La transformation de variables indépendantes, au moyen des formules (17), réduit l'équation (19) à la suivante:

$$U\left(2\frac{\partial z}{\partial \eta}\right) + Z = \Psi(\xi) \ .$$

L'équation obtenue est aux différentielles ordinaires, dont l'intégration dépend de la forme des fonctions U et Z. L'intégrale générale de cette dernière équation devra impliquer, au lieu d'une constante arbitraire, une nouvelle fonction arbitraire de ξ. On en tirera, au moyen de la transformation inverse des variables, l'intégrale générale de l'équation étudiée (14).

La dernière équation (15) va s'écrire de la manière suivante:

$$\frac{\partial}{\partial x}(p + q) + \frac{\partial}{\partial y}(p + q) + f(x, y, p + q) = 0 \ .$$

Or, cette dernière équation va être intégrée d'une manière analogue à l'équation (18).

V. — Intégrations de quelques équations usuelles du second ordre.

Citons maintenant plusieurs équations, dont l'intégration est exposée dans maints traités de Goursat, de Forsyth, de Piaggio, ainsi que chez d'autres auteurs.

Considérons, en premier lieu, l'équation (Goursat, *Cours d'Analyse*, 4me éd., t. III, Paris, 1927. Exercices, p. 88):

$$x^2 r + 2xys + y^2 t = 0 \ . \tag{1}$$

En groupant les termes de cette équation (1), on va l'écrire

$$x\frac{\partial}{\partial x}(xp + yq) + y\frac{\partial}{\partial y}(xp + yq) = xp + yq \ .$$

L'intégrale générale de cette dernière équation aux dérivées partielles du premier ordre, par rapport au binôme $xp + yq$, se présente sous la forme:

$$xp + yq = xf\left(\frac{y}{x}\right) ,$$

f désignant la fonction arbitraire. L'intégrale générale de cette dernière équation

$$z = xf\left(\frac{y}{x}\right) + \varphi\left(\frac{y}{x}\right) ,$$

φ étant une seconde fonction arbitraire, représente bien l'intégrale générale de l'équation (1).

L'équation (GOURSAT, *ibid.*):

$$xy\,r + (x^2 + y^2)s + xy\,t - yp - xq = 0 \tag{2}$$

s'écrit immédiatement ainsi:

$$y\frac{\partial}{\partial x}(xp + yq - 2z) + x\frac{\partial}{\partial y}(xp + yq - 2z) = 0 .$$

Il s'ensuit, donc, l'intégrale générale requise de l'équation (2)

$$z = (y^2 - x^2)\,f\left(\frac{y}{x}\right) + \varphi\,(y^2 - x^2) ,$$

f et φ étant les fonctions arbitraires.

L'équation du problème connu d'Ossian Bonnet:

$$x^2 r - y^2 t = 0 \tag{3}$$

s'écrit aisément de la manière suivante:

$$x\frac{\partial}{\partial x}(xp + yq - z) - y\frac{\partial}{\partial y}(xp + yq - z) = 0 .$$

On a par conséquent l'intégrale générale de l'équation (3) sous la forme:

$$z = f(xy) + x\varphi\left(\frac{y}{x}\right) ,$$

f et φ désignant deux fonctions arbitraires.

L'équation de J. Bertrand:

$$x^2 r + 2xys + y^2 t + xp + yq = n^2 z \tag{4}$$

qui est intégrable par réduction à un système de Charpit [1], est de

[1] Voir plus haut, p. 145, *loc. cit.*

même intégrable, si l'on va grouper ses termes de la manière suivante:

$$x \frac{\partial}{\partial x}(xp + yq + nz) + y \frac{\partial}{\partial y}(xp + yq + nz) = n(xp + yq + nz) .$$

Il s'ensuit immédiatement l'intégrale générale de l'équation (4):

$$z = x^n f\left(\frac{y}{x}\right) + x^{-n} \varphi\left(\frac{y}{x}\right) .$$

f et φ étant deux fonctions arbitraires.

Considérons, à présent, l'équation

$$xy^3 r - yx^3 t + x^3 q - y^3 q = 0 , \qquad (5)$$

que l'on mettra sous la forme suivante:

$$y \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{p}{x} + \frac{q}{y}\right) - x \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{p}{x} + \frac{q}{y}\right) = 0 .$$

Il s'ensuit donc que les deux fonctions, $x^2 + y^2$ et $\frac{p}{x} + \frac{q}{y}$ sont liées par une relation arbitraire que l'on écrira

$$\frac{p}{x} + \frac{q}{y} = 2f'(x^2 + y^2) ,$$

f' désignant une fonction arbitraire. En intégrant cette dernière équation, on obtiendra l'intégrale générale de (5)

$$z = f(x^2 + y^2) + \varphi(x^2 - y^2) ,$$

f et φ étant deux fonctions arbitraires.

Considérons, enfin, l'équation (Forsyth, Piaggio)

$$r + y = t + x . \qquad (6)$$

Il est aisé de l'écrire en groupant ses termes de deux manières différentes:

$$r \pm s - x \mp (s \pm t \mp y) = 0 ,$$

ou bien

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(p \pm q - \frac{x^2 \pm y^2}{2}\right) \mp \frac{\partial}{\partial y}\left(p \pm q - \frac{x^2 \pm y^2}{2}\right) = 0 ,$$

en prenant respectivement, soit les signes supérieurs, soit les inférieurs.

