topologie de Poincaré. Cependant, je n'exigerai pas de vous la connaissance préliminaire de cette topologie. Je vais vous donner, au contraire, un résumé précis des notions fondamentales dont nous aurons besoin au cours de nos explications. Ces quelques notions que j'introduirai sont, dans le calcul des variations global, d'une importance aussi grande que les notions de rayon de convergence ou de surface de Riemann dans la théorie des fonctions.

---

<sup>1</sup> M. MORSE, Functional topology and abstract variational theory. *Mém. des sc. math.* XCII, Paris 1939. — H. SEIFERT, W. THRELFALL, *Variationsrechnung im Grossen*, Leipzig 1938.

\* \* \*

Le calcul des variations *local* se restreint au voisinage d'une extrémale. L'un des problèmes est, par exemple, de trouver les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'extrémale donne un minimum parmi les courbes voisines. Le calcul des variations *global* envisage la variété  $\mathcal{M}$ , sur laquelle le problème des variations est défini, dans toute son étendue. Une question typique est celle de trouver *toutes* les extrémales remplissant certaines conditions limites. On cherche, par exemple, toutes les géodésiques joignant deux points fixes, donnés sur une surface.

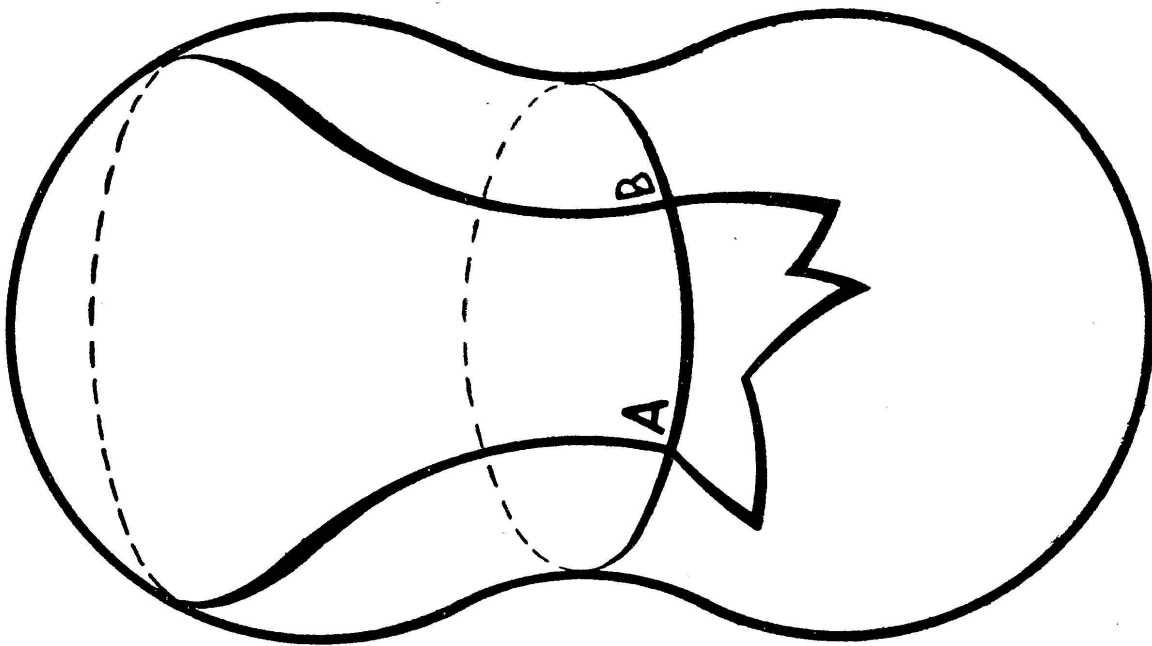


Fig. 1.

M. Morse, pour résoudre de tels problèmes globaux, se sert d'une idée que nous allons expliquer dans le cas des géodésiques sur une surface close. Les points limites A et B sont donnés à l'avance. On ne se contente pas alors des *géodésiques* partant de A et aboutissant en B et des courbes voisines, mais on considère toutes les courbes reliant A et B. J'en ai esquissé quelques-unes dans la figure 1. Nous nous bornons dans ce qui suit aux courbes ayant une tangente continue en tous leurs points, excepté peut-

être en un nombre fini de sommets; ce sont les courbes « lisses par parties » (stückweise glatt) ou de classe  $D$ , comme disent les Américains.

L'ensemble de ces courbes forme un espace métrique  $\Omega$ . On peut notamment définir une distance  $\rho(a, b)$  entre deux courbes, distance satisfaisant aux axiomes de l'espace métrique.

Dans ce qui va suivre, gardez-vous bien de confondre les deux notions suivantes:

la variété  $\mathfrak{M}$  sur laquelle se trouvent les courbes, et  
l'espace  $\Omega$ , dont chaque point représente une courbe de  $\mathfrak{M}$ .

La longueur  $J$  de cette courbe est une fonction sur  $\Omega$ , et  $J$  est continue grâce à la définition adoptée par nous, de la distance de deux courbes de  $\mathfrak{M}$ . Les géodésiques sont des courbes particulières de  $\mathfrak{M}$ . Donc, aux géodésiques correspondent certains points de  $\Omega$ . On les appelle *points stationnaires* de  $J$  sur  $\Omega$ . Or, il existe une relation entre la structure topologique de  $\Omega$  et le nombre minimum de ces points stationnaires. Une fonction continue  $J$  sur  $\Omega$  doit avoir au moins un certain nombre de points stationnaires, bien déterminé par les ordres de connexion de  $\Omega$ . Lorsque nous aurons déterminé cette relation entre le nombre minimum des points stationnaires de  $J$  et la connexion de  $\Omega$ , alors, nous aurons le nombre minimum de courbes géodésiques sur  $\mathfrak{M}$  joignant  $A$  et  $B$ . Il s'agit donc de découvrir cette relation.

D'ailleurs, le fait qu'une telle relation existe n'est pas étonnant. Elle est connue depuis longtemps en ce qui concerne le cas très simple que voici:  $\Omega$  est une surface close de genre  $h$ , c'est-à-dire une sphère à  $h$  anses, et  $J$  une fonction deux fois dérivable. Alors les points, nommés stationnaires, sont ceux où toutes les dérivées premières de  $J$  par rapport aux coordonnées locales sont nulles.

