Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 38 (1939-1940)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: MÉTHODES IMMÉDIATES D'INTÉGRATION D'ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU SECOND ORDRE

Autor: Saltykow, N.

Kapitel: VI. — Généralisation des méthodes exposées.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-515778

dont l'intégrale devient:

$$x + y + z(p + q) = f(p + q) \ , \tag{10}$$

f désignant une fonction arbitraire. Pour intégrer l'équation aux dérivées partielles du premier ordre (10), posons

$$p + q = x_1 \ . \tag{11}$$

L'intégrale complète de cette dernière équation (11), en y considérant x_1 comme une constante, devient:

$$z = (x_1 - y_1)x + y_1 y + z_1 \ ,$$

y_1 et z_1 désignant deux nouvelles constantes arbitraires. Si l'on prend cette dernière relation, comme la formule fondamentale de la transformation de contact [1], l'équation (10) transformée prend la forme suivante, en considérant z_1 comme nouvelle fonction inconnue de nouvelles variables indépendantes x_1 et y_1:

$$(x_1^2 + 2)\,p_1 + (x_1 y_1 + 1)\,q_1 = x_1 z_1 - f(x_1) \ ,$$

p_1 et q_1 désignant respectivement les nouvelles dérivées $\frac{\partial z_1}{\partial x_1}$ et $\frac{\partial z_1}{\partial y_1}$. L'intégrale générale de cette dernière équation admet la forme évidente:

$$z_1 = \sqrt{x_1^2 + 2}\left\{\int \frac{f(x_1)\,dx_1}{(x_1^2 + 2)^{3/2}} + \varphi\left[\frac{y_1}{\sqrt{x_1^2 + 2}} + \int \frac{dx_1}{(x_1^2 + 2)^{3/2}}\right]\right\} ,$$

φ désignant la seconde fonction arbitraire.

Par conséquent, l'intégrale générale de l'équation primitive (9) s'obtient au moyen de la transformation inverse des variables.

VI. — Généralisation des méthodes exposées.

Euler, en inaugurant les méthodes d'intégration que nous étudions, avait montré, en même temps, comme on pouvait

[1] N. Saltykow, Application des transformations de contact à l'intégration des équations aux dérivées partielles (*Bulletin de l'Académie des Sciences math. et natur.* A. Sc. math., n° 3, Belgrade, 1936, p. 41).

étendre leurs applications, en commençant par l'intégration des plus simples équations pour passer, ensuite, à celles plus compliquées. Comme excellent exemple, sous ce rapport, on pourrait reprendre le problème de la corde vibrante à densité variable. Dans ce but, EULER [1] considère l'équation:

$$t - P^2 r = 0 \ , \tag{1}$$

P désignant une fonction des variables x et y vérifiant la condition:

$$\frac{\partial P}{\partial y} - P \frac{\partial P}{\partial x} = 0 \ . \tag{2}$$

L'équation (1), grâce à cette dernière hypothèse (2), se réduit immédiatement à une équation linéaire aux dérivées partielles du premier ordre:

$$\frac{\partial U}{\partial y} - P \frac{\partial U}{\partial x} = 0 \ , \tag{3}$$

où l'on a posé:

$$\frac{\partial z}{\partial y} + P \frac{\partial z}{\partial x} = U \ . \tag{4}$$

Ce qui est fort important, c'est que l'intégration du problème considéré, dans l'hypothèse (2), peut être poussée jusqu'aux quadratures.

