Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 38 (1939-1940)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: MÉTHODES IMMÉDIATES D'INTÉGRATION D'ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU SECOND ORDRE

Autor: Saltykow, N.

Kapitel: II. RÉDUCTION AUX ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU PREMIER ORDRE.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-515778

L'équation (5) est donc différentielle ordinaire du premier ordre par rapport à la fonction inconnue p de la variable indépendante y, en traitant x comme une constante. L'intégrale générale de l'équation (5) va s'écrire, par conséquent, de la manière suivante:

$$f(x, y, p, X) = 0 , \tag{7}$$

X désignant une fonction arbitraire de x, qui s'introduit, au lieu d'une constante arbitraire d'intégration.

L'équation obtenue (7) est encore différentielle ordinaire du premier ordre par rapport à la fonction inconnue z, car on a

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} ,$$

la variable y est, à présent, à considérer comme une valeur constante. Supposons que l'on obtienne, en résolvant l'équation (7) par rapport à p:

$$p = \theta(x, X, y) . \tag{8}$$

Grâce à l'hypothèse introduite par rapport à y, l'équation (8) donne, par quadrature, l'intégrale générale de l'équation (3)

$$z = \int \theta(x, X, y)\, \partial x + Y ,$$

où Y est la seconde fonction arbitraire qui ne dépend que de y.

La seconde équation (6) va s'intégrer d'une manière analogue; et l'intégrale générale de l'équation (4) impliquera deux fonctions arbitraires, dont la première ne contient que y et la seconde sera une fonction de la variable x.

II. — Réduction aux équations aux dérivées partielles du premier ordre.

Considérons, d'abord, les équations de la forme suivante:

$$F(x, y, p, r, s) = 0 , \tag{1}$$

$$\Phi(x, y, q, s, t) = 0 . \tag{2}$$

Chacune de ces équations se met immédiatement sous la forme d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre. En effet, on les écrit aisément de la manière suivante:

$$F\left(x, y, p, \frac{\partial p}{\partial x}, \frac{\partial p}{\partial y}\right) = 0 , \tag{3}$$

$$\Phi\left(x, y, q, \frac{\partial q}{\partial x}, \frac{\partial q}{\partial y}\right) = 0 . \tag{4}$$

Un cas très simple se présente, par exemple, si les équations données (1) et (2) sont respectivement linéaires par rapport aux dérivées partielles du second ordre. Les équations (3) et (4) sont alors linéaires respectivement par rapport aux dérivées $\frac{\partial p}{\partial x}, \frac{\partial p}{\partial y}$, ou bien par rapport à $\frac{\partial q}{\partial x}, \frac{\partial q}{\partial y}$.

Si l'on suppose, par exemple, que l'équation (3) soit linéaire, son intégrale générale va devenir:

$$p = u(x, y) + \varphi\left[v(x, y)\right] , \tag{5}$$

φ désignant une fonction arbitraire et u, v admettant des valeurs bien déterminées.

L'équation (5) produit l'intégrale générale requise, au moyen d'une quadrature partielle par rapport à la variable x:

$$z = \int \left\{ u(x, y) + \varphi\left[v(x, y)\right] \right\} \partial x + Y ,$$

Y désignant une fonction arbitraire de la variable indépendante y.

On trouve, chez E. Goursat, deux autres cas d'équations qui jouissent des propriétés analogues et se présentent sous les formes suivantes:

$$F\left(x, z, p, r, \frac{s}{q}\right) = 0 , \tag{6}$$

$$\Phi\left(y, z, q, \frac{s}{p}, t\right) = 0 . \tag{7}$$

En cherchant la solution de l'équation (6) sous la forme

$$p = \mu(x, z) ,$$

on transforme l'équation (6) en une équation aux dérivées partielles du premier ordre par rapport aux dérivées $\frac{\partial \mu}{\partial x}$ et $\frac{\partial \mu}{\partial z}$, à savoir:

$$F\left(x, z, \mu, \frac{\partial \mu}{\partial x} + \frac{\partial \mu}{\partial z}\mu, \frac{\partial \mu}{\partial z}\right) = 0 .$$

Quant à l'équation (7), en y posant

$$q = \lambda(y, z) ,$$

elle va devenir une équation aux dérivées partielles du premier ordre par rapport à $\frac{\partial \lambda}{\partial y}$ et à $\frac{\partial \lambda}{\partial z}$:

$$\Phi\left(y, z, \lambda, \frac{\partial \lambda}{\partial z}, \frac{\partial \lambda}{\partial y} + \frac{\partial \lambda}{\partial z}\lambda\right) = 0 .$$

III. — Réduction aux équations représentant des dérivées exactes.

Considérons, par exemple, l'équation bien connue d'Ampère [1]:

$$zs + \frac{z}{q^2}t + pq = 0 . \tag{1}$$

Elle s'écrit aisément sous la forme évidente:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(zp - \frac{z}{q}\right) + 1 = 0 .$$

Intégrant cette dernière équation, on obtient une équation aux dérivées partielles du premier ordre:

$$zp - \frac{z}{q} + y = X , \tag{2}$$

où X désigne une fonction arbitraire de la variable x.

Il serait avantageux, pour intégrer l'équation (2), d'y introduire la nouvelle fonction inconnue $z_1 = z^2$. L'équation (2) va devenir

$$p_1 - \frac{4z_1}{q_1} + 2y = 2X ,$$

[1] G. V. Imschenetsky, *Etude sur les Méthodes d'Intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre.* Paris, 1872, p. 149 (nº 143).