Comme exemple nous prenons le tore de révolution (c'est-à-dire la surface d'un anneau solide), que j'ai esquissé dans la figure 2. L'axe de révolution est l'axe des  $x$ , et la fonction deux fois dérivable est  $J = z$ , c'est-à-dire la hauteur au-dessus du plan de  $x$  et  $y$ . Nous aurons 4 points stationnaires, correspondant aux 4 plans tangents horizontaux: un minimum, un col inférieur, un

col supérieur et un maximum. Nous désignerons par  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$  les valeurs que prend la fonction  $J$  en ces 4 points.

Simplifions encore notre problème, supposons les points stationnaires non-dégénérés. La fonction  $J$  des coordonnées locales étant deux fois différentiable, on peut la développer selon Taylor jusqu'aux termes du 2<sup>me</sup> ordre. Le point stationnaire est dit

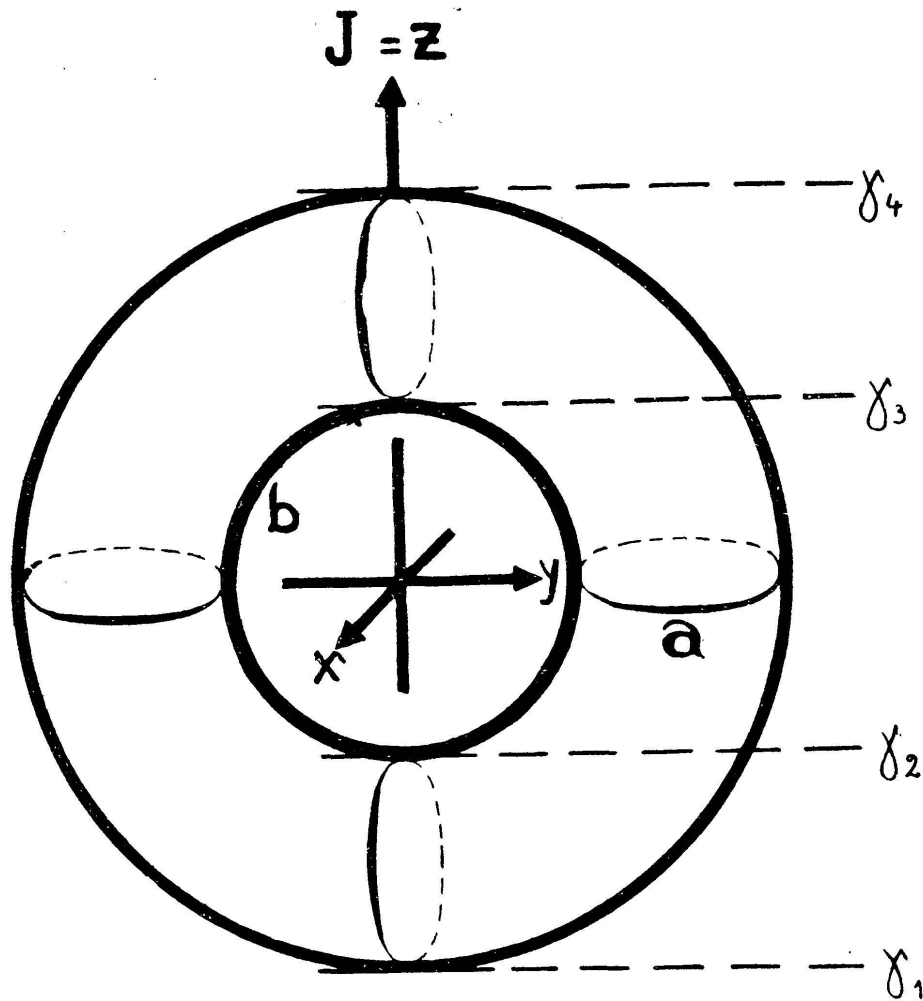


Fig. 2.

non-dégénéré si la forme quadratique composée des termes du 2<sup>me</sup> degré n'est pas dégénérée, c'est-à-dire si son déterminant n'est pas nul. Cette condition est évidemment remplie dans le cas du tore. On appelle alors indice de la forme quadratique ou du point stationnaire, le nombre des carrés négatifs qui se trouvent dans la forme quadratique normalisée.

Dans le cas de deux variables, nous obtiendrons trois types de points stationnaires, différenciés par l'indice de la forme quadratique. Nous désignerons les coordonnées locales par

$x_1, x_2$  et nous prenons comme point initial de ces coordonnées le point stationnaire en question. La forme quadratique normalisée peut être alors ou bien

$$\begin{aligned} & x_1^2 + x_2^2 \quad \text{indice 0, minimum, en nombre } M^0, \\ & \text{ou } -x_1^2 + x_2^2 \quad \text{indice 1, col} \quad , \text{ en nombre } M^1, \\ & \text{ou } -x_1^2 - x_2^2 \quad \text{indice 2, maximum, en nombre } M^2. \end{aligned}$$

Soient  $M^0, M^1, M^2$  les nombres des points stationnaires de ces trois types respectifs. Les indices supérieurs se rattacheront toujours à la dimension, et il ne faut pas les confondre avec des exposants.

Or, ces trois nombres ne sont pas indépendants les uns des autres. Ils sont liés par la formule de Kronecker. Soit  $N$  la caractéristique d'Euler de notre surface. Alors la formule de Kronecker sera

$$-M^0 + M^1 - M^2 = N.$$

La caractéristique d'Euler peut être calculée d'une part au moyen du nombre d'anses  $h$  de notre surface, d'autre part au moyen des nombres  $\alpha^0, \alpha^1, \alpha^2$  des sommets, des arêtes et des faces d'un polyèdre représentant la surface. On a

$$N = 2(h - 1) = -\alpha^0 + \alpha^1 - \alpha^2.$$

$M^0$  et  $M^2$  sont toujours  $\geq 1$ , car il y a toujours au moins un minimum et un maximum. La formule de Kronecker nous montre donc que  $M^1 \geq 2h$ ; il y a au moins  $2h$  cols. Ecrivons donc le résultat

$$M^0 \geq 1, \quad M^1 \geq 2h, \quad M^2 \geq 1.$$

Le nombre d'anses de notre tore est  $h = 1$ ; il y a en effet 2 cols, et dans les trois relations on a les signes d'égalité.