En effet, l'ensemble d'équations (2) et (3) représente un système de Charpit [2]. Formons, pour définir les fonctions P et U, le système correspondant d'équations différentielles ordinaires:

$$dy = \frac{dx}{-P} = \frac{dP}{0} = \frac{dU}{0} \ .$$

Ce dernier système admet trois intégrales distinctes suivantes:

$$P = C_1 \ , \qquad U = C_2 \ , \qquad x + Py = C_3 \ ,$$

---

[1] *Institutiones Calculi Integralis*, V, III, p. 193, probl. 49.
[2] Voir plus haut, p. 145, *loc. cit.*

C_1, C_2 et C_3 désignant trois constantes arbitraires. Cela étant, l'intégrale générale du système de Charpit (2) — (3) devient:

$$P = \varphi(\omega)\ , \qquad U = \psi(\omega)\ , \tag{5}$$

$$\omega = x + \varphi(\omega) y \tag{6}$$

φ et ψ désignant deux fonctions arbitraires.

Intégrons, à présent, l'équation (4), en y substituant les expressions (5) de P et de U. Transformons de plus l'équation (4), en introduisant comme nouvelle variable indépendante ω, au lieu de x. L'équation (4) transformée devient:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial y} + \frac{2\varphi}{1 - y\varphi'}\frac{\partial \theta}{\partial \omega} = \psi\ , \tag{7}$$

Θ désignant l'expression de la fonction inconnue z qui est exprimée en nouvelles variables.

L'intégration de cette dernière équation linéaire (7) produit l'intégrale générale de l'équation donnée (1) sous la forme suivante:

$$z = \left(\int \frac{d\omega}{2\sqrt{\varphi}} - y\sqrt{\varphi}\right)\int \frac{\psi\, d\varphi}{2\varphi^{3/2}} + \\ + \int\left(1 - \frac{\varphi'}{2\sqrt{\varphi}}\int\frac{d\omega}{\sqrt{\varphi}}\right)\frac{\psi\, d\omega}{2\varphi} + f\left(y\sqrt{\varphi} - \int\frac{d\omega}{2\sqrt{\varphi}}\right)\ ,$$

où ψ et f désignent deux fonctions arbitraires, ω étant le paramètre variable défini par la relation (6); quant à la fonction arbitraire φ, elle définit la valeur du coefficient P de l'équation donnée (1).

Euler[1] donne, comme second exemple, l'équation:

$$t - Pr + Qq + \left(PQ + \frac{\partial P}{\partial y} - P\frac{\partial P}{\partial x}\right)p = 0\ , \tag{8}$$

P et Q désignant des fonctions quelconques de x et de y.

On met aisément l'équation considérée (8) sous la forme suivante:

$$\frac{\partial U}{\partial y} - P\frac{\partial U}{\partial x} + QU = 0\ , \tag{9}$$

[1] *Ibid.*, p. 202, probl. 50.

en posant

$$\frac{\partial z}{\partial y} + P\frac{\partial z}{\partial x} = U \, . \tag{10}$$

Le problème de l'intégration de l'équation donnée (8) revient donc à celle de l'équation (9) pour définir, d'abord, la valeur de la fonction U et, ensuite, à l'intégration de l'équation (10) qui donne l'intégrale générale requise.

Les problèmes cités représentent une introduction à l'œuvre de Legendre sur l'intégration d'équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre à une fonction inconnue, dont les coefficients ne dépendent que des variables indépendantes. Cette dernière théorie est une généralisation de l'élégante méthode de Laplace pour intégrer les équations hyperboliques. On sait maintenant que toutes ces recherches simplifient et unifient, en même temps, la méthode de G. Monge et celle de G. Darboux intégrant les équations linéaires en question [1].

Il se pose donc, à présent, un nouveau problème de généralisation concernant la recherche d'une méthode qui suppléerait celles de G. Monge et de G. Darboux pour les équations linéaires de la forme générale.

---

[1] N. Saltykow, Note sur la méthode de Legendre pour intégrer les équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre (*Travaux du Deuxième Congrès des Mathématiciens slaves*. Prague, septembre 1934).

N. Saltykow, Théorie des équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre à une fonction inconnue (*Bulletin de l'Acad. des Sc. math. et natur.* A. Sciences mathématiques et physiques, nº 2. Belgrade, 1935).