Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 38 (1939-1940)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR DES COURBES SPÉCIALES DÉFINIES PAR DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES NON INTÉGRABLES

Autor: Turrière, E.

Kapitel: Sur une généralisation des podaires.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-515775

Dans le cas de M constant, les variables δ et Φ sont séparées. Par suite, *dans le cas du cercle et de la spirale logarithmique, le problème inverse du problème des lignes de poursuite est réductible à une intégrale de fonction rationnelle.*

En particulier, pour $M = k$, l'équation

$$2\frac{dT}{d\Phi} = (1 + T^2)(1 - kT) \ ,$$

est identique à celle rencontrée plus haut (paragraphe 8, cas f_1 constante).

Sur une généralisation des podaires.

17. — Soit une courbe donnée (C) du plan, $m(x, y)$ son point courant; sur la tangente en m est pris un point $M(x, y)$,

$$X = x + \lambda\frac{dx}{ds} = x + \lambda x' \ , \qquad Y = y + \lambda\frac{dy}{ds} = y + \lambda y' \ ,$$

à la distance $\lambda = m\mathrm{M}$ de M; elle sera considérée comme une fonction $\lambda(s)$ de l'abscisse curviligne.

La normale en M à la courbe (Γ) décrite par ce point, pour un choix de $\lambda(s)$, rencontre la normale en m de (C) en un point P de coordonnées

$$\xi = x + \rho y' \ , \qquad \eta = y - \rho x' \ ,$$

$$\rho = \frac{1 + \lambda'}{y'x'' - x'y''} \ .$$

R étant le rayon de courbure en m de la courbe (C):

$$\rho = \mathrm{R}(1 + \lambda') \ .$$

La déviation des normales

$$\delta = \widehat{m\mathrm{P}\mathrm{M}} \ ,$$

est donnée par la relation

$$\cot\mathrm{g}\,\delta = \frac{\rho}{\lambda} = \mathrm{R}\cdot\frac{1 + \lambda'}{\lambda} \ .$$

Ces formules connues étant rappelées, cherchons à déterminer $\lambda(s)$ par la condition suivante: *la normale en* M *à la courbe* (Γ) *décrite par ce point rencontre le rayon polaire* Om *en son milieu.*

La courbe (C) étant définie comme enveloppe de sa tangente

$$x \cos \varphi + y \sin \varphi = \varpi$$

où ϖ est une fonction donnée de sa tangente, la condition se présente sous la forme

$$\boxed{\frac{\varpi}{z'} - \frac{\varpi'}{z} = 2}$$

ou

$$z' = \frac{\varpi z}{2z + \varpi'} ;$$

l'inconnue z est définie par

$$\lambda = z + \varpi' ; \qquad \varpi' = \frac{d\varpi}{d\varphi} ; \qquad z' = \frac{dz}{d\varphi} .$$

L'intégrale évidente $z = 0$, $\lambda = \varpi'$, correspond au cas où M est la projection de O sur la tangente de (C). C'est la *propriété des normales aux podaires* de passer par le milieu du rayon vecteur Om.

L'équation différentielle se ramène à la forme

$$\frac{dZ}{d\varphi} = \varpi\varpi' Z^3 - (\varpi + \varpi'') Z^2 ,$$

par le changement d'inconnue

$$2z + \varpi' = \frac{1}{Z} .$$

Soit R le rayon de courbure de (C)

$$R = -(\varpi + \varpi'') .$$

Le changement de variable

$$\varpi^2 = 2\Phi$$

réduit l'équation à sa forme canonique

$$\frac{dZ}{d\Phi} = Z^2(Z + P)$$

avec

$$P = \frac{R}{\varpi\varpi'} .$$