Notre exemple assez simple nous a donné des limites inférieures pour le nombre des points stationnaires d'indice  $k$  sur l'espace  $\Omega$ , déterminées par la structure topologique de  $\Omega$ . Dans ce qui suit, il s'agit de généraliser ces relations à des variétés de dimension quelconque et même à des espaces métriques quelconques qui n'ont pas de dimension finie du tout.

Afin d'exécuter cette généralisation, occupons-nous tout d'abord de la structure topologique de l'espace  $\Omega$ , et ensuite de la définition et de la classification des points stationnaires de la fonction  $J$  sur  $\Omega$ .

Pour déterminer la structure topologique, on devrait répondre à la question: quand deux espaces métriques sont-ils homéomorphes? Mais on ne saurait répondre à cette question et on ne peut même pas l'attaquer directement. Par conséquent, le procédé général de la topologie consiste en ce qu'on met des objets bien connus de dimension finie dans l'espace en question et qu'on analyse les possibilités qui s'y présentent. Ces objets, nous les appellerons des chaînes.

Bornons-nous à la théorie de connexion, ou, comme on dit aussi, à la théorie d'homologie modulo 2. Rappelons-nous les notions fondamentales de cette théorie. Ce sont les notions de chaîne, de l'addition des chaînes et du bord d'une chaîne, puis l'homologie des chaînes, et leur indépendance, et enfin le nombre de connexion de dimension  $k$ .

Une chaîne de dimension 0 est un ensemble fini de points de l'espace  $\Omega$ . Quant aux chaînes de dimension 1, on peut s'imaginer une ou plusieurs courbes tracées dans l'espace  $\Omega$ ; quant aux chaînes de dimension 2, une ou plusieurs surfaces bordées ou closes dans  $\Omega$ , etc. Mon intention n'est pas de donner par là une définition. La définition exacte introduirait les chaînes de dimension 0, 1, 2, ...,  $k$ , ... comme systèmes d'images continues de simplexes de dimension 0, 1, 2, ...,  $k$ , ... . Mais nous nous contenterons aujourd'hui de l'intuition.

Chaque chaîne de dimension  $k$  a un bord; c'est une chaîne de dimension  $k-1$ . Si cette chaîne est la chaîne 0 de dimension  $k-1$ , alors on dit que la chaîne de dimension  $k$  est fermée, ou est un cycle de dimension  $k$ .

Prenons comme premier exemple un segment du plan joignant deux points; c'est une chaîne de dimension 1. Son bord consiste dans les deux points, et ces deux points forment un cycle de dimension 0. — Prenons comme deuxième exemple une surface close quelconque de l'espace ordinaire; c'est un cycle de dimension 2. Si l'on fait un trou dans la surface en y découpant un petit cercle, on aura une chaîne de dimension 2 ( qui ne sera plus

un cycle). Cette chaîne est bordée par un cycle de dimension 1, c'est-à-dire par la circonférence du cercle.

Les chaînes, et spécialement les cycles jouissent de la possibilité d'être additionnés dans un certain sens. On ne peut additionner que des chaînes de même dimension  $k$ . L'élément 0 de cette addition est la chaîne 0 de dimension  $k$ .

L'essentiel est de savoir que les chaînes ne sont pas orientées : On fait abstraction de toute direction des courbes qui représentent des chaînes de dimension 0, de même de toute orientation des surfaces et de tout sens de vissage des chaînes à trois dimensions, etc. Or, nous exigerons de l'addition des chaînes que le bord d'une somme de deux chaînes soit égal à la somme des bords des chaînes composantes. Cela nous oblige à exécuter l'addition modulo 2.

Prenons pour exemple deux triangles du plan, ayant une arête en commun. Ce sont deux chaînes de dimension 2 du plan. Leur somme est un quadrilatère. L'arête commune se trouve deux fois dans la somme des bords des deux triangles, mais elle ne figure plus dans le bord du quadrilatère. Nous considérons donc le double de chaque chaîne de dimension  $k$  comme équivalent à la chaîne 0 de dimension  $k$ .

Il est aisé de voir qu'une chaîne de dimension  $k$ , bordant une chaîne de dimension  $k + 1$ , est fermée, c'est-à-dire est un cycle. Par exemple le bord d'un triangle est un cycle de dimension 1, homéomorphe à la circonférence. L'inverse, est-il vrai aussi ? Il en est ainsi dans le plan. En effet, chaque cycle de dimension 1 borde une chaîne de dimension 2 (un ou plusieurs morceaux du plan).

Mais il en est autrement dans des variétés plus compliquées. On peut s'en rendre compte sur le tore. Un méridien  $a$  du tore est un cycle de dimension 1, qui ne borde pas une portion de dimension 2 du tore. Pour le mettre en évidence, coupons le tore par le méridien  $a$  et par un parallèle  $b$ , et développons-le sur un rectangle du plan (fig. 3). Le méridien se calque deux fois, notamment sur deux côtés parallèles du rectangle et le parallèle sur les deux autres côtés. Evidemment un côté seul ne borde pas un morceau du rectangle.

Si un cycle de dimension  $k$  jouit de la propriété spéciale de

border une chaîne de dimension  $k + 1$ , on l'appelle homologue à 0.

On appelle homologues deux chaînes de dimension  $k$ , si elles forment ensemble le bord d'une chaîne de dimension  $k + 1$ . En particulier, deux cycles qui peuvent se déduire l'un de l'autre par une déformation continue sont certainement homologues. Un système de cycles de dimension  $k$  est dit indépendant, si aucune combinaison de ces cycles ne borde une chaîne de dimension  $k + 1$ .

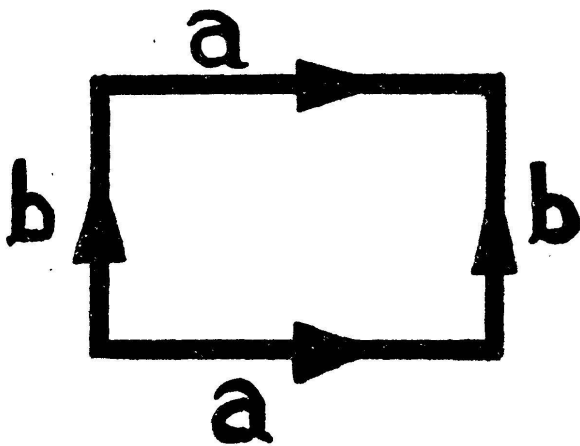


Fig. 3.

