

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 38 (1939-1940)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** SUR DES COURBES SPÉCIALES DÉFINIES PAR DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES NON INTÉGRABLES  
**Autor:** Turrière, E.  
**Kapitel:** courbe atuptique.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-515775>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 01.10.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

9. — Comme courbes se rattachant à cette équation, il y a lieu de citer les deux suivantes :

I. Soient N et T' les traces respectives sur les axes Ox et Oy de la normale MN et de la tangente MTT' d'une courbe (C).

La condition  $NT' = 1$  caractérise des courbes (C) telles que

$$r = \cos \alpha , \\ MN = \sin \theta , \quad ON = \sin \widehat{OMN} ;$$

le cercle circonscrit au triangle OMN a pour diamètre  $NT' = 1$ .

L'équation des courbes est :

$$\omega^2 + \left( \frac{d\omega}{d\alpha} \right)^2 = \cos^2 \alpha$$

$\omega$  étant la distance du pôle O à la tangente d'inclinaison  $\alpha$  sur Ox.

II. L'équation de Riccati

$$\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2 ,$$

est équivalente à

$$r^2 = \operatorname{tg} \alpha .$$

### La courbe atuptique.

10. — J. PORRO a donné le nom de courbe *atuptique* à l'intégrale de l'équation différentielle

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x(x^2 + y^2) + 2ay \sqrt{x^2 + y^2 - a^2}}{y(x^2 + y^2) + 2ax \sqrt{x^2 + y^2 - a^2}} .$$

Ce serait la forme théoriquement assignée aux aubes destinées aux moteurs hydrauliques <sup>1</sup>.

<sup>1</sup> J. PORRO, *Essai sur la théorie des moteurs hydrauliques*. Turin, 1844, p. 29.

Théorie générale des moteurs hydrauliques. C. R., 1852, t. XXXIV, p. 172-174.

H. BROCARD, *Notes de bibliographie des courbes géométriques*, 1897, p. 66.

G. LORIA, *Curve piane speciali*, I, 1930, p. 118.

Le nom dérive de τύπτω = je frappe de près (par opposition à βάλλω). C'est la courbe sans choc.

L'équation différentielle n'a pu être intégrée. Donnée sans démonstration par PORRO dans sa communication de 1852, elle a été relevée d'après cette communication. Mais si l'on se reporte à l'opuscule de 1844, on constatera l'existence de deux erreurs dans les formules trigonométriques (de la page 28) qui faussent entièrement l'équation indiquée <sup>1</sup>.

11. — Etudions l'équation différentielle telle qu'elle a été considérée jusqu'à présent. En coordonnées polaires elle prend la forme

$$d(r^2 \cos 2\theta) = 2c \sqrt{r^2 - a^2} d\theta$$

où  $c = 2a$ .

Pour  $c = 0$ , cette équation représente des hyperboles équilatères. Pour  $a = 0$ ,  $c \neq 0$ , l'équation

$$d(r^2 \cos 2\theta) = 2cr \cdot d\theta$$

est linéaire en  $r$  et admet l'intégrale générale

$$r \sqrt{\cos 2\theta} = c \int \frac{d\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}} + \text{const.}$$

dépendant d'une intégrale elliptique (du cas lemniscatique  $g_3 = 0$ ).

Dans le cas général, en posant

$$r^2 = a^2 + \frac{1}{z^2},$$

on met l'équation sous la forme

$$\cos 2\theta \cdot \frac{dz}{d\theta} + a^2 \sin 2\theta \cdot z^3 + cz^2 + z \sin 2\theta = 0.$$

Sans restriction de la généralité de la question, la constante  $a$  peut être prise égale à l'unité. La réduction à la forme type

$$\frac{dZ}{d\Theta} = Z^3 + J,$$

<sup>1</sup> Voir à ce sujet ma note « Sur diverses courbes planes » des *Anais da Faculdade de Ciencias do Porto*, 1937, t. XXII, p. 93-129, 145-150.

se fait par les formules

$$\frac{d\Theta}{d\theta} = M, \quad z = UZ + V,$$

avec

$$U^2 = \cos 2\theta \cdot \operatorname{tang}^{\frac{c^2}{3}} 2\theta, \quad V = -\frac{c}{3} \cdot \frac{1}{\sin 2\theta},$$

$$M = -U^2 \operatorname{tang} 2\theta,$$

$$27 U^3 \sin^3 2\theta \cdot \frac{J}{c} = 2(c^2 + 9) - 27 \sin^2 2\theta.$$

12. — L'équation ayant une intégrale évidente ( $z = 0$ ) peut être réduite à la forme canonique

$$\frac{dZ}{dX} = Z^3 + P \cdot Z^2;$$

il suffit de poser pour le cas  $c = 2$ ,  $a = 1$  de la courbe de PORRO:

$$z = \sqrt{\cos 2\theta} \cdot Z,$$

$$\cos 2\theta = 2X,$$

$$P = \sqrt{\frac{2}{X(1 - 4X^2)}}.$$

13. — Les trajectoires orthogonales des courbes atuptiques, intégrales de la même équation différentielle pour une valeur donnée de  $a$ , ont pour équation

$$xy + c \int \sqrt{r^2 - a^2} \cdot \frac{dr}{r} = 0;$$

elles sont déterminées par les formules paramétriques:

$$r = \frac{a}{\cos \varphi},$$

$$\sin 2\theta = 2 \frac{c}{a} \cos^2 \varphi (\varphi - \operatorname{tang} \varphi) + A \cos^2 \varphi,$$

avec une constante arbitraire  $A$ .