

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 38 (1939-1940)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** SUR DES COURBES SPÉCIALES DÉFINIES PAR DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES NON INTÉGRABLES  
**Autor:** Turrière, E.  
**Kapitel:** Courbes définies par une relation entre OT et OM.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-515775>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 15.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

Elle est réduite au type classique

$$\frac{d\eta}{d\xi} + \eta^2 = k\xi^m$$

$$m = -\frac{4N}{2N+1}$$

N étant entier (N = 1). Le changement de variable

$$\xi = At^{\frac{2}{m+2}}, \quad A^{m+2} = -\frac{(m+2)^2}{4k},$$

$$\eta = \frac{1}{u} \frac{du}{d\xi},$$

la transforme en l'équation de BESSEL:

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + \frac{2n+1}{t} \frac{du}{dt} + u = 0;$$

on est dans le cas d'intégration des fonctions de BESSEL d'indice

$$n = -\frac{3}{2},$$

$$k = -1, \quad A = \frac{1}{27}.$$

4. — A signaler aussi, un cas d'intégration

$$y^m = \operatorname{tg} V, \quad m = \text{const.}$$

par séparation des variables:

$$r^{m-1} dr = \sin^{-m} \theta \cdot d\theta.$$

### Courbes définies par une relation entre OT et OM.

5. — Soit T la trace sur l'axe Ox de la tangente en M à une courbe. La condition

$$\lambda = OT = f(r),$$

entre la coordonnée axiale  $\lambda = x - y \frac{dx}{dy}$  et le rayon vecteur  $r = OM$ , devient

$$r^2 \frac{d\theta}{dy} = f(r),$$

$$\frac{dx}{x-f} = \frac{dr}{r - \frac{x}{r}f}.$$

En posant

$$x = \frac{r^2}{f} - \frac{1}{z} ,$$

l'équation prend la forme:

$$\frac{dz}{dr} = r \left( \frac{r^2}{f^2} - 1 \right) \cdot z^2 (z + P) ,$$

$$P = \frac{rf' - 3f}{r^2 - f^2} , \quad f' = \frac{df}{dr} .$$

Il y a séparation des variables, pour P constant.

Pour  $P = 0$ , il suffit de prendre  $f = r^3$ :

$$\frac{1}{z^2} = r^2 + \frac{1}{r^2} - 2a ,$$

d'où la courbe:

$$r^2 \sin^2 \theta = 2(a - \cos \theta) ,$$

$$y^2 = 2(a - \cos \theta) ,$$

circulaire, du sixième degré.

Le cas de P constant correspond aux intégrales  $f(r)$  d'une équation de Riccati

$$r \frac{df}{dr} = 3f + P(r^2 - f^2) .$$

En posant alors

$$r = \frac{1}{PX} , \quad f = \frac{1}{P} \cdot \frac{Y}{X^3} ,$$

l'équation de Riccati prend la forme canonique

$$\boxed{\frac{dY}{dX} = -1 + \frac{Y^2}{X^4} .}$$

Il y a lieu d'observer que le changement de variables

$$Y = -iY_1 , \quad X = iX_1 ,$$

lui donne la forme

$$\frac{dY_1}{dX_1} = 1 + \frac{Y_1^2}{X_1^4} ,$$

obtenue plus haut pour l'équation correspondante de séparation des variables dans le problème de l'isochrone paracentrique; la transformation

$$X_1 = \frac{1}{3} \xi^{-\frac{1}{3}}, \quad Y_1 = \frac{1}{9} \eta,$$

donne l'équation

$$\frac{d\eta}{d\xi} + \eta^2 = \xi^{-\frac{4}{3}},$$

intégrable par les fonctions de BESSEL d'indice  $-\frac{3}{2}$ .

6. — Un autre cas d'intégration est celui des courbes définies par la condition:

$$OT = k \cdot OM.$$

L'équation correspondante

$$\frac{dr}{r - kx} = \frac{dx}{x - kr},$$

est homogène. Elle devient

$$k \frac{dr}{r} = \frac{1 - k \cos \theta}{\sin \theta} d\theta.$$

D'où:

$$y = \operatorname{tang}^{\frac{1}{k}} \frac{\theta}{2},$$

$$r \sin \theta = \operatorname{tang}^{\frac{1}{k}} \frac{\theta}{2},$$

$$2x = y(y^{-k} - y^k).$$

Ces courbes sont identiques aux *images d'Aoust des courbes ordinaires de poursuite*.