

Zeitschrift:	L'Enseignement Mathématique
Herausgeber:	Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band:	38 (1939-1940)
Heft:	1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE
Artikel:	SUR DES COURBES SPÉCIALES DÉFINIES PAR DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES NON INTÉGRABLES
Autor:	Turrière, E.
Kapitel:	problème général des lignes de poursuite dans le plan.
DOI:	https://doi.org/10.5169/seals-515775

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 13.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Le problème général des lignes de poursuite dans le plan.

14. — Autant les lignes de poursuite de la droite ont donné lieu à une abondante littérature, autant la même question pour d'autres courbes que la droite a été délaissée. La raison en est que, dès le cas du cercle, l'équation différentielle des lignes de poursuite cesse d'être intégrable¹.

La courbe (C) étant définie par sa tangente en M

$$x \cos \varphi + y \sin \varphi = \varpi ,$$

soit

$$X \cos \Phi + Y \sin \Phi = \Pi$$

$$\Phi = \varphi + \delta , \quad \Pi = \varpi \cos \delta + \varpi' \sin \delta ,$$

$$\varpi' = \frac{d\varpi}{d\varphi} ,$$

l'équation d'une droite Δ quelconque passant par le point M(x, y) de (C). L'enveloppe (Γ) de Δ , pour un choix déterminé d'une fonction $\delta(\varphi)$, est touchée par Δ au point μ de coordonnées

$$\xi = x - r \sin \Phi , \quad \eta = y + r \cos \Phi ;$$

dans ces formules,

$$r = \rho \frac{\sin \delta}{1 + \delta} .$$

r représente la distance $M\mu$. Les rayons de courbure ρ et R de (C) en M et (Γ) en μ sont:

$$\rho = \varpi + \varpi'' , \quad R = \Pi + \frac{d^2 \Pi}{d\Phi^2} ;$$

$$R(1 + \delta') = \rho \cos \delta + \frac{dr}{d\varphi} ;$$

¹ L. DUNOYER, Sur les courbes de poursuite d'un cercle. *Nouvelles Annales de Mathématiques* [4], t. VI, 1906, p. 193-222.

F. MORLEY, A curve of pursuit. *American Math. Monthly*, t. XXVIII, 1921.

F. MORLEY, The curve of ambience, *American journal of mathematics*, t. XLVI, 1924, p. 193-200.

Emile TURRIÈRE, De l'intégration des équations des problèmes de poursuite et d'ambiance en géométrie plane. *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. LXV, 1937, p. 168-174.

les arcs correspondants ds de (C) et dS de (Γ) sont liés par la relation connue:

$$dS = dr + ds \cdot \cos \delta .$$

$$\frac{r}{R} = \sin \delta \cdot \frac{ds}{dS} .$$

Cela étant, la condition

$$dS = k ds , \quad k = \text{const.} ,$$

exprime que (Γ) est une ligne de poursuite de (C). D'où

$$k = \cos \delta + \frac{dr}{ds} .$$

L'équation générale du problème des courbes de poursuite est donc

$$(k - \cos \delta) \rho = \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{\rho \sin \delta}{1 + \delta'} \right) .$$

δ est la fonction inconnue; ρ est une fonction connue de φ , variable qui n'intervient que par

$$\frac{\rho'}{\rho} = \operatorname{tg} V .$$

Cette équation est du second ordre.

Supposons que

$$\frac{\rho'}{\rho} = m , \quad m = \text{const.} ;$$

la courbe (C) est alors une spirale logarithmique et, dans le cas plus particulier $m = 0$ un cercle; alors φ est absente dans l'équation différentielle du second ordre

$$\frac{\delta''}{1 + \delta'} \sin \delta + \delta'' (k - 2 \cos \delta) = m \sin \delta + \cos \delta - k ;$$

et cette absence permet de mettre l'équation sous la forme d'une équation du premier ordre:

$$1 + \delta' = 1 - \frac{1}{Z} , \quad Z = 1 + \mu \sin \delta , \quad r = \rho \left(\sin \delta + \frac{1}{\mu} \right) ,$$

$$\sin \delta \cdot \frac{dZ}{d\delta} + Z (Z - 1) [Z (\cos \delta + m \sin \delta - k) + k - 2 \cos \delta] = 0 .$$

$$\frac{d\mu}{d\delta} + \mu^2 [\mu \sin \delta (\cos \delta - k) - k] = 0 .$$

A la solution $z = 1$, correspond $\mu = 0$.

