**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
**Band:** 38 (1939-1940)
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** SUR DES COURBES SPÉCIALES DÉFINIES PAR DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES NON INTÉGRABLES
**Autor:** Turrière, E.
**Kapitel:** Autres courbes.
**DOI:** https://doi.org/10.5169/seals-515775

## Autres courbes.

18. — M. D. MITRINOVITCH s'est spécialement attaché à cette forme d'équations différentielles et en a étudié diverses applications [1].

M. AHMAD-VAZIRI [2] a donné un exemple de problème de géométrie réductible à l'équation de Liouville-Appell.

L'équation $\frac{dz}{du} = \frac{1 - z^2}{z + f(u)}$ de la *balistique extérieure* a été étudiée par M. J. DRACH [3], en application de sa méthode d'intégration logique.

19. — L'équation

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{y^2}{b}(y + 2ax)$$

et l'équation de Riccati

$$\frac{dx}{dt} = ax^2 + bt \ ,$$

$a$ et $b$ étant des coefficients constants sont équivalentes: il suffit de poser:

$$ax^2 + bt = \frac{b}{y} \ ;$$

par un changement de variables

$$x = \lambda\xi \ , \qquad t = \mu\tau \ ,$$

---

[1] D. MITRINOVITCH, Remarque sur une équation différentielle du premier ordre. *Publications mathématiques de l'Université de Belgrade*, 1934, t. III, p. 171-174.

Sur l'intégration d'une équation différentielle importante du premier ordre. *Bulletin de l'Académie royale des sciences serbe* (section A), 1936, p. 7-18.

Transformation et intégration d'une équation différentielle du premier ordre. *Publ. math. de l'Université de Belgrade*, 1936, t. V, p. 10-22.

Intégration d'une équation différentielle du premier ordre et polynômes d'Hermite qui s'y rattachent. *Revista de Ciencias*, Lima, nº 149, t. XXXVIII, 1937, p. 123-127.

Sur l'équation différentielle des lignes géodésiques des surfaces spirales. *C.R.*, 13 décembre 1937, t. 205, p. 1194.

Sur une équation différentielle du premier ordre intervenant dans divers problèmes de Géométrie. *Bulletin des sciences mathématiques*, 2me série, t. LXI, novembre 1937; *C.R.*, 7 juin 1937, t. 204, p. 1706.

Recherches sur les lignes asymptotiques. *Bulletin de l'Académie royale des sciences serbe*, 1938, nº 4, p. 105-120.

[2] ABOLGHASSEM AHMAD-VAZIRI, Sur quelques courbes liées au mouvement d'une courbe plane dans son plan. Thèse. Montpellier, 1938, p. 98.

[3] *Annales de l'Ecole normale supérieure*, (3), t. XXXVII, 1920, p. 1-96.

(à coefficients constants $\lambda$, $\mu$), l'équation de Riccati précédente prend la forme canonique

$$\frac{d\xi}{d\tau} + \xi^2 = \tau \,.$$

X. Stouff [1] a signalé qu'à cette équation spéciale était réductible la recherche d'une courbe admettant une parabole donnée pour lieu du centre d'une conique en contact du quatrième ordre avec la courbe.

Pour terminer, voici encore des courbes dépendant d'équations non intégrables de Riccati et de fonctions de Bessel.

20. — *La courbe du pendule de longueur variable.* — L'équation du pendule simple dont la longueur $l$ est une fonction donnée du temps est [2]

$$l\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\frac{dl}{dt}\frac{d\theta}{dt} + g\theta = 0 \,.$$

En posant $\theta l = \omega$, elle prend la forme

$$\frac{d^2\omega}{dt^2} = \frac{l'' - g}{l}\omega \;;$$

dans le cas du mouvement uniforme, elle se réduit par changement de variables à la forme

$$x\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0 \,.$$

C'est une équation de Bessel particulière.