Nous voici arrivés aux nombres de connexion de l'espace  $\Omega$ . Le nombre  $R^k$  de connexion de dimension  $k$  est le nombre maximum de cycles indépendants de dimension  $k$ , qu'on peut placer dans l'espace  $\Omega$ .

Déterminons, par exemple, les nombres de connexion du tore. On a  $R^0 = 1$ . Il n'y a qu'un seul cycle indépendant de dimension 0; c'est un point quelconque du tore. Chaque autre point est homologue à celui-ci, car les deux points bordent ensemble une chaîne de dimension 1, notamment un segment qui les joint. — On a  $R^1 = 2$ . Il y a deux cycles de dimension 1 qui ne bordent pas ensemble une chaîne de dimension 2, le méridien  $a$  et le parallèle  $b$ . Il est aisé de prouver que tout autre cycle de dimension 1 est homologue à une combinaison de ces deux. — Finalement, on a  $R^2 = 1$ . Le seul cycle de dimension 2 qui existe est le tore entier lui-même. Il est homologiquement indépendant, c'est-à-dire qu'il n'est pas homologue à 0 sur le tore, car il ne borde pas une chaîne de dimension 3. En effet, nous ne considérons que la surface de dimension 2, et à ce point de vue, il n'existe pas de dimensions plus grandes que 2. Pour la même raison, tous les nombres de connexion de dimension supérieure à 2 sont 0.

On peut déterminer de la même manière les nombres de connexion d'une surface close quelconque. La seule différence concerne le nombre de dimension 1. S'il s'agit d'une sphère à  $h$  anses, ce nombre est égal à  $2h$ . On peut prendre comme  $2h$

cycles indépendants de dimension 1 un système de coupures canoniques de la surface de Riemann de genre  $h$ .

Etant arrivés à ce résultat, nous pouvons écrire les inégalités obtenues plus haut sous la forme

$$M^0 \geq R^0 = 1, \quad M^1 \geq R^1 = 2h, \quad M^2 \geq R^2 = 1.$$

On peut de même les prouver pour les variétés de dimension  $n$ . On aura toujours les inégalités de Morse:

$$M^k \geq R^k. \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

$R^k$  est le nombre de connexion de dimension  $k$  de la variété et  $M^k$  le nombre des points stationnaires, supposés non-dégénérés, d'indice  $k$  d'une fonction  $J$  deux fois dérivable par rapport aux  $n$  coordonnées locales.

Ces inégalités ont d'ailleurs une évidence bien intuitive sur les surfaces. Revenons à l'exemple du tore avec la fonction  $J = z$ . Plongeons le tore dans l'eau.  $J$  nous donnera alors la hauteur du niveau. Désignons la partie mouillée sans compter le niveau par

$$\{ J < c \} \quad \text{partie mouillée ouverte}$$

et la partie mouillée avec les points du niveau par

$$\{ J \leq c \} \quad \text{partie mouillée parfaite.}$$

Nous conserverons cette notation même dans le cas où la fonction  $J$  ne peut pas être interprétée par la hauteur du niveau d'eau. Faisons monter l'eau du minimum au maximum. La structure topologique de la partie mouillée ne changera que lorsque le niveau passe par un point stationnaire. Et l'expérience nous montre qu'en passant sur un point d'indice  $k$  on aura un nouveau cycle de dimension  $k$ . Passant le minimum (d'indice 0), le nombre de connexion de dimension 0 saute de 0 à 1, car la partie mouillée est vide avant que le niveau ait passé le minimum, et après, elle est un seul domaine cohérent, homéomorphe au cercle. Dans ce domaine, il y a une seule chaîne indépendante de dimension 0. Elle consiste en un seul point quelconque, comme nous l'avons déjà vu.

Le passage du col inférieur (d'indice 1) donne naissance à un premier cycle de dimension 1 qui n'est pas homologue à 0. C'est le méridien  $a$  de la figure 2. De même, le passage du col supérieur y joint le parallèle  $b$ . Puis la partie mouillée est le tore avec un trou. Celui-ci se ferme dès que le niveau dépasse

