Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 38 (1939-1940)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR L'EMPLOI DU VECTORIEL DANS LA THÉORIE DU TRIÈDRE MOBILE DE DARBOUX

Autor: Becqué, J.

Kapitel: I. — Mouvement à trois paramètres.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-515777

dans l'espace euclidien, tout en donnant des résultats à la fois condensés et aisément développables.

Je prendrai comme exemple quelques questions traitées par Darboux dans sa *Théorie des Surfaces.* Au symbole de Kronecker, désigné ici par (ab), j'ajouterai le symbole (abc) valeur $+1, -1$, ou 0 suivant que la permutation des trois nombres est paire, impaire, ou avec deux nombres égaux.

I. — Mouvement à trois paramètres.

Considérons deux trièdres orthonormaux, l'un $\mathrm{I}\,(\mathrm{I}_m)$ fixe, d'origine O, l'autre $i\,(i_m)$ lié au corps, d'origine M; ces deux trièdres sont rattachés l'un à l'autre par les cosinus directeurs des angles des axes:

$$c_l^m = \mathrm{I}^m \times i_l ,$$

a. — Soit un vecteur a de composantes a^m sur le trièdre i, posons $a/_{\mathrm{R}} = i_m \dfrac{\partial a^m}{\partial u^{\mathrm{R}}}$, désignons par p_{R} la rotation instantanée de i quand u^{R} varie seul, la condition $i_m \times i_m = 1$, nous donne quand u^{R} varie seul $i_m \times \dfrac{\partial i_m}{\partial u^{\mathrm{R}}} = 0$, c'est donc que p_{R} est tel que $\dfrac{\partial i_m}{\partial u^{\mathrm{R}}} = p_{\mathrm{R}} \wedge i_m$, p_{R} a pour composantes $p_{\mathrm{R}}^m = p_{\mathrm{R}} \times i^m$, ces notations permettent de séparer le mouvement en un mouvement relatif et en un mouvement d'entraînement

$$\frac{\partial a}{\partial u^{\mathrm{R}}} = \frac{\partial}{\partial u^{\mathrm{R}}} a^m i_m = i_m \frac{\partial a^m}{\partial u^{\mathrm{R}}} + a^m \frac{\partial i_m}{\partial u^{\mathrm{R}}} = a_{/\mathrm{R}} + p_{\mathrm{R}} \wedge a . \quad (1)$$

Passons au repère (I_m) mais, pour abréger l'écriture, écrivons I pour I_m jusqu'à l'équation (A_1), I étant fixe, les $\dfrac{\partial \mathrm{I}}{\partial u^{\mathrm{R}}}$ sont nuls, donc:

$$\mathrm{I}_{/\mathrm{R}} = \mathrm{I} \wedge p_{\mathrm{R}} , \quad (2)$$

leurs dérivées partielles sont $\dfrac{\partial}{\partial u^{\mathrm{S}}}\, \mathrm{I}_{/\mathrm{R}} = \dfrac{\partial \mathrm{I}}{\partial u^{\mathrm{S}}} \wedge p_{\mathrm{R}} + \mathrm{I} \wedge \dfrac{\partial p_{\mathrm{R}}}{\partial u^{\mathrm{S}}}$, pour évaluer les $\dfrac{\partial}{\partial u^{\mathrm{S}}}$ tenons compte de (1) qui s'applique aux vecteurs I et p_R, le premier membre est, d'après (2): $(I_{/R})_{/S} + p_S \wedge I_{/R} = I_{/R/S} + p_S \wedge (I \wedge p_R)$, le second membre est $I \wedge (p_{R/S} + p_S \wedge p_R)$, on a donc $I_{/R/S} + p_S \wedge (I \wedge p_R) = I \wedge p_{R/S} + I \wedge (p_S \wedge p_R)$, de même $I_{/S/R} + p_R \wedge (I \wedge p_S) = I \wedge p_{S/R} + I \wedge (p_R \wedge p_S)$, or: 1° $I_{/R/S} = I_{/S/R}$, car les /R/S supposent des vitesses relatives, donc des i_m constants; 2° entre les trois vecteurs I, p_R, p_S on a l'identité $I \wedge (p_R \wedge p_S) + p_R \wedge (p_S \wedge I) + p_S \wedge (I \wedge p_R) = 0$, donc $p_S \wedge (I \wedge p_R) - p_R \wedge (I \wedge p_S) = - I \wedge (p_R \wedge p_S)$, et par soustraction des deux formules on obtient: $- I \wedge (p_R \wedge p_S) = I \wedge (p_{R/S} - p_{S/R}) + I \wedge (p_S \wedge p_R) - I \wedge (p_R \wedge p_S)$, et par suite: $I \wedge (p_{R/S} - p_{S/R} + p_S \wedge p_R) = 0$, d'où les équations pour trois paramètres généralisant les équations de Darboux (L. I, ch. V, éq. 5) pour deux paramètres (cf. *Systèmes orthogonaux*, L. II, ch. II):

