

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 38 (1939-1940)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** POINTS SIMPLES ET POINTS SINGULIERS DES COURBES PLANES  
**Autor:** Tzénoff, Iv.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-515776>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 15.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# POINTS SIMPLES ET POINTS SINGULIERS DES COURBES PLANES

PAR

IV. TZÉNOFF (Sofia).

1. — *Courbes d'équation*  $\varphi(x, y) = 0$ ; *points simples et points singuliers*. — Soit

$$\varphi(x, y) = 0 \quad (1)$$

l'équation d'une courbe plane C et M  $(x, y)$  un point de cette courbe. Nous supposons que les dérivées partielles de  $\varphi$  d'ordre  $\leq 6$  par exemple sont continues au point M. Alors  $M_1(x + \Delta x, y + \Delta y)$  étant un point variable de C, infiniment voisin de M, on aura  $\varphi(x + \Delta x, y + \Delta y) = 0$ , d'où l'on déduit

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \varphi}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \Delta y + \frac{1}{2!} \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \Delta x^2 + 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \Delta x \Delta y + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \Delta y^2 \right) \\ & + \frac{1}{3!} \left( \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} \Delta x^3 + 3 \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^2 \partial y} \Delta x^2 \Delta y + 3 \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x \partial y^2} \Delta x \Delta y^2 + \frac{\partial^3 \varphi}{\partial y^3} \Delta y^3 \right) \\ & + \frac{1}{4!} \left( \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} \Delta x^4 + \dots \right) + \frac{1}{5!} \left( \frac{\partial^5 \varphi}{\partial x^5} \Delta x^5 + \dots \right) \\ & + \frac{1}{6!} \left( \frac{\partial^6 \varphi}{\partial x^6} \Delta x^6 + \dots \right) = 0 . \end{aligned} \quad (2)$$

En introduisant les vecteurs

$$\overrightarrow{\text{grad}} \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \vec{j}, \quad \overrightarrow{MM_1} = \Delta x \vec{i} + \Delta y \vec{j},$$

où  $\vec{i}$  et  $\vec{j}$  désignent les vecteurs-unitaires des axes  $ox$  et  $oy$ , l'équation (2) s'écrit:

$$\begin{aligned} & \overrightarrow{MM_1} \overrightarrow{\text{grad}} \varphi + \frac{1}{2!} \overrightarrow{MM_1} \overrightarrow{\text{grad}} (\overrightarrow{MM_1} \overrightarrow{\text{grad}} \varphi) \\ & + \frac{1}{3!} \overrightarrow{MM_1} \overrightarrow{\text{grad}} [\overrightarrow{MM_1} \overrightarrow{\text{grad}} (\overrightarrow{MM_1} \overrightarrow{\text{grad}} \varphi)] + \dots = 0 . \end{aligned} \quad (2')$$

Nous nous proposons de déterminer la position du point  $M_1$  (c'est-à-dire de la courbe  $C$ ) par rapport à la tangente ( $T$ ) à la courbe  $C$  au point  $M$ . Pour cela nous devons déterminer l'inconnue  $\overrightarrow{MM_1}$  de l'équation (2').

Nous désignerons par  $\vec{U}_t$  le vecteur-unitaire de la tangente ( $T$ ):

$$\vec{U}_t = \cos \alpha \vec{i} + \sin \alpha \vec{j}, \quad (3)$$

$\alpha$  étant l'angle (compris entre 0 et  $\pi$ ) que fait la tangente avec l'axe des  $x$ . Nous désignerons par  $\vec{U}_n$  le vecteur-unitaire porté par la normale ( $N$ ) et faisant avec  $ox$  l'angle  $\alpha + \frac{\pi}{2}$ :

$$\vec{U}_n = \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) \vec{i} + \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) \vec{j} = -\sin \alpha \vec{i} + \cos \alpha \vec{j}. \quad (4)$$

Cela posé, supposons que  $\overrightarrow{MM_1}$  soit de la forme

$$\overrightarrow{MM_1} = \overrightarrow{MQ_1} + \overrightarrow{Q_1M_1} = \lambda \vec{U}_t + \lambda \mu \vec{U}_n, \quad (5)$$

$\lambda$  et  $\lambda \mu$  étant deux quantités scalaires infiniment petites, dont la seconde  $\lambda \mu$  est infiniment petite par rapport à la première  $\lambda$ .

Pour connaître le vecteur  $\overrightarrow{MM_1}$ , il suffit de connaître  $\alpha$ ,  $\lambda$ ,  $\mu$  ou bien —  $\alpha$  et  $\mu$ , car l'infiniment petit  $\lambda$  peut être choisi arbitrairement (le point  $M_1$  infiniment voisin de  $M$  pouvant être choisi arbitrairement). En portant la valeur de (5) dans l'équation (2') nous obtiendrons une équation dont nous tirerons les inconnues  $\alpha$  et  $\mu$ . Pour simplifier nous écrirons

$$\frac{d\varphi}{dU_t} = \vec{U}_t \overrightarrow{\text{grad}} \varphi, \quad \frac{d^2\varphi}{dU_t^2} = \vec{U}_t \overrightarrow{\text{grad}} (\vec{U}_t \overrightarrow{\text{grad}} \varphi), \quad \frac{d\varphi}{dU_n} = \vec{U}_n \overrightarrow{\text{grad}} \varphi,$$

$$\frac{d^2\varphi}{dU_t dU_n} = \vec{U}_t \overrightarrow{\text{grad}} (\vec{U}_n \overrightarrow{\text{grad}} \varphi) = \vec{U}_n \overrightarrow{\text{grad}} (\vec{U}_t \overrightarrow{\text{grad}} \varphi), \dots$$

Avec ces notations l'équation (2') s'écrira

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dU_t} + \mu \frac{d\varphi}{dU_n} + \frac{\lambda}{2!} \left( \frac{d^2\varphi}{dU_t^2} + 2\mu \frac{d^2\varphi}{dU_t dU_n} + \mu^2 \frac{d^2\varphi}{dU_n^2} \right) \\ + \frac{\lambda^2}{3!} \left( \frac{d^3\varphi}{dU_t^3} + 3\mu \frac{d^3\varphi}{dU_t^2 dU_n} + 3\mu^2 \frac{d^3\varphi}{dU_t dU_n^2} + \mu^3 \frac{d^3\varphi}{dU_n^3} \right) \\ + \frac{\lambda^3}{4!} \left( \frac{d^4\varphi}{dU_t^4} + 4\mu \frac{d^4\varphi}{dU_t^3 dU_n} + 6\mu^2 \frac{d^4\varphi}{dU_t^2 dU_n^2} + 4\mu^3 \frac{d^4\varphi}{dU_t dU_n^3} + \mu^4 \frac{d^4\varphi}{dU_n^4} \right) \\ + \frac{\lambda^4}{5!} \left( \frac{d^5\varphi}{dU_t^5} + \dots \right) + \frac{\lambda^5}{6!} \left( \frac{d^6\varphi}{dU_t^6} + \dots \right) = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Le point M sera un point *simple*, si  $\overrightarrow{\text{grad}} \varphi \neq 0$ ; si non M est un point *singulier*.

2. — *Point simple*:  $\overrightarrow{\text{grad}} \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \vec{j} \neq 0$ . — L'équation (6) donne à la limite ( $\mu \rightarrow 0$  et  $\lambda \rightarrow 0$ ):

$$\frac{d\varphi}{dU_t} \equiv \vec{U}_t \overrightarrow{\text{grad}} \varphi = 0 \quad \text{ou} \quad \cos \alpha \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \sin \alpha \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0. \quad (7)$$

La condition  $\vec{U}_t \overrightarrow{\text{grad}} \varphi = 0$  exprime que le vecteur  $\overrightarrow{\text{grad}} \varphi$  est perpendiculaire au vecteur  $\vec{U}_t$ , c'est-à-dire à la tangente (T). L'angle  $\alpha$  ( $0 \leq \alpha < \pi$ ) que fait  $\vec{U}_t$  avec  $ox$  est déterminé par

$$\text{tg } \alpha = - \frac{\partial \varphi}{\partial x} : \frac{\partial \varphi}{\partial y}; \quad (7')$$

$\alpha$  étant connu, on déterminera ensuite  $\mu$  en fonction de  $\lambda$  à partir de l'équation

$$\begin{aligned} \mu \frac{d\varphi}{dU_n} + \frac{\lambda}{2!} \left( \frac{d^2 \varphi}{dU_t^2} + 2\mu \frac{d^2 \varphi}{dU_t dU_n} + \mu^2 \frac{d^2 \varphi}{dU_n^2} \right) \\ + \frac{\lambda^2}{3!} \left( \frac{d^3 \varphi}{dU_t^3} + \dots \right) + \frac{\lambda^3}{4!} \left( \frac{d^4 \varphi}{dU_t^4} + \dots \right) + \frac{\lambda^4}{5!} \left( \frac{d^5 \varphi}{dU_t^5} + \dots \right) = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Nous aurons plusieurs cas particuliers à distinguer:

1. *Point simple à courbure non nulle*:  $\frac{d^2 \varphi}{dU_t^2} \neq 0$ . — Dans ce cas, en négligeant les infiniments petits d'ordres supérieurs, on obtient

$$\mu \frac{d\varphi}{dU_n} + \frac{\lambda}{2} \frac{d^2 \varphi}{dU_t^2} = 0, \quad \mu = \mu_1 = - \frac{\lambda}{2} \frac{d^2 \varphi}{dU_t^2} : \frac{d\varphi}{dU_n};$$