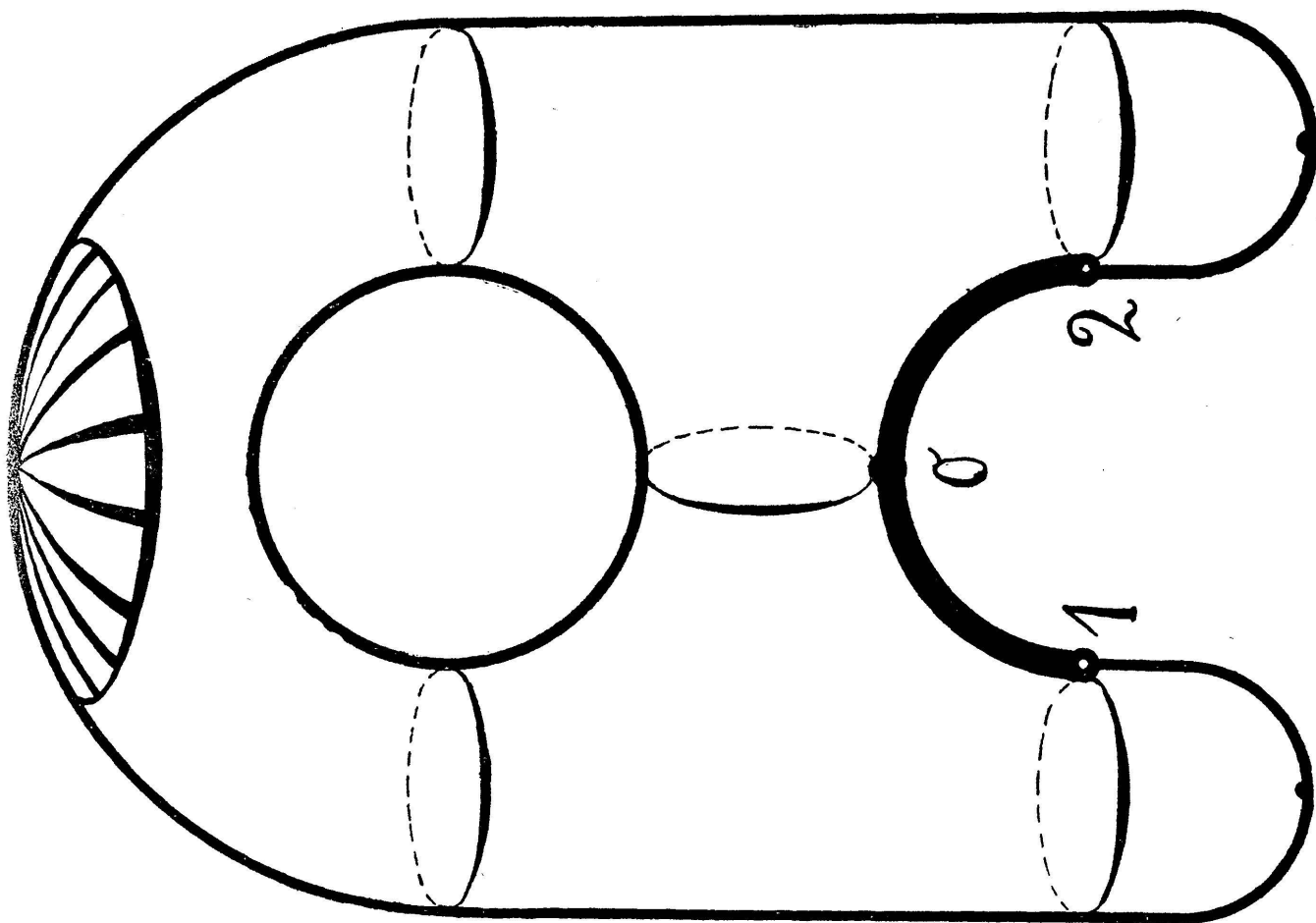


Fig. 4.

le maximum (d'indice 2). C'est alors le nombre  $R^2$  qui saute de 0 à 1.

Naturellement, il ne faut pas s'attendre à ce que chaque point stationnaire fournisse un nouveau cycle, comme il arrive dans l'exemple. Appliquons deux appendices au tore. On le voit dans la figure 4. Les nombres de connexion n'ont pas changé, car le tore avec les appendices est homéomorphe au tore sans appendices; on peut les déformer l'un dans l'autre. Au contraire, les points stationnaires ont augmenté. En effet, le col le plus bas ne donne pas naissance à un cycle global de dimension 1. Alors le signe d'égalité n'est pas valable dans les inégalités de Morse.

Inversement, un cycle de dimension  $k$  ne peut certainement pas naître sans que le niveau passe sur un point stationnaire d'indice  $k$ . On peut prouver cela pour une variété close quelconque pourvu que tous les points stationnaires soient non-dégénérés. Quand on cherche à tirer un cycle de dimension  $k$  aussi bas que possible, ce cycle restera accroché à un certain point stationnaire d'indice  $k$ , et chaque point stationnaire n'arrêtera qu'un seul cycle, à moins qu'on ne choisisse convenablement la base d'homologie des cycles de dimension  $k$ . Mais ce résultat n'est autre chose que les inégalités de Morse.

Tout de même, ce théorème est encore sans valeur pour le calcul des variations. Il faut généraliser les inégalités à l'espace fonctionnel du problème des variations.

Les deuxièmes membres de ces inégalités, les nombres de connexion  $R^k$ , ont déjà une signification purement topologique, qui s'étend d'elle-même à des espaces quelconques. Quant aux premiers membres, pour les définir, nous avons fait usage des dérivées de la fonction  $J$ . Or, une fonction, donnée sur un espace métrique quelconque, peut être continue, mais on ne peut pas la dériver. Il faut donc définir et classer les points stationnaires non pas d'après l'indice, mais d'une manière topologique. C'est là l'idée essentielle de M. Morse. Développons-la dans ce qui suit.

On rangera dans la même classe deux points stationnaires, appartenant aux valeurs  $J = \gamma$  et  $J = \gamma'$ , s'ils ont des voisinages homéomorphes qui peuvent être représentés l'un sur l'autre de manière que les sous-ensembles  $\{J < \gamma\}$ ,  $\{J = \gamma\}$ ,  $\{J > \gamma\}$  se calquent sur les sous-ensembles  $\{J < \gamma'\}$ ,  $\{J = \gamma'\}$ ,  $\{J > \gamma'\}$  respectivement. Autrement dit, il existe alors une représentation topologique qui conserve le niveau d'eau.

Décider la possibilité d'une telle représentation serait résoudre le problème d'homéomorphie de ces sous-ensembles. Mais, pour résoudre ce problème, nous sommes aussi impuissants que pour résoudre le problème d'homéomorphie des espaces globaux.

Les conditions suffisantes manquant, il faut se contenter de conditions nécessaires de l'équivalence des deux points stationnaires. Il suffit de considérer le sous-ensemble  $\{J \leq \gamma\}$  du

voisinage du point stationnaire. Les invariants topologiques de ce sous-ensemble seront en même temps des invariants topologiques du point stationnaire. Pour les obtenir, on se sert de la même méthode topologique qui nous a déjà donné les nombres de connexion de l'espace global. Aux nombres de connexion  $R^k$  de l'espace entier correspondront les nombres-types  $m^k$  d'un point stationnaire.

Rendons-nous compte des changements qu'il faut appliquer à la définition des nombres de connexion pour arriver aux nombres-types. Pour simplifier le raisonnement, supposons qu'il n'y ait qu'un seul point stationnaire de valeur  $J = \gamma$ , et pour fixer les idées pensons d'abord encore au cas où  $\Omega$  est une variété, où  $J$  est deux fois dérivable et le point stationnaire non-dégénéré.

