Le chapitre III traite de D quand E est un ensemble parfait, des ensembles de distances entre points de deux ensembles parfaits et des mesures de ces ensembles. Le dernier chapitre aborde la question très importante des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un ensemble de nombres positifs soit un ensemble D. Dans ces deux derniers chapitres, l'auteur envisage souvent des nombres écrits dans la numération à base n et se rapproche ainsi de l'arithmétique.

Les raisonnements sont toujours très clairement exposés; comme ils appartiennent, ainsi que presque tous ceux relatifs aux ensembles, à cette catégorie de considérations simples mais minutieuses qu'on aime en général mieux reconstituer par soi-même que lire mot à mot, l'impression, d'ailleurs très bien faite, aurait dû mettre davantage en évidence les énoncés caractéristiques et les subdivisions des démonstrations.

H. LEBESGUE (Paris).

Gabor SZEGÖ. — **Orthogonal Polynomials** (American Mathematical Society, Colloquium Publications, Vol. XXIII). — Un vol. grand in-8° de VIII-401 pages; $ 6,50; Mathematical Society, New-York, 1939.

Ce livre fait partie d'une collection que tout le monde connaît, ce qui me dispense de parler de sa bonne présentation et de sa parfaite impression.

L'auteur se défend à diverses reprises d'avoir cherché à être complet; comment aurait-il pu l'être sur un sujet intimement lié à tant de théories et avec presque tous les calculs qui ont été réellement effectués. Aussi M. Szegö signale-t-il des ordres de questions qu'il a systématiquement laissé de côté et il ne me pardonnerait pas d'écrire que son livre est une encyclopédie, mais il me permettra bien de le qualifier d'ouvrage de référence que devront avoir sous la main tous ceux qui s'occuperont des polynômes orthogonaux. Ils y trouveront, avec les faits et les formules, des références nombreuses à des traités et à des mémoires originaux dont l'énumération occupe plus de dix-neuf pages. Et, pour que le passage de ces traités et mémoires à son livre soit facilité, M. Szegö a soin d'indiquer les différences de dénominations ou de notations; ainsi, après avoir fixé ses propres notations pour les polynômes de Jacobi, il écrit à peu près: « Stieltjes (à tel endroit), Fejér (à tel autre) écrivent α et β là où nous écrivons $\frac{1}{2}(\beta + 1)$ et $\frac{1}{2}(\alpha + 1)$. La fonction $Z_n(u)$ de Jordan s'écrit de telle manière avec notre notation. La fonction $G_n(p, q, u)$ de Courant-Hilbert se réduit à $Z_n(u)$ avec $p = \alpha$, $q = \gamma$. »

Il ne faudrait pas croire pourtant que M. Szegö a écrit une sorte de dictionnaire ou de formulaire; c'est un traité sur les polynômes orthogonaux qu'il nous donne. Il résume les règles qu'il s'est imposées à peu près comme il suit: « Je me suis efforcé d'indiquer les méthodes principales et caractéristiques, et de mettre en évidence leurs relations avec les idées générales de l'Analyse moderne; donnant la préférence à celles qui m'ont fourni l'occasion de quelque contribution nouvelle, quoique modeste, ou d'une modification à la présentation habituelle ». Et tous ceux qui connaissent l'ingéniosité de M. Szegö savent à l'avance que de telles occasions se sont présentées très souvent.

Rattacher des méthodes aux idées générales de l'Analyse cela n'est pas du tout, dans l'esprit de M. Szegö, bâtir une belle théorie générale d'où tout se déduirait; une telle théorie ferait abstraction de l'individualité de diverses classes de polynômes orthogonaux et permettrait d'aller moins loin qu'une étude directe de ces classes, aussi la plus grande partie de l'ouvrage est-elle consacrée à des polynômes spéciaux dits classiques, quant aux théories générales, elles occupent pour ce qui est de la partie élémentaire, le chapitre III, et, pour les parties plus élevées, les chapitres XII et XIII seulement. L'ouvrage est donc très réaliste; il n'y s'agit pas de calculs que l'on déclare pouvoir faire, mais de calculs effectués; aussi il faudra que le lecteur lise la plume à la main, en refaisant tous les calculs, pour en tirer tout le profit possible.

Le premier chapitre rappelle les faits, d'ailleurs nombreux et variés, que le lecteur doit connaître. Au chapitre II, l'orthogonalité de f_n et φ_n est définie par la relation $\int_a^b f_n \varphi_n \, d\alpha(x) = 0$, l'intégrale étant une intégrale de Stieltjes; les principales classes de polynômes orthogonaux classiques sont définies par le choix de $\alpha(x)$. Dans le chapitre III on trouve la généralisation de la formule de Parseval, la notion de système complet (closed) de polynômes orthogonaux, les formules de récurrence entre polynômes, les propriétés les plus immédiates de zéros de ces polynômes et l'indication des relations entre polynômes orthogonaux et fractions continues. Le chapitre IV traite des polynômes de Jacobi généraux et de leurs cas particuliers, polynômes ultra-sphériques, polynômes de Legendre, etc.; l'équation différentielle du second ordre que vérifient les polynômes joue ici un rôle principal, les diverses expressions, intégrales ou autres, des solutions de cette équation sont étudiées. Le chapitre V, beaucoup plus bref, est consacré aux polynômes de Laguerre et à ceux d'Hermite. Le chapitre VI donne une étude très poussée de la distribution des zéros des polynômes orthogonaux; les diverses méthodes utilisables sont comparées, celle de Sturm est particulièrement importante. Le chapitre VII donne, pour des classes étendues de polynômes orthogonaux, les limites entre lesquelles varient ces polynômes, en particulier les limites des polynômes classiques. Le chapitre VIII est consacré à l'étude de la valeur asymptotique des polynômes quand leur degré augmente indéfiniment, pour un point pris soit hors de l'intervalle d'orthogonalité, soit dans cet intervalle; le cas des polynômes classiques est seul examiné ici, le cas général sera étudié au chapitre XII. Le chapitre IX traite, pour le cas des polynômes classiques, du développement en série de polynômes orthogonaux, d'une part d'une fonction analytique, d'autre part d'une fonction arbitraire, avec discussion de la convergence ou de la sommabilité de la série obtenue. Le cas des polynômes généraux est traité au chapitre XIII. Le chapitre X fournit une représentation des fonctions positives, généralisations d'un résultat de M. Fejèr et qui repose sur un théorème de Fatou. Le chapitre XI traite d'une généralisation de l'orthogonalité, l'intégrale qui sert de définition étant étendue au cercle de rayon unité; au chapitre XVI l'intégrale sera étendue à d'autres courbes fermées. J'ai déjà indiqué les thèmes principaux des chapitres XII et XIII; quant aux chapitres XIV et XV, il y s'agit de l'emploi des polynômes orthogonaux pour l'interpolation et pour les quadratures mécaniques.

En résumé un livre sérieux, difficile, mais riche.

H. Lebesgue (Paris).