$\alpha$  et  $\mu$  étant connus, l'équation (5) donne pour  $\overrightarrow{MM_1}$  l'expression

$$\overrightarrow{MM_1} = \overrightarrow{MO_1} + \overrightarrow{O_1 M_1} = \lambda \vec{U}_t - \frac{\lambda^2}{2!} \left( \frac{d^2 \varphi}{dU_t^2} : \frac{d\varphi}{dU_n} \right) \vec{U}_n;$$

en y remplaçant  $\lambda$  par  $-\lambda$  nous obtenons

$$\overrightarrow{MM_2} = \overrightarrow{MO_2} + \overrightarrow{O_2 M_2} = -\lambda \vec{U}_t - \frac{\lambda^2}{2!} \left( \frac{d^2 \varphi}{dU_t^2} : \frac{d\varphi}{dU_n} \right) \vec{U}_n,$$



d'où l'on déduit

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MO_1} &= -\overrightarrow{MO_2} = \lambda \vec{U}_t, \\ \overrightarrow{O_1 M_1} &= \overrightarrow{O_2 M_2} = -\frac{\lambda^2}{2} \left( \frac{d^2 \varphi}{dU_t^2} : \frac{d\varphi}{dU_n} \right) \vec{U}_n,\end{aligned}$$

ce qui montre qu'au voisinage d'un point simple à courbure non nulle la courbe est située d'un seul côté de la tangente T'MT. Le signe de  $-\frac{d^2 \varphi}{dU_t^2} : \frac{d\varphi}{dU_n}$  détermine si la courbe est située du côté de  $\vec{U}_n$  ou du côté opposé.

Nous montrerons que la condition  $\frac{d^2 \varphi}{dU_t^2} \neq 0$  exprime que la courbure  $\frac{1}{\rho}$  est non nulle. En effet, nous avons

$$\overrightarrow{dM} = \frac{\overrightarrow{dM}}{ds} ds = ds \vec{U}_t, \quad d^2 M = \frac{\overrightarrow{d^2 M}}{ds^2} ds^2 + d^2 s \vec{U}_t.$$

En multipliant par  $\overrightarrow{\text{grad } \varphi}$ , on obtient

$$\overrightarrow{d^2 M} \overrightarrow{\text{grad } \varphi} = \pm \frac{ds^2}{\rho} \frac{d\varphi}{dU_n}. \quad (9)$$

Mais on tire de (1) les relations

$$d\varphi \equiv \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy \equiv \overrightarrow{dM} \overrightarrow{\text{grad } \varphi} = 0,$$

$$d^2 \varphi \equiv \overrightarrow{d^2 M} \overrightarrow{\text{grad } \varphi} + \overrightarrow{dM} \overrightarrow{\text{grad } (d\varphi)} = 0,$$

dont la seconde peut être écrite sous la forme

$$d^2 \varphi \equiv \overrightarrow{d^2 M} \overrightarrow{\text{grad } \varphi} + \overrightarrow{dM} \overrightarrow{\text{grad } (\overrightarrow{dM} \overrightarrow{\text{grad } \varphi})} = 0 \quad (10)$$

ou

$$\overrightarrow{d^2 M} \overrightarrow{\text{grad } \varphi} = -ds^2 \frac{d^2 \varphi}{dU_t^2}. \quad (10')$$

En tenant compte de (10') l'équation (9) devient

$$\frac{d^2 \varphi}{dU_t^2} = \pm \frac{1}{\rho} \frac{d\varphi}{dU_n}, \quad \frac{1}{\rho} = \left| \frac{d^2 \varphi}{dU_t^2} : \frac{d\varphi}{dU_n} \right|. \quad (11)$$

On tire de (7)

$$\frac{\cos \alpha}{\frac{\partial \varphi}{\partial y}} = \frac{\sin \alpha}{-\frac{\partial \varphi}{\partial x}} = \frac{\pm 1}{|\overrightarrow{\text{grad}} \varphi|};$$

par conséquent

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} &= \left| \frac{\frac{d^2 \varphi}{dU_t^2}}{\frac{d\varphi}{dU_n}} \right| = \left| \frac{\overrightarrow{d^2 M} \overrightarrow{\text{grad}} \varphi}{dM^2 |\overrightarrow{\text{grad}} \varphi|} \right| = \\ &= \left| \frac{\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 - 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2}{\left[ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 \right]^{3/2}} \right|. \quad (12) \end{aligned}$$

2. *Point d'inflexion simple*:  $\frac{d^2 \varphi}{dU_t^2} = 0$ ,  $\frac{d^3 \varphi}{dU_t^3} \neq 0$ . — Dans ce cas la courbure au point M est nulle. Les points d'inflexion simples sont déterminés par l'équation

$$\varphi(x, y) = 0, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 - 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 = 0, \quad (13)$$

à condition toutefois que  $\frac{\partial^3 \varphi}{\partial U_t^3} \neq 0$ .

L'équation (8) donne pour  $\mu$  la valeur approchée suivante:

$$\mu \frac{d\varphi}{dU_n} + \frac{\lambda^2}{3!} \frac{d^3 \varphi}{dU_t^3} = 0, \quad \mu = \mu_1 = -\frac{\lambda^2}{3!} \left( \frac{d^3 \varphi}{dU_t^3} : \frac{d\varphi}{dU_n} \right).$$

L'équation (5) donne dans ce cas

$$\overrightarrow{MO_1} = -\overrightarrow{MO_2} = \lambda \vec{U}_t, \quad \overrightarrow{O_1 M_1} = -\overrightarrow{O_2 M_2} = -\frac{\lambda^3}{3!} \left( \frac{d^3 \varphi}{dU_t^3} : \frac{d\varphi}{dU_n} \right) \vec{U}_n.$$

On en conclut qu'au voisinage d'un point d'inflexion M(x, y) la courbe (C) traverse la tangente T'MT. Lorsque  $-\frac{d^3 \varphi}{dU_t^3} : \frac{d\varphi}{dU_n}$  est  $> 0$ , l'arc  $\left\{ \begin{smallmatrix} MM_1 \\ MM_2 \end{smallmatrix} \right\}$  est du côté de  $\left\{ \begin{smallmatrix} \vec{U}_n \\ -\vec{U}_n \end{smallmatrix} \right\}$ ; lorsque  $-\frac{d^3 \varphi}{dU_t^3} : \frac{d\varphi}{dU_n}$  est  $< 0$ , c'est l'inverse qui a lieu.

3. *Point ordinaire simple à courbure nulle*:  $\frac{d^2\varphi}{dU_t^2} = 0$ ,  $\frac{d^3\varphi}{dU_t^3} = 0$ ,

$\frac{d^4\varphi}{dU_t^4} \neq 0$ . — Dans ce cas le signe de  $-\frac{d^4\varphi}{dU_t^4} : \frac{d\varphi}{dU_n}$  montre de quel côté de la tangente T'MT est située la courbe.

4. On généralise facilement.

3. — *Point singulier*:  $\overrightarrow{\text{grad}} \varphi = 0$ . — Les coordonnées  $x, y$  d'un point singulier satisfont aux équations

$$\varphi = 0, \quad \overrightarrow{\text{grad}} \varphi = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0, \quad \varphi = 0.$$

Dans ce cas  $\frac{d\varphi}{dU_t} = 0 = \frac{d\varphi}{dU_n}$  et l'équation (6) — après suppression du facteur  $\frac{\lambda}{2}$  et passage à la limite  $\lambda \rightarrow 0$ ,  $\mu \rightarrow 0$  — donne

$$\frac{d^2\varphi}{dU_t^2} = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} \cos^2 \alpha + 2 \frac{\partial^2\varphi}{\partial x \partial y} \cos \alpha \sin \alpha + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} \sin^2 \alpha = 0, \quad (14)$$

d'où l'on déduit pour  $\alpha$  deux valeurs:  $\alpha_1, \alpha_2$  comprises entre 0 et  $\pi$ .

Pour ces valeurs de  $x, y$  et  $\alpha$  l'équation (6) prend la forme

$$\begin{aligned} & 2\mu \frac{d^2\varphi}{dU_t dU_n} + \mu^2 \frac{d^2\varphi}{dU_n^2} + \frac{\lambda}{3} \left( \frac{d^3\varphi}{dU_t^3} + 3\mu \frac{d^3\varphi}{dU_t^2 dU_n} + 3\mu^2 \frac{d^3\varphi}{dU_t dU_n^2} + \mu^3 \frac{d^3\varphi}{dU_n^3} \right) \\ & + \frac{\lambda^2}{12} \left( \frac{d^4\varphi}{dU_n^4} + 4\mu \frac{d^4\varphi}{dU_t^3 dU_n} + 6\mu^2 \frac{d^4\varphi}{dU_t^2 dU_n^2} + 4\mu^3 \frac{d^4\varphi}{dU_t dU_n^3} + \mu^4 \frac{d^4\varphi}{dU_n^4} \right) \quad (15) \\ & + \frac{\lambda^3}{60} \left( \frac{d^5\varphi}{dU_t^5} + 5\mu \frac{d^5\varphi}{dU_t^4 dU_n} + 10\mu^2 \frac{d^5\varphi}{dU_t^3 dU_n^2} + \dots \right) + \frac{\lambda^4}{360} \left( \frac{d^6\varphi}{dU_t^6} + \dots \right) = 0, \end{aligned}$$

d'où l'on déduira  $\mu$  en fonction de  $\lambda$ .

*Remarque.* Nous montrerons que, lorsque l'équation  $\frac{d^2\varphi}{dt^2} = 0$  a des racines simples,  $\frac{d^2\varphi}{dU_t dU_n}$  n'est pas nul pour ces racines, tandis que dans le cas d'une racine double  $\frac{d^2\varphi}{dU_t dU_n} = 0$ , mais  $\frac{d^2\varphi}{dU_n^2} \neq 0$ .

