

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 38 (1939-1940)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** SUR DES COURBES SPÉCIALES DÉFINIES PAR DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES NON INTÉGRABLES  
**Autor:** Turrière, E.  
**Kapitel:** Applications géométriques de  $y'^2 + y^2 = f^2(x)$ .  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-515775>

### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 15.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

### Applications géométriques de $y'^2 + y^2 = f^2(x)$ .

7. — Deux questions de géométrie dépendent de l'équation différentielle du premier ordre <sup>1</sup>:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y^2 = f^2(x) .$$

1<sup>o</sup> La détermination d'une courbe plane satisfaisant à une condition imposée entre l'abscisse curviligne  $s$  et l'azimut  $\theta$  du point courant:

$$s = F(\theta)$$

$$r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 = \left(\frac{dF}{d\theta}\right)^2 .$$

C'est donc le problème d'*isométrie* par alignement sur un point fixe O: les rayons vecteurs issus de O déterminant des arcs égaux sur les diverses courbes intégrales. Le problème généralise celui des isométriques de la droite, qui se ramène aux fonctions elliptiques <sup>2</sup>.

2<sup>o</sup> La détermination des courbes planes telles que

$$r = f(\alpha)$$

$r$  désignant le rayon polaire  $OM = r$ , et  $\alpha$  étant l'angle d'inclinaison sur  $Ox$  de la tangente au point courant M. Si  $\varpi$  désigne la distance à cette tangente du pôle O, l'expression connue de  $r$

$$r^2 = \varpi^2 + \left(\frac{d\varpi}{d\alpha}\right)^2$$

donne l'équation

$$\varpi^2 + \left(\frac{d\varpi}{d\alpha}\right)^2 = f^2(\alpha) .$$

<sup>1</sup> Cette équation a fait l'objet d'une courte note de M. Dragoslav MITRINOVITCH: Remarque sur une équation différentielle du premier ordre, *Publications mathématiques de l'Université de Belgrade*, 1934, p. 171-174.

<sup>2</sup> Maurice D'OCAGNE, Sur les isométriques d'une droite par rapport à certains systèmes de courbes planes. *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. XIII, 1884-1885, p. 71-83.

Sur les isométriques d'une droite par rapport à un système de droites concourantes. *Ibid.*, t. XVII, 1888-1889, p. 171-175.

Le problème de l'éclaireur (à propos d'un article de M. E. TURRIÈRE). *L'Enseignement mathématique*, XVII<sup>e</sup> année, 1915, p. 336.

E. TURRIÈRE, Sur le problème de l'éclaireur. *L'Enseignement mathématique*, t. XVII, 1915, p. 212-215.

Prenons donc l'équation

$$r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 = f^2(\theta)$$

et posons

$$\text{tang } V = \frac{r d\theta}{dr} = \varphi ;$$

l'équation devient:

$$\frac{d\varphi}{d\theta} = (1 + \varphi^2) (1 - f_1 \varphi) , \quad f_1 = \frac{f'}{f} , \quad f' = \frac{df}{d\theta} .$$

La réduction à la forme canonique de P. APPELL

$$\frac{dZ}{d\Theta} = Z^3 + J ,$$

se fait par le changement de variables:

$$\varphi = UZ + W ,$$

$$d\Theta = M \cdot d\theta ,$$

avec

$$W = \frac{1}{3f_1} = \frac{1}{3} \cdot \frac{f}{f'} ,$$

$$\text{Log } U = \int \left( \frac{1}{3f_1} - f_1 \right) d\theta , \quad 3 \text{ Log } (f \cdot U) = \int \frac{f}{f'} d\theta ;$$

$$M = -f_1 \cdot U^2 ;$$

L'invariant J a l'expression:

$$\begin{aligned} J &= -\frac{1}{27 U^3 f_1^3} \left( 9 \frac{df_1}{d\theta} + 18 f_1^2 + 2 \right) . \\ &= -\frac{f}{27 U^3 f_1^3} (9 f f'' + 9 f'^2 + 2 f^2) . \end{aligned}$$

