Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 38 (1939-1940)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Rubrik: MÉLANGES ET CORRESPONDANCE

MÉLANGES ET CORRESPONDANCE

Sur les triangles inscrits dans un triangle donné.

A propos d'un article de M. E. Feldheim.

Dans *L'Enseignement mathématique* (t. 37, 329-335, 1938), M. E. Feldheim a considéré quelques problèmes sur les triangles inscrits dans un triangle donné. Voici quelques remarques au sujet de cet article.

I. — L'auteur a énoncé (p. 332) le théorème suivant: Prenons deux triangles ABC et $A'B'C'$ et construisons les triangles DEF et $D'E'F'$, circonscrits respectivement à ABC et $A'B'C'$, et tels que les côtés de DEF ($D'E'F'$) soient parallèles aux côtés respectifs de $A'B'C'$ (ABC). Si nous désignons par t, t', T, T' les aires de ABC, $A'B'C'$, DEF, $D'E'F'$, on a la relation $\frac{t}{t'} = \frac{T}{T'}$.

M. Feldheim en donne une démonstration basée sur un calcul trigonométrique. Mais le théorème ne contient que des notions de *Géométrie affine;* il doit donc pouvoir être démontré sans l'emploi d'une méthode métrique.

En effet, considérons un triangle $A''B''C''$, circonscrit à DEF et dont les côtés sont parallèles aux côtés respectifs de ABC. L'homothétie des figures $A'B'C'$. $D'E'F'$ et DEF, $A''B''C''$ entraîne que $\frac{t'}{T'} = \frac{T}{t''}$, où t'' est l'aire du triangle $A''B''C''$. Il faut encore démontrer la relation $T^2 = tt''$, mais c'est précisément le cas spécial que M. Feldheim a considéré au commencement de son article et dont la démonstration peut être modifiée facilement en n'ayant recours qu'à des notions affines.

II. — M. Feldheim présente quelques remarques sur la généralisation du problème à des polygones. Si $A_0 B_0 C_0 D_0$ est un quadrilatère dont l'aire est t_0, $A_1B_1C_1D_1$ un quadrilatère inscrit à $A_0B_0C_0D_0$, $A'B'C'D'$ un quadrilatère circonscrit à $A_0B_0C_0D_0$ et dont les côtés sont parallèles à ceux de $A_1B_1C_1D_1$, t_1 et t' les aires de $A_1B_1C_1D_1$ et de $A'B'C'D'$, dans le cas où $A_1B_1C_1D_1$ et $A'B'C'D'$ sont semblables, on a encore la relation $t^2 = t_1 t'$. Nous remarquons que si V_0 est un polygone d'aire t_0, V_1 un polygone d'aire t_1, inscrit à V_0, V_2 un un polygone d'aire t_2 circonscrit à V_0 et dont les côtés sont parallèles à ceux de V_1, la quantité t_0 n'est pas autre chose que l'*aire mixte* des deux polygones « parallèles » V_1 et V_2, notion introduite par MINKOWSKI [1] et de grande importance pour la théorie des « *Eikurven* ». Il existe la relation fondamentale $t_0^2 \geqslant t_1 t_2$ et on n'a le signe d'égalité que dans le cas où V_1 et V_2 sont homothétiques.

Si $A_1B_1C_1D_1$ et $A'B'C'D'$ sont des parallélogrammes des côtés a_1, b_1 et a', b' et de l'angle α, l'auteur démontre

$$4 t_0^2 = (a' b_1 - a_1 b')^2 \sin^2 \alpha + 4 t_1 t'$$

et pour ce cas très spécial on peut facilement vérifier le théorème de MINKOWSKI.

III. — L'auteur donne le théorème suivant: Si $A_0B_0C_0D_0$, $A_1B_1C_1D_1$ et $A'B'C'D'$ sont des parallélogrammes, la relation $t_0^2 = t_1 t'$ n'est satisfaite que si ces parallélogrammes sont des carrés. Il est clair que ce théorème ne peut pas être juste, parce qu'il s'agit d'un théorème de géométrie affine et le carré est une figure non-invariante pour les transformations du groupe des affinités. Dans sa démonstration M. FELDHEIM a supposé que l'équation qu'il a obtenue p. 335 est une identité et cela n'est pas exact.

Si l'on prend un parallélogramme *quelconque* $A'B'C'D'$, un parallélogramme inscrit $A_0B_0C_0D_0$ de sorte que

$$\frac{A'D_0}{D_0B'} = \frac{B'A_0}{A_0C'} = \frac{C'B_0}{B_0D'} = \frac{D'C_0}{C_0A'} = a \qquad (0 < a < 1)$$

et enfin un parallélogramme $A_1B_1C_1D_1$ inscrit à $A_0B_0C_0D_0$ de sorte que

$$\frac{C_0A_1}{A_1D_0} = \frac{D_0B_1}{B_1A_0} = \frac{A_0C_1}{C_1B_0} = \frac{B_0D_1}{D_1C_0} = 1 - a \ ,$$

les parallélogrammes $A'B'C'D'$ et $A_1B_1C_1D_1$ ont les côtés parallèles et on a $t_0^2 = t_1 t'$.

Deventer, Pays-Bas. O. BOTTEMA.

[1] Volumen und Oberfläche, *Math. Annalen*, B. 57, 1903.