En effet, on tire de (3) et (4) l'équation

$$\frac{d\vec{U}_t}{d\alpha} = \vec{U}_n, \quad \frac{d\vec{U}_n}{d\alpha} = -\vec{U}_t. \quad (16)$$

Alors

$$\frac{d}{d\alpha} \left( \frac{d^2 \varphi}{dU_t^2} \right) = \frac{d}{d\alpha} [\vec{U}_t \overrightarrow{\text{grad}} (\vec{U}_t \overrightarrow{\text{grad}} \varphi)] = 2 \vec{U}_n \overrightarrow{\text{grad}} (\vec{U}_t \overrightarrow{\text{grad}} \varphi) = 2 \frac{d^2 \varphi}{dU_t dU_n};$$

par conséquent

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \varphi}{dU_t dU_n} &= \frac{1}{2} \frac{d}{d\alpha} \left( \frac{d^2 \varphi}{dU_t^2} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \frac{d}{d\alpha} \left[ \cos^2 \alpha \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \operatorname{tg} \alpha + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \operatorname{tg}^2 \alpha \right) \right] \\ &= -\cos \alpha \sin \alpha \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \operatorname{tg} \alpha + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \operatorname{tg}^2 \alpha \right) + \\ &\quad + \cos^2 \alpha \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \operatorname{tg} \alpha \right) \frac{1}{\cos^2 \alpha}. \end{aligned}$$

On en conclut que  $\frac{d^2 \varphi}{dU_t dU_n} = 0$  dans le cas d'une racine double de l'équation  $\frac{d^2 \varphi}{dU_t^2} = 0$ , car cette racine satisfait aussi à l'équation

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \operatorname{tg} \alpha = 0.$$

Pour cette valeur de  $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} : \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}$  on vérifie sans peine que  $\frac{d^2 \varphi}{dU_n^2} = \frac{d}{d\alpha} \left( \frac{d^2 \varphi}{dU_t dU_n} \right) - \frac{d^2 \varphi}{dU_t^2}$  est  $\neq 0$ .

On démontre de même que: si l'équation  $\frac{d^3 \varphi}{dU_t^3} = 0$  n'a que des racines simples, la fonction  $\frac{d^3 \varphi}{dU_t^2 dU_n}$  n'est pas nulle pour ces racines; si l'équation  $\frac{d^3 \varphi}{dU_t^3} = 0$  a une racine double, la fonction

$$\frac{d^3 \varphi}{dU_t^2 dU_n} = \frac{1}{3} \frac{d}{d\alpha} \left( \frac{d^3 \varphi}{dU_t^3} \right) = 0, \text{ mais } \frac{d^3 \varphi}{dU_t dU_n^2} \neq 0; \text{ si l'équation}$$

$\frac{d^3 \varphi}{dU_t^3} = 0$  a une racine triple, on a

$$\frac{d^3 \varphi}{dU_t^2 dU_n} = 0, \quad \frac{d^3 \varphi}{dU_t dU_n^2} = 0, \quad \frac{d^3 \varphi}{dU_n^3} \neq 0.$$

On généralise facilement.

I<sup>er</sup> cas. *Racines imaginaires; point isolé.* — Lorsque  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  ne sont pas réels, les vecteurs  $\vec{U}_t$ ,  $\vec{U}_n$  ne le sont pas non plus; par conséquent la courbe ne possède pas des points réels  $M_1^1, M_2^1, M_1^2, M_2^2$  au voisinage du point M. C'est un *point isolé*.

II<sup>e</sup> cas. *Racines réelles distinctes.* — Plusieurs cas sont à distinguer:

1. *Point ordinaire double à tangentes distinctes:*  $\frac{d^3\varphi}{dU_t^3} \neq 0$ . —

Dans ce cas on obtient de l'équation (15) la valeur approchée de  $\mu$  suivante:

$$2\mu \frac{d^2\varphi}{dU_t dU_n} + \frac{\lambda}{3} \frac{d^3\varphi}{dU_t^3} = 0, \quad \mu = \mu_1 = -\frac{\lambda}{6} \left( \frac{d^3\varphi}{dU_t^3} : \frac{d^2\varphi}{dU_t dU_n} \right),$$

le dénominateur  $\frac{d^2\varphi}{dU_t dU_n} = \frac{1}{2} \frac{d}{d\alpha} \left( \frac{d^2\varphi}{dU_t^2} \right)$  étant  $\neq 0$ , car  $\alpha_1 \neq \alpha_2$ .

En faisant le même raisonnement que plus haut (§ 2, 1) nous concluons que le point M est un point ordinaire double à tangentes différentes. La situation de la courbe par rapport à chacune des tangentes dépend du signe de la quantité

$$-\frac{d^3\varphi}{dU_t^3} : \frac{d^2\varphi}{dU_t dU_n} \quad \text{ou} \quad -\frac{d^3\varphi}{dU_t^3} : \frac{d}{d\alpha} \frac{d^2\varphi}{dU_t^2}.$$

2. *Point d'inflexion double à tangentes distinctes:*  $\frac{d^3\varphi}{dU_t^3} = 0$ ,  $\frac{d^4\varphi}{dU_t^4} \neq 0$ . — Dans ce cas on obtient de l'équation (15)

$$2\mu \frac{d^2\varphi}{dU_t dU_n} + \frac{\lambda^2}{12} \frac{d^4\varphi}{dU_t^4} = 0, \quad \mu = \mu_1 = -\frac{\lambda^2}{4!} \left( \frac{d^4\varphi}{dU_t^4} : \frac{d^2\varphi}{dU_t dU_n} \right).$$

Nous concluons comme plus haut (§ 2, 2) que le point M est un point d'inflexion double à tangentes distinctes. La situation de la courbe par rapport à chacune des tangentes dépend du signe de

$$-\frac{d^4\varphi}{dU_t^4} : \frac{d^2\varphi}{dU_t dU_n}.$$

Il pourrait arriver que, par exemple, pour  $\alpha = \alpha_1$  on ait un point d'inflexion et pour  $\alpha = \alpha_2$  un point ordinaire.

3. On généralise facilement.

III<sup>e</sup> cas. *Racines égales.* — Lorsque l'équation  $\frac{d^2\varphi}{dU_t^2} = 0$  admet une racine double:  $\alpha = \alpha_1$ ,  $\alpha_1$  annulera aussi  $\frac{d}{d\alpha} \frac{d^2\varphi}{dU_t^2}$  ou  $\frac{d^2\varphi}{dU_t dU_n}$  (voir *remarque*), sans annuler  $\frac{d^2\varphi}{dU_n^2}$ . Alors l'équation (15) ne contient pas le terme en  $\mu$ . On a plusieurs cas particuliers à distinguer:

1. *Point de rebroussement de première espèce:*  $\frac{d^3\varphi}{dU_t^3} \neq 0$ . — L'équation (15) donne pour  $\mu$  l'équation approchée

$$\mu^2 \frac{d^2\varphi}{dU_n^2} + \frac{\lambda}{3} \frac{d^3\varphi}{dU_t^3} = 0, \quad \mu = \mu_{1,2} = \pm \sqrt{-\frac{\lambda}{3} \left( \frac{d^3\varphi}{dU_t^3} : \frac{d^2\varphi}{dU_n^2} \right)}.$$

Alors on tire de (5)

$$\begin{cases} \overrightarrow{MM_1^1} = \overrightarrow{MO_1} + \overrightarrow{O_1M_1^1} = \lambda \vec{U}_t + \lambda \sqrt{-\frac{\lambda}{3} \left( \frac{d^3\varphi}{dU_t^3} : \frac{d^2\varphi}{dU_n^2} \right)} \vec{U}_n, \\ \overrightarrow{MM_2^1} = \overrightarrow{MO_2} + \overrightarrow{O_2M_2^1} = -\lambda \vec{U}_t - \lambda \sqrt{+\frac{\lambda}{3} (\dots)} \vec{U}_n, \\ \overrightarrow{MM_1^2} = \overrightarrow{MO_1} + \overrightarrow{O_1M_1^2} = \lambda \vec{U}_t - \lambda \sqrt{-\frac{\lambda}{3} (\dots)} \vec{U}_n, \\ \overrightarrow{MM_2^2} = \overrightarrow{MO_2} + \overrightarrow{O_2M_2^2} = -\lambda \vec{U}_t + \lambda \sqrt{+\frac{\lambda}{3} (\dots)} \vec{U}_n. \end{cases}$$

On voit donc que dans tous les cas il n'y aura que deux branches réelles, tangentes à la demi-droite  $\left\{ \begin{smallmatrix} MT \\ MT' \end{smallmatrix} \right.$ , lorsque  $-\frac{d^3\varphi}{dU_t^3} : \frac{d^2\varphi}{dU_n^2}$  est  $\begin{cases} > 0. \\ < 0. \end{cases}$

2. *Point isolé; point double ordinaire à tangentes confondues; point de rebroussement de deuxième espèce:*  $\frac{d^3\varphi}{dU_t^3} = 0$ ,  $\frac{d^4\varphi}{dU_t^4} \neq 0$ . —

Dans ce cas l'équation (15) donne

$$\mu^2 \frac{d^2\varphi}{dU_n^2} + \lambda \mu \frac{d^3\varphi}{dU_t^2 dU_n} + \frac{\lambda^2}{12} \frac{d^4\varphi}{dU_t^4} = 0, \quad \mu = \mu_{1,2} = (a \pm b) \lambda. \quad (17)$$

Nous avons trois cas à distinguer :