8. — J est nul lorsque

$$9 \frac{df_1}{d\theta} + 18 f_1^2 + 2 = 0 ,$$

$$f_1 = -\frac{1}{3} \text{ tang } \frac{2}{3} (\theta - \theta_0) ; \quad f^2 = A \cos \frac{2}{3} (\theta - \theta_0) ;$$

sans restriction de la généralité de la question,  $\theta_0$  peut être pris égal à zéro et  $A$  égal à 1

$$f_1 = -\frac{1}{3} \operatorname{tang} \frac{2}{3} \theta .$$

$$f^2 = \cos \frac{2}{3} \theta .$$

$$ds = \sqrt{\cos \frac{2}{3} \theta} d\theta ;$$

les courbes seront rectifiables au moyen de fonctions elliptiques du cas lemniscatique  $g_3 = 0$ , l'arc dépendant de l'intégrale:

$$\int \sqrt{\cos \varphi} \cdot d\varphi .$$

Les fonctions  $U$ ,  $W$ ,  $M$ ,  $\Theta$  sont ici:

$$W = -3 \cotg \frac{2}{3} \theta ,$$

$$\frac{1}{U^2} = \sin^3 \frac{2}{3} \theta \cos \frac{2}{3} \theta ,$$

$$\frac{4}{M} = 3 \sin^2 \frac{4}{3} \theta , \quad \Theta = -\cotg \frac{4}{3} \theta .$$

L'équation se réduit à

$$\frac{dZ}{d\Theta} = Z^3 ,$$

d'où:

$$2\Theta + \frac{1}{Z^2} = \text{const} = k ,$$

$$2 \left( \cotg \frac{4}{3} \theta + k \right) \sin^2 \frac{2}{3} \theta \cos \frac{2}{3} \theta = \frac{1}{\left( \varphi + 3 \cotg \frac{2}{3} \theta \right)^2} ,$$

$$\left( \cos \frac{4}{3} \theta + k \sin \frac{4}{3} \theta \right) \cdot \sin \frac{4}{3} \theta \left[ \varphi + 3 \cotg \frac{2}{3} \theta \right]^2 = 1 .$$

L'intégration s'achève par quadrature en exprimant  $\varphi$  en fonction de la variable  $\operatorname{tg} \frac{2}{3} \theta$ .

A signaler aussi le cas d'intégration  $f_1 = \text{constante}$  par séparation des variables.

9. — Comme courbes se rattachant à cette équation, il y a lieu de citer les deux suivantes :

I. Soient N et T' les traces respectives sur les axes Ox et Oy de la normale MN et de la tangente MTT' d'une courbe (C).

La condition  $NT' = 1$  caractérise des courbes (C) telles que

$$r = \cos \alpha , \\ MN = \sin \theta , \quad ON = \sin \widehat{OMN} ;$$

le cercle circonscrit au triangle OMN a pour diamètre  $NT' = 1$ .

L'équation des courbes est :

$$\varpi^2 + \left( \frac{d\varpi}{d\alpha} \right)^2 = \cos^2 \alpha$$

$\varpi$  étant la distance du pôle O à la tangente d'inclinaison  $\alpha$  sur Ox.

II. L'équation de Riccati

$$\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2 ,$$

est équivalente à

$$r^2 = \operatorname{tg} \alpha .$$

### La courbe atuptique.

10. — J. PORRO a donné le nom de courbe *atuptique* à l'intégrale de l'équation différentielle

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x(x^2 + y^2) + 2ay\sqrt{x^2 + y^2 - a^2}}{y(x^2 + y^2) + 2ax\sqrt{x^2 + y^2 - a^2}} .$$

Ce serait la forme théoriquement assignée aux aubes destinées aux moteurs hydrauliques <sup>1</sup>.

<sup>1</sup> J. PORRO, *Essai sur la théorie des moteurs hydrauliques*. Turin, 1844, p. 29.

Théorie générale des moteurs hydrauliques. C. R., 1852, t. XXXIV, p. 172-174.

H. BROCARD, *Notes de bibliographie des courbes géométriques*, 1897, p. 66.

G. LORIA, *Curve piane speciali*, I, 1930, p. 118.

Le nom dérive de τύπτω = je frappe de près (par opposition à βάλλω). C'est la courbe sans choc.