Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 38 (1939-1940)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR DES COURBES SPÉCIALES DÉFINIES PAR DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES NON INTÉGRABLES

Autor: Turrière, E.

Kapitel: courbe atuptique.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-515775

9. — Comme courbes se rattachant à cette équation, il y a lieu de citer les deux suivantes:

I. Soient N et T′ les traces respectives sur les axes Ox et Oy de la normale MN et de la tangente MTT′ d'une courbe (C).

La condition NT′ = 1 caractérise des courbes (C) telles que

$$r = \cos\alpha \ ,$$
$$\mathrm{MN} = \sin\theta \ , \qquad \mathrm{ON} = \sin\widehat{\mathrm{OMN}} \ ;$$

le cercle circonscrit au triangle OMN a pour diamètre NT′ = 1.

L'équation des courbes est:

$$\varpi^2 + \left(\frac{d\varpi}{d\alpha}\right)^2 = \cos^2\alpha$$

ϖ étant la distance du pôle O à la tangente d'inclinaison α sur Ox.

II. L'équation de Riccati

$$\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2 \ ,$$

est équivalente à

$$r^2 = \operatorname{tg}\alpha \ .$$

La courbe atuptique.

10. — J. Porro a donné le nom de courbe *atuptique* à l'intégrale de l'équation différentielle

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x(x^2+y^2) + 2ay\sqrt{x^2+y^2-a^2}}{y(x^2+y^2) + 2ax\sqrt{x^2+y^2-a^2}} \ .$$

Ce serait la forme théoriquement assignée aux aubes destinées aux moteurs hydrauliques [1].

---

[1] J. Porro, *Essai sur la théorie des moteurs hydrauliques.* Turin, 1844, p. 29.
Théorie générale des moteurs hydrauliques. *C. R.*, 1852, t. XXXIV, p. 172-174.
H. Brocard, *Notes de bibliographie des courbes géométriques*, 1897, p. 66.
G. Loria, *Curve piane speciali*, I, 1930, p. 118.
Le nom dérive de τύπτω = je frappe de près (par opposition à βάλλω). C'est la courbe *sans choc.*

L'équation différentielle n'a pu être intégrée. Donnée sans démonstration par PORRO dans sa communication de 1852, elle a été relevée d'après cette communication. Mais si l'on se reporte à l'opuscule de 1844, on constatera l'existence de deux erreurs dans les formules trigonométriques (de la page 28) qui faussent entièrement l'équation indiquée [1].

11. — Etudions l'équation différentielle telle qu'elle a été considérée jusqu'à présent. En coordonnées polaires elle prend la forme

$$d(r^2 \cos 2\theta) = 2c\sqrt{r^2 - a^2}\, d\theta$$

où $c = 2a$.

Pour $c = 0$, cette équation représente des hyperboles équilatères. Pour $a = 0$, $c \neq 0$, l'équation

$$d(r^2 \cos 2\theta) = 2cr \cdot d\theta$$

est linéaire en r et admet l'intégrale générale

$$r\sqrt{\cos 2\theta} = c \int \frac{d\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}} + \text{const.}$$

dépendant d'une intégrale elliptique (du cas lemniscatique $g_3 = 0$).

Dans le cas général, en posant

$$r^2 = a^2 + \frac{1}{z^2},$$

on met l'équation sous la forme

$$\cos 2\theta \cdot \frac{dz}{d\theta} + a^2 \sin 2\theta \cdot z^3 + cz^2 + z \sin 2\theta = 0 .$$

Sans restriction de la généralité de la question, la constante a peut être prise égale à l'unité. La réduction à la forme type

$$\frac{dZ}{d\Theta} = Z^3 + J ,$$

[1] Voir à ce sujet ma note « Sur diverses courbes planes » des *Anais da Faculdade de Ciencias do Porto*, 1937, t. XXII, p. 93-129, 145-150.

se fait par les formules

$$\frac{d\Theta}{d\theta} = \mathrm{M} \,, \qquad z = \mathrm{UZ} + \mathrm{V} \,,$$

avec

$$\mathrm{U}^2 = \cos 2\theta \cdot \operatorname{tang}^{\frac{c^2}{3}} 2\theta \,, \qquad \mathrm{V} = -\frac{c}{3} \cdot \frac{1}{\sin 2\theta} \,,$$

$$\mathrm{M} = -\mathrm{U}^2 \operatorname{tang} 2\theta \,,$$

$$27\,\mathrm{U}^3 \sin^3 2\theta \cdot \frac{\mathrm{J}}{c} = 2(c^2 + 9) - 27 \sin^2 2\theta \,.$$

12. — L'équation ayant une intégrale évidente ($z = 0$) peut être réduite à la forme canonique

$$\frac{d\mathrm{Z}}{d\mathrm{X}} = \mathrm{Z}^3 + \mathrm{P} \cdot \mathrm{Z}^2 \,;$$

il suffit de poser pour le cas $c = 2$, $a = 1$ de la courbe de Porro:

$$z = \sqrt{\cos 2\theta} \cdot \mathrm{Z} \,,$$

$$\cos 2\theta = 2\mathrm{X} \,,$$

$$\mathrm{P} = \sqrt{\frac{2}{\mathrm{X}(1 - 4\mathrm{X}^2)}} \,.$$

13. — Les trajectoires orthogonales des courbes atuptiques, intégrales de la même équation différentielle pour une valeur donnée de a, ont pour équation

$$xy + c\int \sqrt{r^2 - a^2} \cdot \frac{dr}{r} = 0 \,;$$

elles sont déterminées par les formules paramétriques:

$$r = \frac{a}{\cos\varphi} \,,$$

$$\sin 2\theta = 2\frac{c}{a} \cos^2\varphi\,(\varphi - \operatorname{tang}\varphi) + \mathrm{A}\cos^2\varphi \,,$$

avec une constante arbitraire A.