- a) *Racines imaginaires*. Dans ce cas nous avons un point isolé.  
 b) *Racines réelles distinctes*. Dans ce cas nous avons

$$\begin{cases} \overrightarrow{MM_1^1} = \overrightarrow{MO_1} + \overrightarrow{O_1M_1^1} = \lambda \vec{U}_t + (a+b) \lambda^2 \vec{U}_n, \\ \overrightarrow{MM_2^1} = \overrightarrow{MO_2} + \overrightarrow{O_2M_2^1} = -\lambda \vec{U}_t + (a+b) \lambda^2 \vec{U}_n, \\ \overrightarrow{MM_1^2} = \overrightarrow{MO_1} + \overrightarrow{O_1M_1^2} = \lambda \vec{U}_t + (a-b) \lambda^2 \vec{U}_n, \\ \overrightarrow{MM_2^2} = \overrightarrow{MO_2} + \overrightarrow{O_2M_2^2} = -\lambda \vec{U}_t + (a-b) \lambda^2 \vec{U}_n, \end{cases}$$

ce qui montre (§ 2, 1) que le point M est un point double ordinaire, les deux branches de la courbe étant tangentes à une même droite T'MT. Les deux branches sont situées du même côté de cette droite ou des deux côtés de cette droite, suivant que  $a+b$  et  $a-b$  sont du même signe ou de signes différents.

c) *Racines égales*. — Dans ce cas

$$\mu = \mu_{1,2} = a\lambda = -\frac{\lambda}{2} \frac{d^3\varphi}{dU_t^2 dU_n} : \frac{d^2\varphi}{dU_n^2}.$$

Alors l'équation (5) ne donne que *deux* points voisins de M, tandis qu'il faut qu'ils soient *quatre*. Dans ce cas il faut pousser l'approximation plus loin et retenir dans l'équation (15) des termes d'ordre supérieur. Nous avons

$$\frac{d^2\varphi}{dU_n^2} (\mu - \mu_1)^2 + \lambda \mu^2 \frac{d^3\varphi}{dU_t dU_n^2} + \frac{\lambda^2 \mu}{3} \frac{d^4\varphi}{dU_t^3 dU_n} + \frac{\lambda^3}{60} \frac{d^5\varphi}{dU_t^5} = 0.$$

En posant  $\mu = \mu_1 + \varepsilon = a\lambda + \varepsilon$ , on obtient pour  $\varepsilon$  les valeurs suivantes :

$$\varepsilon = \pm \lambda \sqrt{-\lambda \left[ a^2 \frac{d^3\varphi}{dU_t dU_n^2} + \frac{a}{3} \frac{d^4\varphi}{dU_t^3 dU_n} + \frac{1}{60} \frac{d^5\varphi}{dU_t^5} \right] : \frac{d^2\varphi}{dU_n^2}}.$$

Par conséquent  $\mu_{1,2} = \lambda(a \pm \sqrt{\lambda c})$ , où

$$a = -\frac{1}{2} \frac{d^3\varphi}{dU_t^2 dU_n} : \frac{d^2\varphi}{dU_n^2}$$

et

$$c = -\left[ a^2 \frac{d^3\varphi}{dU_t dU_n^2} + \frac{a}{3} \frac{d^4\varphi}{dU_t^3 dU_n} + \frac{1}{60} \frac{d^5\varphi}{dU_t^5} \right] : \frac{d^2\varphi}{dU_n^2}.$$

Alors l'équation (5) donne

$$\begin{cases} \overrightarrow{MM_1^1} = \overrightarrow{MO_1} + \overrightarrow{O_1M_1} = \lambda \vec{U}_t + \lambda^2 \left[ -\frac{1}{2} \frac{d^3\varphi}{dU_t^2 dU_n} : \frac{d^2\varphi}{dU_n^2} + \sqrt{\lambda c} \right] \vec{U}_n, \\ \overrightarrow{MM_2^1} = \overrightarrow{MO_2} + \overrightarrow{O_2M_2} = -\lambda \vec{U}_t + \lambda^2 [\dots\dots\dots + \sqrt{-\lambda c}] \vec{U}_n, \\ \overrightarrow{MM_1^2} = \overrightarrow{MO_1} + \overrightarrow{O_1M_1} = -\lambda \vec{U}_t + \lambda^2 [\dots\dots\dots - \sqrt{\lambda c}] \vec{U}_n, \\ \overrightarrow{MM_2^2} = \overrightarrow{MO_2} + \overrightarrow{O_2M_2} = -\lambda \vec{U}_t + \lambda^2 [\dots\dots\dots - \sqrt{-\lambda c}] \vec{U}_n. \end{cases}$$

On voit donc que, dans tous les cas, il n'y aura que deux branches réelles, tangentes à la demi-droite  $\left\{ \begin{smallmatrix} \overrightarrow{MT} \\ \overrightarrow{MT'} \end{smallmatrix} \right.$  lorsque  $c \begin{smallmatrix} > \\ < \end{smallmatrix} 0$ , et situés du même côté de cette demi-droite. On a par conséquent *un point de rebroussement de deuxième espèce*.

On généralise facilement, lorsque  $c = 0$ .

4. — *Points singuliers*:  $\overrightarrow{\text{grad}} \varphi = 0$ ,  $\overrightarrow{\text{grad}} (\vec{U}_t \overrightarrow{\text{grad}} \varphi) = 0$ . — Dans ce cas  $x$  et  $y$  annulent les dérivées partielles du I<sup>er</sup> et du II<sup>e</sup> ordres. Alors l'équation (15) ne contient pas les deux premiers termes et on obtient une équation, d'où l'on déduit l'équation suivante pour  $\alpha$ :

$$\frac{d^3\varphi}{dU_t^3} = 0$$

ou

$$\frac{\partial^3\varphi}{\partial x^3} \cos^3 \alpha + 3 \frac{\partial^3\varphi}{\partial x^2 \partial y} \cos^2 \alpha \sin \alpha + 3 \frac{\partial^3\varphi}{\partial x \partial y^2} \cos \alpha \sin^2 \alpha + \frac{\partial^3\varphi}{\partial y^3} \sin^3 \alpha = 0. \quad (18)$$

On aura ensuite l'équation suivante pour  $\mu$ :

$$\begin{aligned} 3\mu \frac{d^3\varphi}{dU_t^2 dU_n} + 3\mu^2 \frac{d^3\varphi}{dU_t dU_n^2} + \mu^3 \frac{d^3\varphi}{dU_n^3} + \\ + \frac{\lambda}{4} \left( \frac{d^4\varphi}{dU_t^4} + 4\mu \frac{d^4\varphi}{dU_t^3 dU_n} + \dots \right) + \frac{\lambda^2}{20} \left( \frac{d^5\varphi}{dU_t^5} + \dots \right) = 0. \end{aligned}$$

Lorsque les trois racines de (18) sont réelles et distinctes, on peut avoir un point ordinaire triple ou bien un point d'inflexion triple, etc. de tangentes distinctes. Lorsque l'équation (18) a une racine double, on peut avoir des points de rebroussement, etc.

La méthode à suivre est tout à fait analogue à celle suivie au § 3.



5. — *Remarque.* — Il est bien entendu que les résultats précédents ne sont valables que lorsque la fonction  $\varphi$  remplit les conditions nécessaires pour l'application de la formule de Taylor. Il peut arriver que la courbe (C) ait des points singuliers dus aux discontinuités de  $\varphi$  et de ses dérivées. La méthode précédente ne s'applique pas évidemment à ces points singuliers.

6. — *Applications.* — Nous ferons quelques applications de la théorie précédente pour étudier la portion d'une courbe par rapport à la tangente en un point singulier. Pour faire cela il faut avoir l'équation (6). On peut y arriver en exprimant que le point M, de coordonnées  $x + \Delta x$ ,  $y + \Delta y$  est situé sur la courbe (C); comme

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MM_1} &= \Delta x \vec{i} + \Delta y \vec{j} = \lambda \vec{U}_t + \lambda \mu \vec{U}_n = \\ &= \lambda (\cos \alpha - \mu \sin \alpha) \vec{i} + \lambda (\sin \alpha + \mu \cos \alpha) \vec{j},\end{aligned}$$

on est ramené à l'équation

$$\varphi [x + \lambda (\cos \alpha - \mu \sin \alpha), y + \lambda (\sin \alpha + \mu \cos \alpha)] = 0. \quad (19)$$

*Exemples :* 1°  $\varphi \equiv x^3 + y^3 - 3xy = 0$ . Point singulier  $x = 0$ ,  $y = 0$ . L'équation (19) est

$$\begin{aligned}\cos \alpha \sin \alpha + \mu (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) - \mu^2 \sin \alpha \cos \alpha - \lambda [\cos^3 \alpha + \sin^3 \alpha \\ + 3 \mu \cos \alpha \sin \alpha (\sin \alpha - \cos \alpha) + 3 \mu^2 \cos \alpha \sin \alpha (\sin \alpha + \cos \alpha) \\ + \mu^3 (\sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha)] = 0.\end{aligned}$$

L'angle  $\alpha$  est déterminé par l'équation  $\cos \alpha \cdot \sin \alpha = 0$ ; par conséquent  $\alpha_1 = 0$ ,  $\alpha_2 = \frac{\pi}{2}$ ;  $\vec{U}_{t_1} = \vec{i}$ ;  $\vec{U}_{t_2} = \vec{j}$ ;  $\vec{U}_{n_1} = \vec{j}$ ,  $\vec{U}_{n_2} = -\vec{i}$ . Nous avons un point double à tangentes distinctes. Pour déterminer la portion de la courbe par rapport à ces tangentes, on doit déterminer  $\mu$ ; on obtient

$$\mu = + \lambda \cdot \frac{\cos^3 \alpha + \sin^3 \alpha}{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}.$$

Pour  $\alpha_1 = 0$ ,  $\mu_1 = \lambda$ ; pour  $\alpha_2 = \frac{\pi}{2}$ ,  $\mu_2 = -\lambda$ . Alors

$$\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{MM_1^1} = \lambda \vec{i} + \lambda^2 \vec{j} , \\ \overrightarrow{MM_2^1} = -\lambda \vec{i} + \lambda^2 \vec{j} , \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{MM_1^2} = \lambda \vec{i} - \lambda^2 \vec{j} , \\ \overrightarrow{MM_2^2} = -\lambda \vec{i} - \lambda^2 \vec{j} . \end{array} \right.$$

Nous avons donc un point ordinaire double à deux tangentes distinctes.