A la solution $z = 0$ correspond

$$\mu = -\frac{1}{\sin \delta}, \quad r = 0.$$

Il suffit finalement de poser

$$\begin{aligned} \mu &= \Omega \cdot e^{-m\delta}, \\ \Delta &= \int e^{-2m\delta} (k - \cos \delta - m \sin \delta) \sin \delta \, d\delta \\ &= e^{-2m\delta} \left[\frac{2m \sin 2\delta + (1 - m^2) \cos 2\delta}{4(1 + m^2)} - \frac{k}{1 + 4m^2} (2m \sin \delta + \cos \delta) + \frac{m}{4} \right] \end{aligned}$$

pour réduire cette équation à sa forme canonique

$$\begin{aligned} \frac{d\Omega}{d\Delta} &= \Omega^3 + P\Omega^2, \\ P &= \frac{k - 2m \sin \delta}{(k - \cos \delta - m \sin \delta) \sin \delta} e^{m\delta}. \end{aligned}$$

Il résulte, de cette analyse, que *le problème général des lignes de poursuite se simplifie dans le cas du cercle et de la spirale logarithmique et que, dans ces cas, l'équation non intégrable est du type Liouville-Appell*.

15. — L'équation donnée par M. L. DUNOYER, dans la note citée plus haut, pour les lignes de poursuite du cercle

$$\frac{dx}{y(x^2 - 1)} = \frac{dy}{(y - a)[2xy - ax + by - bx]},$$

dans le cas $a + b \neq 0$ de non-séparation des variables, se ramène à

$$\frac{dZ}{dX} = Z^3 + PZ^2,$$

en posant

$$\frac{1}{y} = \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^{\frac{b}{2}} \cdot \frac{Z}{x^2 - 1} = UZ,$$

$$dX = -a(a+b)U^2 \frac{x \, dx}{x^2 - 1},$$

$$P = -\frac{(3a+b)x + ab}{a(a+b)Ux}.$$

16. — *Le problème inverse du problème des lignes de poursuite.*

— La fonction $R(\Phi)$, caractéristique de la courbe donnée (Γ) est connue. L'élimination de δ entre les conditions

$$\sin \delta = k \cdot \frac{r}{R}, \quad \cos \delta = k \left(1 - \frac{dr}{dS} \right),$$

donne l'équation différentielle

$$\frac{r^2}{R^2} + \left(\frac{dr}{dS} - 1 \right)^2 = \frac{1}{k^2};$$

$$\boxed{r^2 + \left(\frac{dr}{d\Phi} - R \right)^2 = \frac{R^2}{k^2}},$$

où r est l'inconnue. C'est encore une équation non intégrable du premier ordre.

L'élimination de r donne l'équation en δ

$$\cos \delta \cdot \frac{d\delta}{d\Phi} = k - \cos \delta - M \sin \delta$$

où M est une fonction connue de φ : $M = \frac{R'}{R}$.

Avec la nouvelle inconnue t :

$$t = \operatorname{tg} \frac{\delta}{2}.$$

L'équation prend la forme:

$$2 \frac{dt}{d\Phi} = \frac{1 + t^2}{1 - t^2} \left[(k + 1)t^2 - 2Mt + k - 1 \right].$$

La dérivée $\frac{dt}{d\Phi}$ est égale à une fonction rationnelle de t dont le degré du numérateur dépasse de deux unités celui du dénominateur: c'est un type d'équations étudiées par P. APPELL.

En posant

$$t = \frac{1 - T}{1 + T}, \quad T = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\delta}{2} \right),$$

il vient:

$$4 \frac{dT}{d\Phi} = - \frac{1 + T^2}{T} \left[(k + M)T^2 - 2T + k - M \right].$$

Dans le cas de M constant, les variables δ et Φ sont séparées. Par suite, *dans le cas du cercle et de la spirale logarithmique, le problème inverse du problème des lignes de poursuite est réductible à une intégrale de fonction rationnelle.*

En particulier, pour $M = k$, l'équation

$$2 \frac{dT}{d\Phi} = (1 + T^2)(1 - kT) ,$$

est identique à celle rencontrée plus haut (paragraphe 8, cas f_1 constante).

Sur une généralisation des podaires.

17. — Soit une courbe donnée (C) du plan, $m(x, y)$ son point courant; sur la tangente en m est pris un point $M(x, y)$,

$$X = x + \lambda \frac{dx}{ds} = x + \lambda x' , \quad Y = y + \lambda \frac{dy}{ds} = y + \lambda y' ,$$

à la distance $\lambda = mM$ de M ; elle sera considérée comme une fonction $\lambda(s)$ de l'abscisse curvilinear.

La normale en M à la courbe (Γ) décrite par ce point, pour un choix de $\lambda(s)$, rencontre la normale en m de (C) en un point P de coordonnées

$$\begin{aligned} \xi &= x + \rho y' , \quad \eta = y - \rho x' , \\ \rho &= \frac{1 + \lambda'}{y' x'' - x' y''} . \end{aligned}$$

R étant le rayon de courbure en m de la courbe (C):

$$\rho = R(1 + \lambda') .$$

La déviation des normales

$$\delta = \widehat{mPM} ,$$

est donnée par la relation

$$\cotg \delta = \frac{\rho}{\lambda} = R \cdot \frac{1 + \lambda'}{\lambda} .$$

Ces formules connues étant rappelées, cherchons à déterminer $\lambda(s)$ par la condition suivante: *la normale en M à la courbe (Γ) décrite par ce point rencontre le rayon polaire Om en son milieu.*