Les nombres-types doivent être déjà fixés si l'on connaît un voisinage du point stationnaire aussi petit qu'on veut. On se servira donc, au lieu des cycles globaux de l'espace  $\Omega$ , de petits morceaux de cycles qui passent par le point stationnaire. Tout ce qui se passe au-dessous de la valeur  $J = \gamma$  ne nous intéresse point. Nous regarderons donc toute chaîne de dimension  $k$ , située entièrement dans  $\{J < \gamma\}$ , comme équivalente à la chaîne 0 de dimension  $k$ . Il s'ensuit que toute chaîne est regardée comme fermée, si son bord se trouve au-dessous de  $J = \gamma$ . On appelle une telle chaîne un cycle relatif du point stationnaire, ou un cycle de  $\{J \leq \gamma\}$  modulo  $\{J < \gamma\}$ . Cela veut dire qu'on peut ajouter ou laisser de côté des chaînes de  $\{J < \gamma\}$ , sans changer le cycle relatif, de même qu'on peut ajouter à un nombre, ou en retrancher des multiples d'un nombre entier sans changer son caractère de reste relatif à cet entier. On peut en particulier découper d'un cycle relatif des chaînes partielles qui sont entièrement situées au-dessous de  $\gamma$ .

La définition des nombres-types sera alors une répétition de celle des nombres de connexion. Il faut introduire les notions d'homologie et d'indépendance des cycles relatifs et le nombre-type de dimension  $k$  est le nombre maximum des cycles relatifs indépendants qui existent au point stationnaire.

Prenons par exemple comme espace  $\Omega$  le plan et comme fonction

$$J = x^2 - y^2 .$$

Elle a un col au point initial 0, et la valeur en ce point stationnaire est  $J = 0$ . On voit, dans la figure 5, les lignes de niveau de  $J$ . Le domaine  $\{J \leq 0\}$  consiste en deux quarts du plan qui ont été hachurés dans la figure. Le segment 102 est un cycle relatif de dimension 1 du point stationnaire, car les deux points qui le bordent sont situés au-dessous de  $J = 0$ . De même, la ligne brisée 1'02' est un cycle relatif de dimension 1.

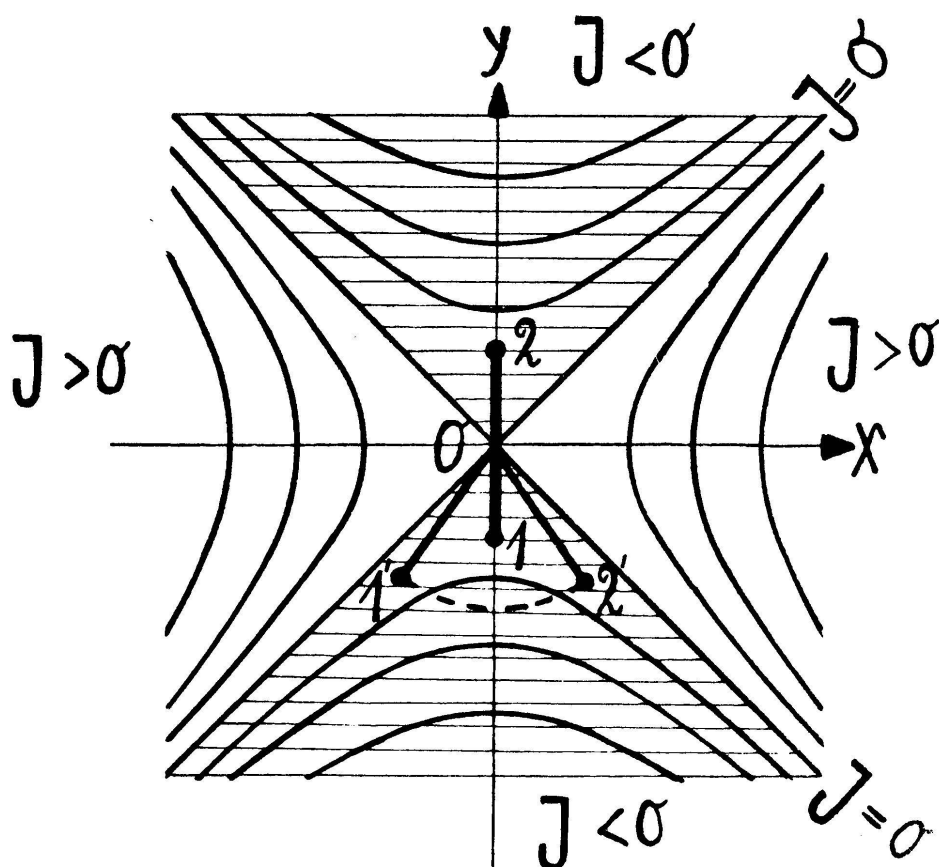


Fig. 5.

On appelle homologues deux cycles relatifs de dimension  $k$ , s'ils bordent, ensemble ou avec des chaînes situées au-dessous de la valeur stationnaire  $\gamma$ , une chaîne de dimension  $k + 1$ . En particulier, deux cycles sont homologues, si l'on peut transformer l'un dans l'autre par une déformation, car alors ils bordent la variété que l'un a recouverte pendant la déformation dans l'autre. Il s'ensuit qu'on ne changera pas la classe d'homologie d'un cycle relatif en en déformant la partie située au-dessous de  $\gamma$ , sans quitter le domaine  $\{J < \gamma\}$  (la partie mouillée ouverte).

On appelle homologue à 0 un cycle relatif de dimension  $k$  qui, seul, ou avec des chaînes situées au-dessous de  $\gamma$ , borde une chaîne de dimension  $k + 1$  de la partie mouillée parfaite  $\{J \leq \gamma\}$ . Un cycle relatif est donc certainement homologue à 0, si on peut le déformer sur  $\{J \leq \gamma\}$  en un cycle de  $\{J < \gamma\}$ , c'est-à-dire si l'on peut le tirer du point stationnaire sans quitter le domaine  $\{J \leq \gamma\}$ , le bord restant fixe pendant toute la déformation.

Le cycle relatif  $1' 02'$  de l'exemple donné (fig. 5) est homologue à 0, car il borde avec la chaîne pointillée  $1' 2'$  une chaîne de dimension 2. Au contraire, le cycle rectiligne  $102$  n'est pas homologue à 0. On ne peut pas le déformer vers le bas sans dépasser la valeur stationnaire  $\gamma = 0$ , et il n'est en aucune façon homologue dans  $\{J \leq 0\}$  à un cycle inférieur à  $J = 0$ . Voici un autre exemple: Couvrons le maximum du tore d'une petite calotte comme on la voit dans la figure 4. C'est un cycle relatif de dimension 2, car son bord est situé au-dessous de la valeur maximum. Ce cycle n'est pas homologue à 0; on ne peut pas le tirer du maximum, le bord restant fixe.