2°  $\varphi = y^2 - 2yx^2 + x^4 - x^5 = 0$ . Point singulier  $x = 0$ ,  $y = 0$ . Equation (19) est

$$\sin^2 \alpha + 2\mu \sin \alpha \cos \alpha + \mu^2 \cos^2 \alpha - 2\lambda (\sin \alpha + \mu \cos \alpha) (\cos \alpha - \mu \sin \alpha)^2 + \lambda^2 (\cos \alpha - \mu \sin \alpha)^4 - \lambda^3 (\cos \alpha - \mu \sin \alpha)^5 = 0 .$$

d'où  $\sin^2 \alpha = 0$ ,  $\alpha = 0$  (racine double)  $\vec{U}_t = \vec{i}$ ,  $\vec{U}_n = \vec{j}$ .

Pour  $\alpha = 0$ , on a  $\mu^2 - 2\lambda\mu + \lambda^2 - \lambda^3 = 0$  ou  $(\mu - \lambda)^2 - \lambda^3 = 0$ , d'où  $\mu_{1,2} = \lambda \pm \lambda\sqrt{\lambda}$ .

On obtient

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MM_1^1} &= \lambda \vec{U}_t + \lambda^2 (1 + \sqrt{\lambda}) \vec{U}_n , \\ \overrightarrow{MM_2^2} &= \lambda \vec{U}_t - \lambda^2 (1 - \sqrt{\lambda}) \vec{U}_n . \end{aligned}$$

Par conséquent l'origine est un point de rebroussement de deuxième espèce.

3°  $\varphi \equiv y^5 + ax^4 - b^2xy^2 = 0$ . Point singulier  $x = 0$ ,  $y = 0$ . Equation (19):

$$\begin{aligned} \lambda^5 (\sin \alpha + \mu \cos \alpha)^5 + a\lambda^4 (\cos \alpha - \mu \sin \alpha)^4 - \\ - b^2 \lambda^3 (\cos \alpha - \mu \sin \alpha) (\sin \alpha + \mu \cos \alpha)^2 = 0 , \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} -b^2 \cos \alpha \sin^2 \alpha + \mu b^2 (\sin^3 \alpha - \sin \alpha \cos^2 \alpha) - \\ - \mu^2 b^2 (\cos^3 \alpha - 2 \sin^2 \alpha \cos \alpha) + \mu^3 b^2 \cos^2 \alpha \sin \alpha \\ + \lambda a (\cos \alpha - \mu \sin \alpha)^4 + \lambda^2 (\sin \alpha + \mu \cos \alpha)^5 = 0 , \end{aligned} \quad (20)$$

d'où l'on a  $\cos \alpha \sin^2 \alpha = 0$ , d'où  $\alpha_1 = \frac{\pi}{2}$ ,  $\alpha_{2,3} = 0$  (point triple).

Pour  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ , on a  $\vec{U}_t = \vec{j}$ ,  $\vec{U}_n = -\vec{i}$ . On a  $\mu b^2 + \lambda \mu^4 a + \lambda^2 = 0$ , d'où  $\mu = -\frac{\lambda^2}{b^2}$ ;

$$\overrightarrow{MM_1^1} = \lambda \vec{U}_t - \frac{\lambda^3}{b^2} \vec{U}_n = \lambda \vec{j} + \frac{\lambda^3}{b^2} \vec{i} , \quad \overrightarrow{MM_2^1} = -\lambda \vec{j} - \frac{\lambda^3}{b^2} \vec{i} .$$

Par conséquent nous avons une branche tangente à  $oy$  et traversant cette droite à l'origine (point d'inflexion).

Pour  $\alpha = 0$ , on a  $\vec{U}_t = \vec{i}$ ,  $\vec{U}_n = \vec{j}$ . L'équation (20) donne

$$-\mu^2 b^2 + \lambda a + \lambda^2 \mu^5 = 0 ,$$

d'où

$$-\mu^2 b^2 + \lambda a = 0 , \quad \mu_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{\lambda a}{b^2}} \quad (\lambda > 0) ;$$

$$\overrightarrow{MM_1^{1,2}} = \lambda \vec{i} \pm \lambda \sqrt{\frac{\lambda a}{b^2}} \vec{j} .$$

Par conséquent nous avons un point de rebroussement de première espèce, les deux branches de la courbe étant tangentes à l'axe des  $x$ .

7. — *Courbes d'équation*  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ; *points simples et points singuliers*. — Considérons une courbe plane (C) donnée par les équations paramétriques

$$x = x(t) , \quad y = y(t) , \quad (21)$$

ou par l'équation vectorielle

$$\overrightarrow{OM} = \vec{M}(t) \equiv x(t) \vec{i} + y(t) \vec{j} , \quad (21')$$

et soit M un point de cette courbe correspondant à la valeur  $t$  du paramètre. En supposant que pour cette valeur de  $t$  les dérivées  $\vec{M}'(t)$ ,  $\vec{M}''(t)$ , ...  $\vec{M}^{(p)}(t)$  de  $\vec{M}(t)$  sont continues, on peut appliquer la formule de Taylor pour la valeur  $t + \Delta t$  du paramètre à laquelle correspond un point de la courbe  $M_1$ , infiniment voisin de M, et l'on obtient

$$\overrightarrow{OM_1} = \vec{M}(t + \Delta t) = \overrightarrow{OM} + \frac{\Delta t}{1} \vec{M}' + \frac{\Delta t^2}{2!} \vec{M}'' + \dots + \frac{\Delta t^p}{p!} (\vec{M}^{(p)} + \vec{\varepsilon}) ,$$

$\vec{\varepsilon}$  étant infiniment petit avec  $\Delta t$ . On en déduit

$$\overrightarrow{MM_1} = \frac{\Delta t}{1} \vec{M}' + \frac{\Delta t^2}{2!} \vec{M}'' + \dots + \frac{\Delta t^p}{p!} (\vec{M}^{(p)} + \vec{\varepsilon}) . \quad (22)$$

Considérons la tangente (T) à la courbe (C) au point M; nous choisissons comme sens positif sur (T) celui du vecteur  $\vec{M}'$ . En désignant par  $\vec{U}_t$  le vecteur-unitaire de la tangente, nous avons

$$\vec{M}' = |\vec{M}'| \vec{U}_t ; \quad (23)$$

soit  $\alpha$  l'angle que fait  $\vec{U}_t$  avec  $ox$ . Nous choisirons comme sens positif de la normale (N) celui qui fait avec  $ox$  l'angle  $\alpha + \frac{\pi}{2}$ ; désignons par  $\vec{U}_n$  le vecteur-unitaire de la normale.

Nous avons (§ 1)

$$\overrightarrow{MM_1} = \overrightarrow{MO_1} + \overrightarrow{O_1M_1} = \lambda \vec{U}_t + \lambda \mu \vec{U}_n . \quad (24)$$

On tire de (22) et (24) l'équation

$$\lambda \vec{U}_t + \lambda \mu \vec{U}_n = \frac{\Delta t}{1} \vec{M}' + \frac{\Delta t^2}{2!} \vec{M}'' + \dots + \frac{\Delta t'^p}{p!} (\vec{M}^{(p)} + \vec{\varepsilon}) ,$$

d'où l'on tirera  $\lambda$  et  $\mu$  de la manière suivante: Faisons le produit scalaire des deux membres de cette équation par  $\vec{M}' = (\vec{M}') \vec{U}_t$ ; comme  $\vec{U}_t^2 = 1$ ,  $\vec{U}_t \vec{U}_n = 0$  nous obtenons

$$\lambda = \frac{1}{|\vec{M}'|} \left( \frac{\Delta t}{1} \vec{M}'^2 + \frac{\Delta t^2}{2!} \vec{M}' \vec{M}'' + \frac{\Delta t^3}{3!} \vec{M}' \vec{M}''' + \dots \right) . \quad (25)$$

Faisons maintenant le produit vectoriel par  $\vec{M}'$ ; comme  $\vec{U}_t \wedge \vec{U}_t = 0$ ,  $\vec{M}' \wedge \vec{M}' = 0$ , nous obtenons

$$\lambda \mu \vec{U}_t \wedge \vec{U}_n = \frac{1}{|\vec{M}'|} \left( \frac{\Delta t^2}{2} \vec{M}' \wedge \vec{M}'' + \frac{\Delta t^3}{3!} \vec{M}' \wedge \vec{M}''' + \dots \right) . \quad (26)$$

Désignons par  $\vec{k}$  un vecteur-unitaire normal au plan  $oxy$  et tel que le trièdre  $\vec{U}_t \vec{U}_n \vec{k}$  soit orienté comme le trièdre  $\vec{i} \vec{j} \vec{k}$ . Nous aurons

$$\vec{k} = \vec{U}_t \wedge \vec{U}_n = \vec{i} \wedge \vec{j} ; \quad \vec{k} (\vec{U}_t \wedge \vec{U}_n) = \vec{k} (\vec{i} \wedge \vec{j}) = 1 . \quad (27)$$