$$(A_1)\; p_{R/S} - p_{S/R} = p_R \wedge p_S \;;$$

b. — Pour déterminer le mouvement d'un point, introduisons les deux trios de vecteurs: vitesses M_R de l'origine M et rotations p_R du trièdre mobile pour u^R variant seul (R = 1, 2, 3). Appliquons (1) aux vitesses $\frac{\partial M_R}{\partial u^S} = M_{R/S} + p_S \wedge M_R$, mais puisque $M_R = \frac{\partial M}{\partial u^R}$, on a $\partial^2 M/\partial u^R \partial u^S = \partial M_R/\partial u^S = \partial M_S/\partial u^R$, donc:

$$(A_2)\; M_{R/S} - M_{S/R} = p_R \wedge M_S - p_S \wedge M_R \;;$$

c. — Introduisons p_R^m et M_R^m composantes sur i_m de p_R et M_R, ayant:

$$M_{R/S} = (M_R^0 i_0)_{/S} = i_0 \partial M_R^0/\partial u^S \;, \qquad p_{R/S} = (p_R^0 i_0)_{/S} = i_0 \partial p_R^0/\partial u^S \;,$$

$$p_R \wedge p_S = p_R^m i_m \wedge p_S^n i_n = p_R^m p_S^n i_0 (mno) \;,$$

$$p_R \wedge M_S = p_R^m i_m \wedge M_S^n i_n = p_R^m M_S^n i_0 (mno) \;;$$

les (A) donnent en égalant les coefficients de i_0:

$$(A_1)\; \frac{\partial p_R^0}{\partial u^S} - \frac{\partial p_S^0}{\partial u^R} = p_R^m p_S^n (mno) \;,$$

$$(A_2)\; \frac{\partial M_R^0}{\partial u^S} - \frac{\partial M_S^0}{\partial u^R} = (p_R^m M_S^n - p_S^m M_R^n)(mno) \;;$$

d. — Un déplacement d appliqué aux paramètres produit un déplacement dM de l'origine et di_a des axes, ayant pour expression (posant $M^m = M_r^m du^r = i_m \times dM$, $p = p_r du^r$):

$$dM = M_r du^r = (M_r \times i_m) i_m du^r = M_r^m i_m du^r = M^m i_m ,$$

$$di_a = \frac{\partial i_a}{\partial u^r} du^r = p_r \wedge i_a du^r = p_r du^r \wedge i_a = p \wedge i_a ;$$

en désignant par p^m les composantes de p sur (i_m) : $p^m = = p \times i_m = p_r du^r \times i_m = p_r^m du^r$, on peut écrire:

$$di_a = p^c i_c \wedge i_a = (abc) i_b p^c ,$$

si l'on pose $di_a = \omega_{an} i_n$ (par exemple pp. 177 et suivantes de: *Théorie des groupes finis et continus...* de M. E. Cartan), le lien avec la notation ci-dessus s'obtient en observant que:

$$\omega_{an} = di_a \times i_n = p \wedge i_a \times i_n = p \times i_a \wedge i_n = p \times (anr) i_r = p^r (anr) ,$$

on en déduit que $\omega_{AA} = 0$, $\omega_{an} = -\omega_{na}$, car $(anr) = -(nar)$, et que

$$p^a = \frac{1}{2} (amn) \omega_{mn} ;$$

e. — Introduisons maintenant un trièdre auxiliaire qui va servir à la représentation sphérique, son origine sera fixe. Pour un point N lié au trièdre, tel que $N = M + n$, on aura $\frac{\partial N}{\partial u^R} = \frac{\partial M}{\partial u^R} + n_{/R} + p_R \wedge n$, qui se réduit à $\frac{\partial N}{\partial u^R} = p_R \wedge n$, et posons toujours $dN = du^r \frac{\partial N}{\partial u^r}$, on a:

$$dN = p \wedge n ,$$

par suite $dN^2 = (p \wedge n)^2 = p^2 n^2 - (p \times n)^2$, et si n est la normale unitaire à la surface ($n = i_3$), $n^2 = 1$, $p \times n = p^3 = = p_r^3 du^r$, $(p \times n)^2 = p_r^3 p_s^3 du^r du^s$, $p^2 = p^m p^m = p_r^m p_s^m du^r du^s$, donc en désignant par une lettre grecque un indice qui ne prend pas la valeur 3,

$$d\sigma^2 = dN^2 = (p \wedge n)^2 = p_r^\varepsilon p_s^\varepsilon du^r du^s ,$$

f. — Pour un point N lié au trièdre mobile (i_m) on aura, puisque $p \wedge n = p^b i_b \wedge n^c i_c = i^a (abc) p^b n^c$,

$$dN = dM + p \wedge n = i_a (M^a + (abc) p^b n^c) , \qquad (f)$$

g. — Si N était mobile par rapport à (i_m) on aurait (DARBOUX, L. I, ch. VII, éq. 4):

$$dN = i_a (dn^a + M^a + (abc) p^b n^c) .$$

II. — APPLICATIONS À QUELQUES QUESTIONS GÉNÉRALES.

a. — *Tangentes conjuguées.* — « Si le point M de la surface décrit une courbe on obtiendra la conjuguée de la tangente à cette courbe en prenant l'intersection du plan tangent en M avec le plan tangent infiniment voisin » (DARBOUX, L. V, ch. I), cette droite est l'axe des normales N — M en M, et N + dN — (M + dM) au point infiniment voisin de M, elle a donc pour vecteur, d'après (f):

$$j = (N - M) \wedge (N - M + dN - dM) =$$
$$= n \wedge (n + p \wedge n) = p(n \times n) - n(p \times n) = p - np^3 = p^\varepsilon i_\varepsilon ,$$

et un déplacement δM suivant la direction conjuguée de dM devra satisfaire à l'équation (puisque δM devra être suivant j):

$$\delta = j \wedge \delta M = (n \wedge dN) \wedge \delta M = p^\mu i_\mu \wedge M_r^\nu \delta u^r i_\nu =$$
$$= p^\mu M_r^\nu (\mu\nu 3) i_3 \delta u^r = (3\,\mu\nu)\, n p_\alpha^\mu M_\beta^\nu du^\alpha \delta u^\beta ,$$

c'est-à-dire:

$$(3\,\mu\nu)\, p_\alpha^\mu M_\beta^\nu du^\alpha \delta u^\beta = 0 .$$

Si les deux directions conjuguées coïncident, on obtient l'équation des asymptotiques:

$$j \wedge dM = 0 \qquad \text{ou} \qquad (3\,\mu\nu)\, p_\alpha^\mu M_\beta^\nu du^\alpha du^\beta = 0 ,$$

ou encore, ayant $j = n \wedge (p \wedge n)$ et $dN = p \wedge n$, on a $dN \times j = 0$ et, ici, j portant dM:

$$dM \times dN = 0 .$$