III. RÉDUCTION AUX ÉQUATIONS REPRÉSENTANT DES DÉRIVÉES EXACTES.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **38 (1939-1940)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.09.2024**

on transforme l'équation (6) en une équation aux dérivées partielles du premier ordre par rapport aux dérivées $\frac{\partial \mu}{\partial x}$ et $\frac{\partial \mu}{\partial z}$, à savoir:

$$F\left(x, z, \mu, \frac{\partial \mu}{\partial x} + \frac{\partial \mu}{\partial z}\mu, \frac{\partial \mu}{\partial z}\right) = 0 .$$

Quant à l'équation (7), en y posant

$$q = \lambda(y, z) ,$$

elle va devenir une équation aux dérivées partielles du premier ordre par rapport à $\frac{\partial \lambda}{\partial y}$ et à $\frac{\partial \lambda}{\partial z}$:

$$\Phi\left(y, z, \lambda, \frac{\partial \lambda}{\partial z}, \frac{\partial \lambda}{\partial y} + \frac{\partial \lambda}{\partial z}\lambda\right) = 0 .$$

III. — Réduction aux équations représentant des dérivées exactes.

Considérons, par exemple, l'équation bien connue d'Ampère [1]:

$$zs + \frac{z}{q^2}t + pq = 0 . \tag{1}$$

Elle s'écrit aisément sous la forme évidente:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(zp - \frac{z}{q}\right) + 1 = 0 .$$

Intégrant cette dernière équation, on obtient une équation aux dérivées partielles du premier ordre:

$$zp - \frac{z}{q} + y = X , \tag{2}$$

où X désigne une fonction arbitraire de la variable x.

Il serait avantageux, pour intégrer l'équation (2), d'y introduire la nouvelle fonction inconnue $z_1 = z^2$. L'équation (2) va devenir

$$p_1 - \frac{4z_1}{q_1} + 2y = 2X ,$$

[1] G. V. Imschenetsky, *Etude sur les Méthodes d'Intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre.* Paris, 1872, p. 149 (n° 143).

p_1 et q_1 désignant respectivement les dérivées partielles $\frac{\partial z_1}{\partial x}$ et $\frac{\partial z_1}{\partial y}$. Cette dernière équation admet l'intégrale des caractéristiques:

$$q_1 = 2x + c_1 \ ,$$

c_1 étant une constante arbitraire. On représente, au moyen d'une quadrature, l'intégrale générale de l'équation (1), par l'ensemble de deux équations:

$$z^2 = (2x + c_1)y + (2x - c_1)^2 \left[2 \int \frac{\mathrm{X}dx}{(2x + c_1)^2} + \varphi(c_1)\right] ,$$

$$y + 2(2x + c_1)\left[2 \int \frac{\mathrm{X}dx}{(2x + c_1)^2} + \varphi(c_1)\right] + \\ + (2x + c_1)^2 \left[\varphi'(c_1) - 4 \int \frac{\mathrm{X}dx}{(2x + c_1)^3}\right] = 0 \ ,$$

φ désignant la seconde fonction arbitraire du paramètre variable c_1.

Citons comme second exemple l'équation de E. Goursat:

$$s = \varphi(z)\, pq \ , \tag{3}$$

la fonction φ étant quelconque. Cette dernière équation représente bien une dérivée exacte:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\log p - \int \varphi(z)\, dz\right] = 0 \ .$$

Il s'ensuit, au moyen de deux quadratures consécutives, l'intégrale générale de l'équation donnée (3):

$$\int e^{-\int \varphi(z)\, dz} dz = \mathrm{X} + \mathrm{Y} \ ,$$

X et Y désignant respectivement des fonctions arbitraires de x et de y.

L'équation (3) avait été généralisée par M. A. Demoulin de la manière suivante:

$$s = \frac{f'(z)}{f(z)} pq + f(z)\,\mathrm{F}(x, y) \ , \tag{4}$$

les fonctions $f(z)$ et $\mathrm{F}(x, y)$ étant quelconques [1].

---

[1] M. A. Demoulin avait donné cette dernière équation au *Bul. de la Société math. de France*, t. XXI (1893), en considérant au lieu de $\mathrm{F}(x, y)$ un polynôme des produits $\mathrm{X}_i \mathrm{Y}_i$.

Il s'ensuit immédiatement

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{p}{f(z)}\right] = F(x\,,\,y)\ .$$

On obtient d'ici, au moyen de deux quadratures consécutives, l'intégrale générale requise:

$$\int \frac{dz}{f(z)} = \int \partial x \int F(x\,,\,y)\,\partial y + X + Y\ ,$$

X et Y désignant respectivement des fonctions arbitraires de x et de y.

On trouve, à la page 88 du tome III du *Cours d'Analyse mathématique de Goursat* (4^me^ éd., Paris, 1927), parmi les exercices, l'équation:

$$s = pq + e^z f(x\,,\,y)\ . \tag{5}$$

Cette dernière équation peut être traitée par la méthode exposée, car on a:

$$s = \frac{(e^z)'_z}{e^z}\,pq + e^z f(x\,,\,y)\ .$$

Il s'en suit, en effet, l'intégrale générale requise de l'équation (5):

$$e^{-z} + \int \partial x \int f(x\,,\,y)\,\partial y + X + Y = 0\ .$$

Intégrons, enfin, l'équation de M. Gau:

$$s = (e^z + e^{-z})\,p\ . \tag{6}$$

Elle est réductible à la différentielle exacte, comme il suit:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[q - \int (e^z + e^{-z})\,dz\right] = 0\ .$$

En intégrant cette dernière équation, on obtient:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = e^z - e^{-z} + Y\ ,$$

Y désignant une fonction arbitraire de la variable y. Si l'on y introduit, au lieu de z, la nouvelle fonction inconnue $u = e^z$, cette dernière équation devient ordinaire du type eulérien:

$$\frac{du}{dy} = u^2 + Yu - 1 .$$

En y remplaçant la fonction arbitraire Y par la formule

$$Y \equiv \frac{\theta' + 1}{\theta} - \theta ,$$

θ désignant la nouvelle fonction arbitraire de y, l'équation considérée admettra la solution particulière θ.

Cela étant, l'intégrale générale de l'équation (6) de M. Gau sera définie par l'ensemble des deux équations suivantes:

$$e^z = \theta - \frac{Y'}{X + Y} ,$$

$$Y = -\int e^{\int\left(\frac{\theta'+1}{\theta} + \theta\right)dy} dy ,$$

θ et X désignant deux fonctions arbitraires respectivement de y et de x.

IV. — Réduction d'équations aux formes intégrables par groupement des termes.

Il s'agit, dans les lignes qui vont suivre, de transformer les équations données aux dérivées partielles du second ordre en d'autres équations qui soient intégrables, en groupant d'une manière convenable les termes d'équations données.

Pour expliquer l'idée de ce procédé, intégrons, d'abord, l'équation classique de la corde vibrante:

$$r - a^2 t = 0 , \tag{1}$$

a désignant une constante arbitraire.

Ajoutons et retranchons le terme as au premier membre de