En faisant le produit scalaire des deux membres de (26) par  $\vec{k}$ , on obtient

$$\lambda \mu = \frac{1}{|\vec{M}'|} \left[ \frac{\Delta t^2}{2!} \vec{k} (\vec{M}' \wedge \vec{M}'') + \frac{\Delta t^3}{3!} \vec{k} (\vec{M}' \wedge \vec{M}''') + \dots \right] . \quad (27')$$

Alors (24) prend la forme

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MM_1} = \overrightarrow{MO_1} + \overrightarrow{O_1M_1} = \frac{1}{|\vec{M}'|} \left\{ \left[ \frac{\Delta t}{1} \vec{M}'^2 + \frac{\Delta t^2}{2!} \vec{M}' \vec{M}'' + \frac{\Delta t^3}{3!} \vec{M}' \vec{M}''' + \dots \right] \vec{U}_t \right. \\ \left. + \left[ \frac{\Delta t^2}{2!} \vec{k} (\vec{M}' \wedge \vec{M}'') + \frac{\Delta t^3}{3!} \vec{k} (\vec{M}' \wedge \vec{M}''') + \dots \right] \vec{U}_n \right\} . \end{aligned} \quad (28)$$

Le point M est appelé *point simple*, lorsque  $\vec{M}'(t)$  est  $\neq 0$ ; lorsque, au contraire,  $\vec{M}'(t)$  est nul, nous montrerons que M est un *point singulier*, à condition toutefois que l'ordre de la première dérivée qui ne s'annule pas pour  $t = t$  soit pair.

8. — *Point simple*:  $\vec{M}' \neq 0$ . — Lorsque le vecteur  $\vec{M}'$  est différent de zéro, il détermine la direction de la tangente au point M.

1. *Point ordinaire à courbure non nulle*:  $\vec{k}(\vec{M}' \wedge \vec{M}'') \neq 0$ . — Nous montrerons que, lorsque  $\vec{k}(\vec{M}' \wedge \vec{M}'') \neq 0$ , nous avons un point ordinaire à courbure non nulle (§ 2, 1). En effet, comme  $\Delta t$  est infiniment petit, l'équation (28) et l'équation obtenue en remplaçant  $\Delta t$  par  $-\Delta t$ , donnent

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MM_1} &= \overrightarrow{MO_1} + \overrightarrow{O_1M_1} = \frac{1}{|\vec{M}'|} \left\{ [\Delta t \cdot \vec{M}'^2] \vec{U}_t + \left[ \frac{\Delta t^2}{2!} \vec{k}(\vec{M}' \wedge \vec{M}'') \vec{U}_n \right] \right\} \\ \overrightarrow{MM_2} &= \overrightarrow{MO_2} + \overrightarrow{O_2M_2} = \frac{1}{|\vec{M}'|} \left\{ [-\Delta t \cdot \vec{M}'^2] \vec{U}_t + \left[ \frac{\Delta t^2}{2!} \vec{k}(\vec{M}' \wedge \vec{M}'') \vec{U}_n \right] \right\},\end{aligned}$$

d'où l'on déduit

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MO_1} &= -\overrightarrow{MO_2} = \Delta t |\vec{M}'| \vec{U}_t, \\ \overrightarrow{O_1M_1} &= \overrightarrow{O_2M_2} = \frac{\Delta t^2}{2!} \frac{\vec{k}(\vec{M}' \wedge \vec{M}'')}{|\vec{M}'|} \vec{U}_n.\end{aligned}$$

Ceci montre que, lorsque  $\vec{k}(\vec{M}' \wedge \vec{M}'') \neq 0$  on a un point ordinaire. Le signe de  $\vec{k}(\vec{M}' \wedge \vec{M}'') = x'y'' - y'x''$  détermine la position de la courbe par rapport à la tangente (T).

Nous montrerons que dans ce cas la courbure  $\frac{1}{\rho}$  n'est pas nulle. En effet, l'équation (23) donne

$$\vec{M}'' = |\vec{M}'| \frac{d\vec{U}_t}{dt} + \frac{d}{dt} |\vec{M}'| \cdot \vec{U}_t. \quad (29)$$

Mais  $\vec{U}_t = \frac{d\vec{M}}{ds}$ ,  $ds$  étant la différentielle de l'arc  $s$ . On peut

toujours supposer que  $s$  croît avec  $t$ ; dans ce cas on aura  $|\vec{M}'| = \frac{ds}{dt} > 0$  et de même

$$\frac{d\vec{U}_t}{dt} = \frac{d^2\vec{M}}{ds^2} \frac{ds}{dt} = \frac{1}{\rho} \vec{U}_n |\vec{M}'| = \frac{\varepsilon}{\rho} \vec{U}_n |\vec{M}'|, \quad \varepsilon = \pm 1.$$

En portant dans (29) nous obtenons

$$\vec{M}'' = \frac{\varepsilon}{\rho} |\vec{M}'|^2 \vec{U}_n + \frac{d}{dt} |\vec{M}'| \vec{U}_t.$$

En faisant le produit vectoriel avec  $\vec{M}' = |\vec{M}'| \vec{U}_t$  on obtient  $\vec{M}' \wedge \vec{M}'' = \frac{\varepsilon}{\rho} |\vec{M}'|^3 \vec{k}$ , d'où l'on déduit après multiplication par  $\vec{k}$ :

$$\frac{1}{\rho} = \varepsilon \frac{|\vec{k}(\vec{M}' \wedge \vec{M}'')|}{|\vec{M}'|^3}, \quad \vec{M}' \neq 0. \quad (30)$$

Comme  $\frac{1}{\rho}$  est  $> 0$ ,  $\varepsilon$  doit avoir le signe de  $\vec{k}(\vec{M}' \wedge \vec{M}'')$ . Par conséquent

$$\frac{1}{\rho} = \frac{|\vec{k}(\vec{M}' \wedge \vec{M}'')|}{|\vec{M}'|^3} = \frac{|x'y'' - y'x''|}{|x'^2 + y'^2|^{3/2}}.$$

2. *Point d'inflexion* :  $\vec{k}(\vec{M}' \wedge \vec{M}'') = 0$ ,  $\vec{k}(\vec{M}' \wedge \vec{M}''') \neq 0$ .  
— Supposons que, pour cette valeur de  $t$ , on ait

$$\vec{k}(\vec{M}' \wedge \vec{M}'') = 0, \quad x'y'' - y'x'' = 0, \quad (31)$$

c'est-à-dire que la courbure est nulle. Dans ce cas l'équation (28) nous donne

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MO_1} &= -\overrightarrow{MO_2} = \Delta t |\vec{M}'| \vec{U}_t, \\ \overrightarrow{O_1M_1} &= -\overrightarrow{O_2M_2} = \frac{\Delta t^3}{3!} \frac{\vec{k}(\vec{M}' \wedge \vec{M}''')}{|\vec{M}'|} \cdot \vec{U}_n. \end{aligned}$$

On a par conséquent (§ 2, 2) un point d'inflexion.

*Remarque.* — Comme  $\vec{M}' \neq 0$  pour que  $\vec{k}(\vec{M}' \wedge \vec{M}'')$  soit nul, il faut que  $\vec{M}''$  soit nul ou bien parallèle à  $\vec{M}'$ .

3. *Point ordinaire à courbure nulle* :  $\vec{k}(\vec{M}' \wedge \vec{M}'') = 0$ ,  $\vec{k}(\vec{M}' \wedge \vec{M}''') = 0$ ,  $\vec{k}(\vec{M}' \wedge \vec{M}^{(iv)}) \neq 0$ . — Les raisonnements sont analogues à ceux du § 2, 2.

4. On généralise facilement.

9. — *Courbe d'équation*  $y = y(x)$  (ou  $x = x(y)$ ). — On peut considérer ce cas comme un cas particulier de la théorie exposée aux § 7 et 8 ( $x = t$  ou bien  $y = t$ ).

10. — *Courbe d'équation*  $r = r(t)$ ,  $\theta = \theta(t)$  ( $r$  et  $\theta$  désignent les coordonnées polaires du point  $M$ ). — Alors l'équation vectorielle de la courbe (C) est

$$\overrightarrow{OM} = \vec{M}(t) \equiv r\vec{U}_r, \quad (32)$$

où

$$\vec{U}_r = \cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j} \quad (33)$$

représente le vecteur-unitaire de la droite  $\overrightarrow{OM}$ . En désignant par  $\vec{U}_p$  le vecteur-unitaire suivant

$$\vec{U}_p = \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)\vec{i} + \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)\vec{j} = -\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j}, \quad (34)$$

on aura

$$\vec{U}_r' = \theta' \vec{U}_p, \quad \vec{U}_p' = -\theta' \vec{U}_r. \quad (35)$$

Les valeurs de  $\vec{M}'$ ,  $\vec{M}''$ , ... qu'on doit porter dans (28), se calculent aisément à partir de (32), (33), (34):

$$\begin{aligned} \vec{M}' &= r' \vec{U}_r + r \theta' \vec{U}_p, \\ \vec{M}'' &= (r'' - r \theta'^2) \vec{U}_r + (r \theta'' + 2r' \theta') \vec{U}_p, \\ \vec{M}''' &= \dots \end{aligned}$$

Dans ce cas

$$\frac{1}{\rho} = \varepsilon \frac{\vec{k}(\vec{M} \wedge \vec{M}')}{|\vec{M}'|^3} = \varepsilon \frac{rr' \theta'' + 2r'^2 \theta' - rr'' \theta' + r^2 \theta'^3}{(r'^2 + r^2 \theta'^2)^{3/2}}.$$

Lorsque  $\theta = t$  on a  $\theta' = 1$ ,  $\theta'' = 0$ , ... et on obtient la formule bien connue pour  $\frac{1}{\rho}$ .