On appelle indépendant un système de cycles relatifs de dimension  $k$ , si aucune combinaison de ces cycles ne borde une chaîne de dimension  $k + 1$ . Un seul cycle est donc dit indépendant, s'il n'est pas homologue à 0.

Nous voici arrivés aux nombres-types. Le nombre-type de dimension  $k$  d'un point stationnaire est le nombre maximum des cycles relatifs indépendants de dimension  $k$ , admis par le point stationnaire.

Un minimum (d'indice 0) a donc les nombres-types

$$m^0 = 1, \text{ tous les autres} = 0 .$$

En effet, on ne peut pas déformer vers le bas un cycle relatif de dimension 0, c'est-à-dire un point coïncidant avec le minimum, la partie au-dessous du minimum étant vide. Des cycles relatifs de dimension plus élevée, non homologues à 0, n'existent plus du tout au minimum.

Un col (d'indice 1) a les nombres-types

$$m^1 = 1, \text{ tous les autres} = 0 .$$

Car nous avons déjà vu qu'il existe un cycle de dimension 1, non homologue à 0, notamment le cycle rectiligne 102. Evidemment, tous les autres cycles relatifs de dimension 1 sont homologues à celui-ci. Un cycle de dimension 0 peut être tiré vers le bas, il est homologue à 0 pour cette raison, tandis que des cycles relatifs de dimension plus élevée non homologues à 0 n'existent pas.

Le maximum (d'indice 2) a les nombres-types

$$m^2 = 1, \text{ tous les autres } = 0 .$$

Un cycle relatif de dimension 2, non homologue à 0 nous est donné par la calotte que nous avons mise sur le tore de la figure 4. Tout autre cycle peut être tiré vers le bas.

Nous avons donc réussi à classer les points stationnaires d'une manière tout à fait topologique. Cela ne nous apprend rien de nouveau dans le cas que nous venons de considérer. Car, si les points stationnaires sont non-dégénérés, les nombres-types  $m^k$  sont déterminés par l'indice  $i$  selon la formule

$$m^k = \delta_i^k = \begin{cases} 0 & \text{pour } k \neq i \\ 1 & \text{pour } k = i \end{cases} .$$

Nous avons trouvé cette formule exacte dans notre exemple du tore, et on peut de même en prouver l'exactitude pour une variété de dimension  $n$ . Nous montrerons maintenant par un exemple comment on peut attribuer ainsi un nombre-type à un point stationnaire *dégénéré*, pour lequel un indice n'est pas défini.

Considérons dans le plan les deux lemniscates semblables (fig. 6)  $L_1, L_2$  d'équations respectives  $f_1 \equiv (x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 - y^2) = 0$ ,  $f_2 \equiv (x^2 + y^2)^2 - (x^2 - y^2) = 0$ , et prenons pour  $J$  la fonction  $f_1 f_2$ , qui prend des valeurs positives à l'extérieur de  $L_1$  et à l'intérieur de  $L_2$ , et des valeurs négatives entre  $L_1$  et  $L_2$ . Le point 0 est un point stationnaire dégénéré pour  $J$ ; son nombre-type  $m^1$  pour la dimension 1 est égal à 3, puisque le voisinage du point 0 admet les 3 cycles relatifs homologiquement indépendants 102, 304, 103; on voit en effet que les autres

cycles relatifs sont des combinaisons de ceux-ci, puisque l'addition se fait modulo 2.

Mais la classification topologique subsiste également pour les espaces quelconques où il n'y a plus d'indice. On peut prouver dans ce cas aussi les inégalités de Morse

$$M^k \geq R^k$$

$M^k$  désigne maintenant la somme des nombres-types  $m^k$  de dimension  $k$ ,  $M^k = \sum_v m_v^k$ , prise par rapport à tous les points stationnaires convenablement définis.

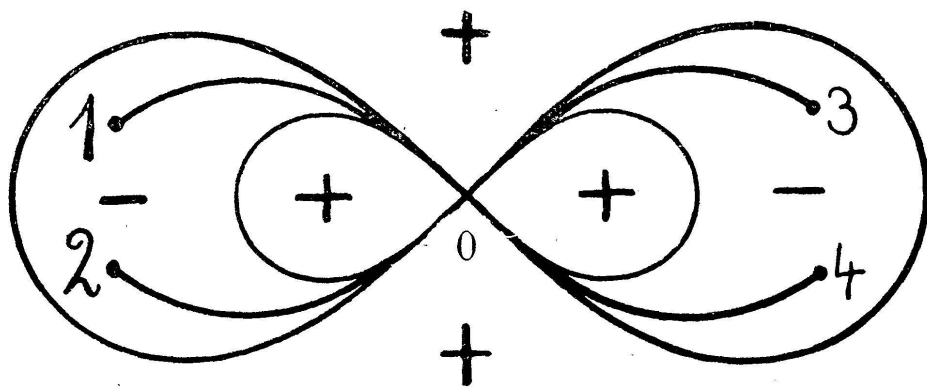


Fig. 6.

Nous voici bien préparés pour appliquer ces inégalités au calcul des variations global. L'espace  $\Omega$  est alors l'espace fonctionnel d'une variété  $\mathcal{M}$ , c'est-à-dire l'espace de toutes les courbes joignant deux points A et B de  $\mathcal{M}$ . Les points stationnaires sont les géodésiques parmi ces courbes. Ce n'est donc pas pour la définition des points stationnaires que nous faisons usage des nombres-types, mais nous les emploierons pour la classification.

Dans ce but, considérons la longueur des courbes de  $\mathcal{M}$ , joignant A et B. C'est une fonction J continue sur  $\Omega$ . Soit  $J = \gamma$  la longueur d'une géodésique isolée, allant de A à B.

Nous désignerons une telle géodésique de  $\mathcal{M}$ , ainsi que le point correspondant de  $\Omega$ , par la lettre g.