L'intégration de ces deux équations aux dérivées partielles du premier ordre produit respectivement deux intégrales premières:

$$p + q = \frac{x^2 + y^2}{2} + 2f'(x + y) ,$$

$$p - q = \frac{x^2 - y^2}{2} + 2\varphi'(x - y) ,$$

f' et φ' désignant les dérivées de deux fonctions arbitraires f et φ, le facteur 2 étant introduit pour simplifier les formules qui vont suivre.

Ces deux dernières formules donnent les valeurs des dérivées:

$$p = \frac{x^2}{2} + f' + \varphi' , \qquad q = \frac{y^2}{2} + f' - \varphi' .$$

Il s'ensuit, par quadrature, l'intégrale générale de l'équation donnée (6):

$$z = \frac{x^3 + y^3}{6} + f(x + y) + \varphi(x - y) ,$$

à deux fonctions arbitraires f et φ.

Citons encore trois équations du second ordre, dont les coefficients dépendent des dérivées partielles du premier ordre de la fonction inconnue:

$$z(r - t) = p^2 - q^2 , \tag{7}$$

$$q^2 r - p^2 t = 0 , \tag{8}$$

$$(1 + pq + q^2)r + (q^2 - p^2)s - (1 + p^2 + pq)t = 0 . \tag{9}$$

L'équation (7) (v. Forsyth, v. VI, p. 219. Ex. 2) appartient bien au type d'équations (12) citées dans la partie V du présent Mémoire, équations que M. A. Demoulin avait intégrées.

Or, la même équation (7) pourrait être mise, d'une autre manière, sous la forme suivante:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{p + q}{z}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{p + q}{z}\right) = 0 .$$

En intégrant cette dernière équation, on obtient l'intégrale générale de l'équation (7):

$$z = f(x + y) \cdot \varphi(x - y) ,$$

f et φ étant deux fonctions arbitraires.

Quant à l'équation (8), elle va s'écrire

$$\frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x}(pq) - \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y}(pq) = 0 .$$

Il s'ensuit donc

$$pq = f(z) ,$$

f désignant une fonction arbitraire. L'intégrale complète de cette dernière équation s'obtient, d'après Lagrange, en ajoutant l'intégrale des caractéristiques

$$\frac{p}{q} = \mathrm{C} ,$$

C étant une constante arbitraire. Par conséquent, l'intégrale générale de l'équation (8) se représente par l'ensemble des deux équations suivantes:

$$\int \frac{dz}{\sqrt{f(z)}} = \sqrt{\mathrm{C}}\, x + \frac{1}{\sqrt{\mathrm{C}}}\, y + \varphi(\mathrm{C}) ,$$

$$\frac{x}{2\sqrt{\mathrm{C}}} - \frac{y}{2\sqrt{\mathrm{C}^3}} + \varphi'(\mathrm{C}) = 0 ,$$

φ désignant la seconde fonction arbitraire, C jouant le rôle d'un paramètre variable.

Enfin, la dernière équation (9) citée dans le *Traité d'Analyse* de Lacroix, 2$^{\text{me}}$ éd., t. II, p. 586, n° 755, va s'écrire

$$\left[1 + q(p + q)\right] \frac{\partial}{\partial x}(p + q) - \left[1 + p(p + q)\right] \frac{\partial}{\partial y}(p + q) = 0 .$$

Cette dernière équation se met aisément sous la forme nouvelle:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[x + y + z(p + q)\right] \frac{\partial}{\partial x}(p + q) - \frac{\partial}{\partial x}\left[x + y + z(p + q)\right] \frac{\partial}{\partial y}(p + q) = 0$$

dont l'intégrale devient:

$$x + y + z(p + q) = f(p + q) , \tag{10}$$

f désignant une fonction arbitraire. Pour intégrer l'équation aux dérivées partielles du premier ordre (10), posons

$$p + q = x_1 . \tag{11}$$

L'intégrale complète de cette dernière équation (11), en y considérant x_1 comme une constante, devient:

$$z = (x_1 - y_1)x + y_1 y + z_1 ,$$

y_1 et z_1 désignant deux nouvelles constantes arbitraires. Si l'on prend cette dernière relation, comme la formule fondamentale de la transformation de contact [1], l'équation (10) transformée prend la forme suivante, en considérant z, comme nouvelle fonction inconnue de nouvelles variables indépendantes x_1 et y_1:

$$(x_1^2 + 2)\, p_1 + (x_1 y_1 + 1)\, q_1 = x_1 z_1 - f(x_1) ,$$

p_1 et q_1 désignant respectivement les nouvelles dérivées $\frac{\partial z_1}{\partial x_1}$ et $\frac{\partial z_1}{\partial y_1}$. L'intégrale générale de cette dernière équation admet la forme évidente:

$$z_1 = \sqrt{x_1^2 + 2} \left\{ \int \frac{f(x_1)\, dx_1}{(x_1^2 + 2)^{3/2}} + \varphi\left[\frac{y_1}{\sqrt{x_1^2 + 2}} + \int \frac{dx_1}{(x_1^2 + 2)^{3/2}} \right] \right\} ,$$

φ désignant la seconde fonction arbitraire.

Par conséquent, l'intégrale générale de l'équation primitive (9) s'obtient au moyen de la transformation inverse des variables.

VI. — Généralisation des méthodes exposées.

Euler, en inaugurant les méthodes d'intégration que nous étudions, avait montré, en même temps, comme on pouvait

[1] N. Saltykow, Application des transformations de contact à l'intégration des équations aux dérivées partielles (*Bulletin de l'Académie des Sciences math. et natur. A. Sc. math.*, n° 3, Belgrade, 1936, p. 41).