11. — *Point singulier*:  $\vec{M}' = 0$ ,  $\vec{M}'' \neq 0$ . — La valeur correspondante de  $t$  est donnée par l'équation

$$\vec{M}' = 0 \quad \text{ou} \quad x'(t) = 0, \quad y'(t) = 0. \quad (36)$$

Dans ce cas, pour déterminer la direction de la tangente, l'équation (22) donne le vecteur  $\vec{M}'' = |\vec{M}''| \vec{U}_t$ . L'équation (28) est remplacée par l'équation

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MM_1} = \overrightarrow{MO_1} + \overrightarrow{O_1M_1} = \frac{1}{|\vec{M}''|} \left\{ \left[ \frac{\Delta t^2}{2} \vec{M}''^2 + \frac{\Delta t^3}{3!} \vec{M}'' \vec{M}''' + \frac{\Delta t^4}{4!} \vec{M}'' \wedge \vec{M}^{IV} + \dots \right] \vec{U}_t \right. \\ \left. + \left[ \frac{\Delta t^3}{3!} \vec{k}(\vec{M}'' \wedge \vec{M}''') + \frac{\Delta t^4}{4!} \vec{k}(\vec{M}'' \wedge \vec{M}^{IV}) + \dots \right] \right\} \vec{U}_n. \end{aligned} \quad (37)$$

*Cas particulier*:

1. *Point de rebroussement de I<sup>re</sup> espèce*:  $\vec{k}(\vec{M}'' \wedge \vec{M}''') \neq 0$ . — L'équation (37) et l'équation obtenue en remplaçant  $\Delta t$  par  $-\Delta t$  donnent

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MO_1} = \overrightarrow{MO_2} = \frac{\Delta t^2}{2} |\vec{M}''| \vec{U}_t, \\ \overrightarrow{O_1M_1} = -\overrightarrow{O_2M_2} = \frac{\Delta t^3}{3!} \frac{\vec{k}(\vec{M}'' \wedge \vec{M}''')}{|\vec{M}''|} \vec{U}_n, \end{aligned}$$

d'où l'on déduit que lorsque

$$\vec{k}(\vec{M}'' \wedge \vec{M}''') = x'' y''' - y'' x''' \neq 0$$

on a un point de rebroussement de I<sup>re</sup> espèce (§ 3, III, 1).

2. *Point de rebroussement de II<sup>e</sup> espèce*:  $\vec{k}(\vec{M}'' \wedge \vec{M}''') = 0$ . — Dans ce cas on obtient facilement  $\vec{k}(\vec{M}'' \wedge \vec{M}^{IV}) \neq 0$ .

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MO_1} = \overrightarrow{MO_2} = \frac{\Delta t^2}{2} |\vec{M}''| \vec{U}_t, \\ \overrightarrow{O_1M_1} = \frac{\Delta t^4}{4! |\vec{M}''|} \left[ \vec{k}(\vec{M}'' \wedge \vec{M}^{IV}) + \frac{\Delta t}{5} \vec{k}(\vec{M}'' \wedge \vec{M}^V) \right] \vec{U}_n, \\ \overrightarrow{O_1M_2} = \frac{\Delta t^4}{4! |\vec{M}''|} \left[ \vec{k}(\vec{M}'' \wedge \vec{M}^{IV}) - \frac{\Delta t}{5} \vec{k}(\vec{M}'' \wedge \vec{M}^V) \right] \vec{U}_n, \end{aligned}$$



ce qui montre que nous avons un point de rebroussement de II<sup>e</sup> espèce (§ 3, III, 2).

3. On généralise aisément.

**12. — Cas général :**

$$\vec{M}' = 0 \ , \quad \vec{M}'' = 0 \ , \ \dots \ , \quad \vec{M}^{(p+1)} = 0 \ ,$$

$$\vec{M}^{(p)} \neq 0 , \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{k} (\vec{M}^{(p)} \wedge \vec{M}^{(p+1)}) = 0 , \\ \vec{k} (\vec{M}^{(p)} \wedge \vec{M}^{(p+2)}) = 0 , \\ . . . . . \\ \vec{k} (\vec{M}^{(p)} \wedge \vec{M}^{(p+q)}) = 0 . \end{array} \right.$$

Lorsque  $p$  est impair nous avons un point simple  $\left\{ \begin{array}{l} \text{ordinaire} \\ \text{d'inflexion,} \end{array} \right.$   
lorsque  $p + q$  est  $\left\{ \begin{array}{l} \text{pair} \\ \text{impair.} \end{array} \right.$  Lorsque  $p$  est pair nous avons un  
point de rebroussement de  $\left\{ \begin{array}{l} \text{I} \\ \text{II} \end{array} \right.$  espèce, lorsque  $p + q$  est  $\left\{ \begin{array}{l} \text{impair} \\ \text{pair} \end{array} \right.$ .

13. — *Autres espèces de points singuliers: points multiples (ordinaires et d'inflexion). Courbe d'équation  $\overrightarrow{OM} = M(t)$ . —* Lorsqu'il existe deux valeurs différentes de  $t$ :  $t_1$  et  $t_2$  auxquelles correspond un seul point  $M$ , c'est-à-dire si l'on a  $\overrightarrow{OM} = \vec{M}(t_1) = \vec{M}(t_2)$ , le point  $M$  est un point *double*. Pour étudier la courbe au voisinage de ce point, on considérera les vecteurs  $\vec{M}'(t_1)$  et  $\vec{M}'(t_2)$ . Lorsque  $\vec{M}'(t_1)$  et  $\vec{M}'(t_2)$  sont  $\neq 0$  et de directions différentes et si, en outre,  $\vec{k}(\vec{M}' \wedge \vec{M}'')$  ne s'annule pas pour  $t_1$  et  $t_2$ , le point  $M$  est un *point ordinaire double à tangentes distinctes*. Au contraire, lorsque  $\vec{k}(\vec{M}' \wedge \vec{M}'') = 0$  et  $\vec{k}(\vec{M}' \wedge \vec{M}''') \neq 0$  on a un *point d'inflexion double à tangentes distinctes*. Lorsque  $\vec{M}'(t_1) = \vec{M}'(t_2)$  on a un point (ordinaire ou d'inflexion) double, à une *tangente commune*. On généralise aisément pour les points triples, etc.

14. — *Courbe d'équation*  $r = f(\theta)$ . — Nous nous arrêterons un peu plus sur le cas particulier d'une courbe d'équation  $r = f(\theta)$  ou  $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{M(\theta)} \equiv r \vec{U}_r$ . Nous avons vu au § 12

que l'équation  $\overrightarrow{M'(\theta)} = 0$  donne les amplitudes des points de rebroussement. Nous supposons maintenant que  $\overrightarrow{M'(\theta)} \neq 0$ .

On voit facilement que, pour qu'il existe un point double  $M_1(r_1, \theta_1) \equiv M_2(r_2, \theta_2)$  ( $r_1 \neq 0, r_2 \neq 0$ ) il faut avoir:  $\theta_2 = \theta_1 + \pi$  ce qui donne

$$r_1 = f(\theta_1), \quad r_2 = f(\theta_1 + \pi); \quad (38)$$

par conséquent, il faut avoir  $r_1 = -r_2$ , ou bien

$$f(\theta_1) + f(\theta_1 + \pi) = 0.$$

Par conséquent, on obtiendra un seul point M de la courbe pour des valeurs  $\theta$  et  $\theta + \pi$  du paramètre, si  $\theta$  satisfait à l'équation

$$f(\theta) + f(\theta + \pi) = 0. \quad (39)$$

Si pour cette valeur de  $\theta$  on a  $M'(\theta) \neq 0$  et  $M'(\theta + \pi) \neq 0$ , on a un point double (ordinaire ou d'inflexion). Si l'équation (39) est une *identité* en  $\theta$ , alors on obtient pour  $\theta$  et  $\theta + \pi$  le même point, mais on voit facilement que ce point est *simple*.

Si  $f(\theta + \pi) = f(\theta)$ , l'équation (39) devient

$$f(\theta) = 0; \quad (40)$$

dans ce cas l'origine est un point multiple. A chaque racine  $\theta_i$  de l'équation (40) correspond une branche de courbe tangente au vecteur  $\overrightarrow{M'(\theta_i)} \neq 0$ .