Soit $\mathrm{OT}' = y - x\frac{dy}{dx}$, le segment de O$y$ limité en O et à la trace T′ de la tangente à la courbe $(x, y)$; cette équation exprime la condition

$$\frac{d}{dx}(\mathrm{OT}') = y \,.$$

[1] *Nouvelles Annales de Mathématiques* [4], t. II, 1902, p. 480.

[2] Bossut, Sur le mouvement d'un pendule dont la longueur est variable. *Mémoires de l'ancienne Académie des Sciences de Paris*, 1778.

Lecornu, Mémoire sur le pendule de longueur variable. *Acta Mathematica*, t. XIX, 1895, p. 201-249.

*Cours de Mécanique*, t. II, 1915, p. 39.

Sur le pendule à tige variable. *C. R.*, t. CXVIII, 1894, p. 132-134.

Haton de la Goupillière, Oscillations des bennes non guidées. *Annales des mines*, 1909.

Kyrille Popoff, Sur le pendule de longueur variable. *C. R.*, t. CLXVI, 1923, p. 655-658.

21. — Dans un mémoire sur la résolution numérique des équations différentielles [1], RUNGE prend pour exemple la méridienne de la surface d'une goutte liquide ou d'une bulle gazeuse.

La surface est définie par la condition

$$2z = a^2\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) ;$$

$a$ est une longueur constante. Dans le cas de la surface de révolution, la méridienne est définie par l'équation

$$2z = a^2\left(\frac{\sin\alpha}{x} + \cos\alpha\frac{d\alpha}{dx}\right) ,$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{dz}{dx} ,$$

dans le plan $Oxz$. Cette équation n'est pas intégrable. En introduisant le rayon R de courbure, elle prend la forme

$$2Rz = a^2\left(1 + \frac{R}{x}\sin\alpha\right) ;$$

par suite pour tout arc éloigné de l'axe de révolution $Oz$ et à pente faible sur $Ox$, la courbe est approximativement assimilable à une *courbe élastique:*

$$2Rz = a^2 .$$

D'autre part, si dans l'équation

$$2z = \frac{z'}{x\sqrt{1 + z'^2}} + \frac{z''}{\sqrt{(1 + z'^2)^3}} ,$$

les termes en $z'^2$ sont négligés (faibles pentes), on obtient l'équation linéaire

$$2z = \frac{z'}{x} + z'' ;$$

par changements de variables

$$z' = \frac{z}{x}Z , \qquad x = \frac{1}{\sqrt{2}}e^X$$

[1] C. RUNGE, Ueber die numerische Auflösung von Differentialgleichungen. *Math. Ann.*, 1895, t. XLVI, p. 167-178.

elle devient l'équation de Riccati:

$$\boxed{\frac{dZ}{dX} + Z^2 = e^{2X}}$$

intégrable par les fonctions de Bessel d'indice zéro: il suffit de poser $t = ie^X$ pour effectuer la réduction de l'équation équivalente.

22. — C'est de cette même équation de Riccati que dépend la détermination des courbes du complexe linéaire

$$x\,dy - y\,dx = k\,dz\ ,$$

sur les surfaces cerclées représentées paramétriquement par les équations:

$$x = V \cos u \cos v\ ,$$
$$y = V \cos u \sin v\ ,$$
$$z = V \sin u\ ,$$

où $V = e^{av}$. Les cercles ont l'origine O pour centre et l'axe $Oz$ pour diamètre. Les courbes du complexe linéaire, lorsque V est une fonction quelconque de $v$ ont pour équation

$$k\frac{dz}{dv} + z^2 = V^2\ .$$

Pour $k = 1$, $a = 1$, c'est l'équation du paragraphe précédent.

Les lignes de courbure des surfaces considérées, dans l'hypothèse $V = e^{av}$, se déterminent par quadrature elliptique. Elles ont pour équation

$$u' \pm v = \text{const.}$$

dans la représentation conforme:

$$ds^2 = e^{2av}(a^2 + \cos^2 u)(du'^2 + dv^2)$$

$$u' = \int \frac{du}{\sqrt{a^2 + \cos^2 u}}\ .$$