Déterminons le nombre maximum des cycles relatifs indépendants de dimension  $k$  de la partie  $\{J < \gamma\} + g$  (c'est-à-dire de la partie mouillée ouverte augmentée du point g), modulo  $\{J < \gamma\}$  (c'est-à-dire modulo la partie mouillée ouverte seule).

Ce nombre est le nombre-type  $m^k$  de dimension  $k$  de la géodésique  $g$ .

On peut prouver que les nombres-types de tout point qui n'est pas stationnaire sont tous  $= 0$ . Par cela la notation « points stationnaires » est justifiée, car, sur une variété, un point non-stationnaire a aussi tous ses nombres-types nuls.

La géodésique  $g$  est dite non-dégénérée s'il n'y a pas de géodésique infiniment voisine. Dans ce cas, on peut prouver qu'un seul nombre-type est  $= 1$  et que tous les autres sont  $= 0$ . S'il se trouve  $i$  points conjugués au point initial sur  $g$ , le  $i$ -ième nombre-type est  $= 1$ . Mais, en d'autres cas, les nombres-types peuvent être  $> 1$ .

Notre but est de prouver le théorème principal suivant: il existe toujours une infinité de géodésiques joignant les deux points A et B.

S'il y a une géodésique non isolée le théorème sera vrai. Il est donc permis de supposer qu'il n'y a qu'un nombre fini de géodésiques de longueur bornée.

La preuve se fait alors en trois étapes.

*Premièrement*, il nous faut prouver les inégalités de Morse

$$M^k \geq R^k .$$

$M^k$  est maintenant la somme des nombres-types de dimension  $k$ , prise par rapport à toutes les géodésiques.  $M^k$  peut être infini.

*Deuxièmement* nous avons le théorème de limitation (Endlichkeitssatz): chaque géodésique ne contribue à la somme  $M^k$  que par un montant fini, et ce montant est 0, exception faite pour un nombre fini de dimensions. Donc, nous sommes sûrs d'avoir une infinité de géodésiques si la connexion de l'espace fonctionnel  $\Omega$  est infinie, c'est-à-dire si la somme des nombres de connexion  $R^k$ , prise sur toutes les dimensions  $k$  est infinie.

Nous avons donc *troisièmement* à déterminer les nombres de connexion  $R^k$  de  $\Omega$ , ou au moins, à évaluer leur somme. En général, c'est une tâche désespérée. Il n'y a pas de méthodes qui permettent d'aborder ce problème.

Mais, par une méthode indirecte, on sait déterminer par exemple les nombres de connexion de l'espace fonctionnel d'une

surface close simplement connexe. On prouve d'abord que ces nombres sont des invariants topologiques de la surface (et non seulement de l'espace fonctionnel), c'est-à-dire qu'ils sont indépendants du choix de la métrique de Riemann et de la situation des deux points frontières.

Pour calculer les nombres de connexion  $R^k$  de l'espace fonctionnel d'une surface quelconque homéomorphe à la sphère, il suffit donc de les déterminer pour l'espace fonctionnel de la sphère métrique. On trouve que tous ces nombres sont  $= 1$ .

Il s'ensuit le résultat principal qu'il y a une infinité de géodésiques joignant deux points sur une surface close simplement connexe.

La situation des points frontières étant arbitraire, on peut les faire coïncider. Alors le résultat se réduit au théorème: il y a en chaque point une infinité de boucles géodésiques.

Peut-être trouvera-t-on ce résultat un peu banal. Mais, jusqu'à présent, on n'avait jamais réussi à en donner une preuve mathématique.

Tirons finalement de la théorie un autre résultat. Déformons la sphère métrique en la serrant par le milieu. Considérons deux points A et B sur la ceinture de la taille ainsi formée. On les voit dans la figure 1. Il s'offre immédiatement une infinité de géodésiques joignant A et B, notamment les deux parties de la ceinture entre A et B, et celles-ci augmentées des pourtours complets de la taille. Il est aisé de voir que toutes ces géodésiques fournissent un minimum de la longueur, comparée à celle des courbes voisines. Donc, les nombres-types sont toujours

$$m^0 = 1, \text{ tous les autres } = 0 .$$

Mais tous ces nombres-types ne sont pas encore suffisants pour satisfaire aux inégalités de Morse.

$$M^k \geq R^k ,$$

car ils ne contribuent qu'à la somme  $M^0$ . Donc, il y a encore une infinité de géodésiques qui passent en dehors de la ceinture. On en voit une dans la figure 1.

\* \* \*

Au cours de ma conférence je vous ai donné un résumé d'une partie de la théorie de M. Morse. C'est à mon ami, le professeur Seifert, que je dois les simplifications essentielles que j'y ai apportées. Malgré ces simplifications, il y a encore dans ce que j'ai dit des démonstrations assez difficiles. Mais, je me suis efforcé de vous les dissimuler le plus possible.

Nos méthodes sont autres que celles bien connues de l'analyse classique. Quant à la rigueur, elles ne le cèdent en rien aux méthodes classiques. Il ne peut en être, en effet, autrement, car être rigoureux en mathématique ce n'est pas faire preuve de mesquinerie, tandis qu'au contraire, manquer de rigueur, c'est manquer d'imagination, c'est laisser échapper les possibilités de nouvelles découvertes.

---

## UNE FONCTION CONTINUE SANS DÉRIVÉE

PAR

R. TAMBS LYCHE (Trondheim, Norvège).

---

1. — L'exemple donné par WEIERSTRASS d'une fonction continue qui n'admet de dérivée pour aucune valeur de la variable est trop compliqué pour que l'on puisse l'exposer dans un cours élémentaire d'Analyse. On doit à M. B. L. van der WAERDEN (*Math. Zeitschr.*, 32. Band, 1930, p. 474) un exemple de nature bien simple. Toutefois, pour être présentée d'une manière intelligible aux débutants, la démonstration exige des considérations un peu compliquées, bien qu'elles soient de nature élémentaire (voir par exemple E. LANDAU: *Einführung in die Differentialrechnung und Integralrechnung*, p. 73, où l'auteur examine un exemple de même espèce).

Vu l'importance d'une conception précise de la notion de dérivée, il ne semble pas inutile de pouvoir fournir un exemple où la démonstration peut être donnée en peu de lignes. Celui que