*Remarques.* — Nous allons calculer les dérivées  $\overrightarrow{M'}, \overrightarrow{M''}, \overrightarrow{M'''}, \dots$  de  $\overrightarrow{M}(\theta)$  lorsque  $r = 0$ . Nous supposons d'abord que  $\overrightarrow{M'(\theta)} \neq 0$ . On aura:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{M'(\theta)} &= r' \vec{U}_r + r \vec{U}_p = r' \vec{U}_r, \\ \overrightarrow{M''(\theta)} &= (r'' - r) \vec{U}_r + 2r' \vec{U}_p = r'' \vec{U}_r + 2r' \vec{U}_p, \\ \overrightarrow{M'''(\theta)} &= (r''' - 3r') \vec{U}_r + (3r'' - r) \vec{U}_p = (r''' - 3r') \vec{U}_r + 3r'' \vec{U}_p, \\ \overrightarrow{M^{IV}(\theta)} &= (r^{IV} - 6r'' + r) \vec{U}_r + (4r''' - 4r') \vec{U}_p = \\ &= (r^{IV} - 6r'') \vec{U}_r + (4r''' - 4r') \vec{U}_p, \dots \end{aligned} \quad (41)$$

alors

$$\begin{aligned} \vec{k}(\overrightarrow{M'} \wedge \overrightarrow{M''}) &= 2r'^2, \quad \vec{k}(\overrightarrow{M'} \wedge \overrightarrow{M'''}) = 3r' r'', \\ \vec{k}(\overrightarrow{M'} \wedge \overrightarrow{M^{IV}}) &= 4(r' r'' - r'^2), \dots \end{aligned} \quad (42)$$

Nous supposons ensuite que  $\vec{M}'(\theta) = 0$ , alors  $r = 0$ ,  $r' = 0$ . Dans ce cas l'origine est un point de rebroussement, dont la tangente est donnée par le vecteur

$$\vec{M}''(\theta) = r'' \vec{U}_r. \quad (43)$$

Nous avons

$$\vec{k}(\vec{M}'' \wedge \vec{M}''') = 3r''^2. \quad (44)$$

Si l'on prend comme paramètre le rayon-vecteur  $r$ , on a pour  $r = 0$

$$\begin{aligned} \vec{M}'_{(r)} &= \vec{U}_r + r \theta'(r) \vec{U}_p = \vec{U}_r, \\ \vec{M}''(r) &= 2\theta' \vec{U}_p, \quad \vec{M}'''(r) = (\dots) \vec{U}_r + 3\theta''(r) \vec{U}_p, \dots \\ \vec{k}(\vec{M}' \wedge \vec{M}'') &= 2\theta'(r), \quad \vec{k}(\vec{M}' \wedge \vec{M}''') = 3\theta''(r). \end{aligned} \quad (45)$$

Ces formules sont utiles pour les applications.

### 15. — Applications. — 1. Conchoïde de l'ellipse :

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \theta} + h, \quad [e < 1, \quad p = a(1 - e^2)],$$

( $h$  pouvant être positif ou négatif).

I. Point singulier  $r = 0$ . Alors

$$\cos \theta = -\frac{h + p}{eh},$$

$$\sin \theta = \pm \sqrt{\frac{e^2 h^2 - (p + h)^2}{e^2 h^2}} = \pm \sqrt{1 - e^2} \sqrt{\frac{a^2 e^2 - (a + h)^2}{e^2 h^2}},$$

$\theta$  sera réel, si  $(a + h) \leq ae$ , c'est-à-dire si  $a(1 - e) \leq -h \leq a(1 + e)$ ,  $h < 0$ .

*Cas particuliers :* a) Lorsque  $-h < a(1 - e)$  ou  $-h > a(1 + e)$ ,  $\theta$  n'est pas réel et l'origine est un *point isolé*. Les extrema de  $r$  sont :  $r_{\min} = a(1 - e) + h > 0$ ,  $r_{\max} = a(1 + e) + h < 0$ , pour  $\theta = 0$  et  $\theta = \pi$ .

b) Lorsque  $a(1 - e) < -h < a(1 + e)$  l'équation admet deux racines  $\theta_1$  et  $\theta_2 = 2\pi - \theta_1$ . Nous avons

$$\vec{M}' = r' \vec{U}_r = \frac{e(\sin \theta \cos \theta \vec{i} + \sin^2 \theta \vec{j})}{(1 + e \cos \theta)^2}.$$

Comme  $\vec{k}(\vec{M}' \wedge \vec{M}'') = 2r'^2 > 0$ , on conclut que l'origine est un *point double ordinaire* à courbure non nulle; les deux branches étant tangentes aux vecteurs  $\vec{M}'(\theta_1)$  et  $\vec{M}'(\theta_2)$ , Les extrema de  $r$  sont:  $r_{\min} \leq 0$ ,  $r_{\max} > 0$ .

c)  $-h = a(1 - e)$  ou  $-h = a(1 + e)$  l'équation (46) admet la racine  $\theta = 0$  ou  $\pi$  respectivement. Dans ce cas  $\vec{M}'$  est nul. La direction de la tangente est donnée par le vecteur

$$\vec{M}''(0) = \frac{ep \vec{i}}{(1 + e)^2}, \quad \vec{M}''(\pi) = \frac{ep \vec{i}}{(1 - e)^2}.$$

Comme  $\vec{k}(\vec{M}'' \wedge \vec{M}''') = 3r'^2 \neq 0$ , on a un *point de rebroussement de I<sup>re</sup> espèce*. Les extrema de  $r$  sont: pour

$$\begin{cases} -h = a(1 - e), & r_{\min} = 0, & r_{\max} = 2ae \\ -h = a(1 + e), & r_{\min} = -2ae, & r_{\max} = 0. \end{cases}$$

d) Lorsque  $-h = p$  l'équation (46) admet les racines  $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$  et  $\theta_2 = \frac{3\pi}{2}$ . Alors  $\vec{M}' = \vec{j}$ . L'origine est un *point double ordinaire à une tangente commune*. Les extrema de  $r$  sont:  $r_{\min} = ae(e - 1) < 0$ ,  $r_{\max} = ae(1 + e) > 0$ .

II. *Points singuliers*  $r \neq 0$ . — L'équation (39) est

$$\frac{p}{1 + e \cos \theta} + \frac{p}{1 - e \cos \theta} + 2h = 0,$$

d'où

$$\cos^2 \theta = \frac{p + h}{e^2 h}, \quad \cos \theta = \pm \sqrt{\frac{1}{e^2} \left( \frac{p}{h} + 1 \right)};$$

$\theta$  sera réel si  $-a \leq h < 0$ .

Cas particuliers: a) —  $h < a$ . La racine de l'équation

$$\cos \theta = + \sqrt{\frac{1}{e^2} \left( \frac{p}{h} + 1 \right)}$$

est  $\theta_1$ . Alors pour  $\theta_1$  et  $\theta_1 + \pi$  on a le point singulier  $M_1(r_1, \theta_1)$ . Les tangentes sont données par le vecteur  $\vec{M}'$  pour  $\theta = \theta_1$  et  $\theta = \theta_1 + \pi$ . Comme  $\vec{M}(\theta_1) \neq \vec{M}'(\theta + \pi)$  on conclut que  $M_1(r_1, \theta_1)$  est un *point double à tangentes distinctes*.

On raisonnera de la même manière sur la racine  $\theta_2 = \pi - \theta_1$  de l'équation

$$\cos \theta = - \sqrt{\frac{1}{e^2} \left( \frac{p}{h} + 1 \right)}.$$

b) —  $h = a$ . Dans ce cas  $\theta_1 = 0$ ,  $\theta_2 = \pi$ ;  $\vec{M}'(0) = -ae\vec{j}$ ,  $\vec{M}'(\pi) = ae\vec{j}$ . On voit que le point  $M(r_3, \pi)$  est un *point double ordinaire à tangente commune*.

III. Lorsque  $h > 0$  l'origine est un point isolé et on n'a pas d'autres points singuliers.

2. *Lemniscate*:  $r^2 = a^2 \cos 2\theta$ . — On voit facilement que l'origine est le seul point singulier. On a  $\theta_1 = \frac{\pi}{4}$  et  $\theta_2 = \frac{3\pi}{4}$ .

Comme le vecteur  $\vec{M}'(\theta) = r' \vec{U}_r = -\frac{a^2 \sin 2\theta \vec{U}_r}{r}$  est infini pour  $\theta = \theta_1$  et  $\theta_2$ , la théorie précédente n'est applicable. Pour tourner la difficulté, nous prendrons comme paramètre  $t$  le rayon-vecteur  $r$ . Nous avons

$$\vec{OM} = \vec{M}(r) = r \vec{U}_r,$$

$$\vec{U}_r = \cos \theta(r) \vec{i} + \sin \theta(r) \vec{j},$$

d'où, pour  $r = 0$ ,

$$\vec{M}'(r) = \vec{U}_r + r \frac{d\theta}{dr} \vec{U}_p = \vec{U}_r = \cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}.$$

Alors pour  $\theta_1 = \frac{\pi}{4}$  nous avons

$$\vec{M}'(\theta_1) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\vec{i} + \vec{j}) ; \quad \text{pour} \quad \theta_2 = \frac{3\pi}{4},$$

$$\vec{M}'(\theta_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} (-\vec{i} + \vec{j}) .$$

Dans ce cas

$$\vec{M}'' = -r \left( \frac{d\theta}{dr} \right)^2 \vec{U}_r + \left( 2 \frac{d\theta}{dr} + r \frac{d^2\theta}{dr^2} \right) \vec{U}_p = 2 \frac{d\theta}{dr} \vec{U}_p$$

et

$$\vec{k}(\vec{M}' \wedge \vec{M}'') = 2 \frac{d\theta}{dr} = -\frac{2r}{a^2 \sin^2 \theta} = 0 .$$

En calculant

$$\vec{M}''' = (\dots) \vec{U}_r + 2 \frac{d^2\theta}{dr^2} \vec{U}_p$$

et

$$\vec{k}(\vec{M}' \wedge \vec{M}''') = 2 \frac{d^2\theta}{dr^2} = -\frac{2}{a^2 \sin 2\theta} ,$$

on voit que pour

$$\theta_1 = \frac{\pi}{4} , \quad \vec{k}(\vec{M}' \wedge \vec{M}'') = -\frac{1}{a^2} < 0$$

$$\theta = \frac{3\pi}{4} , \quad \vec{k}(\vec{M}' \wedge \vec{M}'') = \frac{1}{a^2} > 0 .$$

Par conséquent l'origine est un *point double d'inflexion à tangentes distinctes*.