Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 38 (1939-1940)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Buchbesprechung: Sophie Piccard. — Sur les ensembles de distances des ensembles de points d'un espace euclidien (Mémoires de l'Université de Neuchâtel, tome XIII). — Un vol. grand in-8° de 212 pages; Fr. suisses 7,50; Université de Neuchâtel, 1939.

Autor: Lebesgue, H.

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 04.04.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Sophie PICCARD. — **Sur les ensembles de distances des ensembles de points d'un espace euclidien** (Mémoires de l'Université de Neuchâtel, tome XIII). — Un vol. grand in-8° de 212 pages; Fr. suisses 7,50; Université de Neuchâtel, 1939.

L'ouvrage de Mlle S. Piccard est, comme l'indiquent son titre et le nom de la collection dont il fait partie, un travail de recherches.

Pour un traité, le sujet eut été un peu mince, alors qu'il est un excellent thème de recherches, comme l'avaient déjà montré des publications de MM. Steinhaus, Sierpinski, Ruziewicz et comme le prouve à nouveau le mémoire de Mlle Piccard. Le premier chapitre de ce mémoire rappelle et coordonne les résultats antérieurement acquis et est, en ce sens, un petit traité sur la matière.

C'est à ce titre que le mémoire de Mlle Piccard doit être signalé dans cette Bibliographie réservée aux ouvrages d'ensemble; aussi je ne m'arrêterai guère sur les apports personnels de l'Auteur, bien qu'ils soient nombreux et variés. Pour les apprécier pleinement il faudrait d'ailleurs, ainsi qu'il arrive toujours, être déjà quelque peu familiarisé avec le sujet alors que plus d'un lecteur se demande sans doute quel intérêt peut présenter l'étude des ensembles de distances.

Nous avons hérité des Pythagoriciens une conception un peu étriquée des mathématiques: les données doivent y être en nombre fini. Sans doute, si l'une d'elles est, par exemple, un segment, une infinité de points est donnée; seulement, depuis les Grecs jusque vers la fin du XIXe siècle, on s'était astreint à éviter toute considération sur cet ensemble infini. Depuis les travaux de Cantor, nous assistons à l'élaboration d'une géométrie des infinités, ou plutôt d'une géométrie des ensembles, dont les premiers éléments dérivent surtout de l'antique notion de limite, précisée et élargie dans diverses directions; éléments limites, ensembles dérivés, ensembles ouverts, fermés, etc. D'où, quand il s'agit d'ensembles de points, la considération des distances entre les divers points d'un ensemble ou entre ceux de deux ensembles. C'est à ces ensembles des distances étudiés délibérément pour la première fois, je crois, par M. Hugo Steinhaus, qu'est consacrée l'étude de Mlle Piccard.

Une plus complète connaissance des ensembles de distances pourra conduire à des élargissements utiles de la notion de limite. D'autre part, si E est un ensemble de points d'un axe Ox, l'ensemble D des distances entre points de E est la somme des ensembles déduits de E par les translations qui amènent en O les divers points de E (ou plutôt la partie de cette somme située sur le demi-axe Ox à abscisses positives). Cette génération de D utilise l'addition d'ensembles dont la collection n'est parfois ni finie, ni dénombrable, et cette opération nouvelle en somme, a pu fournir des ensembles difficiles à obtenir autrement; c'est ainsi que M. Sierpinski montre à l'aide de l'axiome de Zermelo que lorsque E est mesurable B (ou mesurable L), D peut être non mesurable B (ou non mesurable L).

Le deuxième chapitre s'occupe des ensembles égaux à leurs complémentaires ou à l'ensemble des distances de leurs points; ensembles que la génération précédemment indiquée de D met assez nettement en évidence. Pour citer au moins un énoncé montrant la liaison entre les questions, je signale que, pour qu'un ensemble linéaire E soit égal à son complémentaire, il faut et il suffit qu'il existe un nombre positif n'appartenant à aucun des ensembles D relatifs respectivement à E et son complémentaire.

Le chapitre III traite de D quand E est un ensemble parfait, des ensembles de distances entre points de deux ensembles parfaits et des mesures de ces ensembles. Le dernier chapitre aborde la question très importante des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un ensemble de nombres positifs soit un ensemble D. Dans ces deux derniers chapitres, l'auteur envisage souvent des nombres écrits dans la numération à base n et se rapproche ainsi de l'arithmétique.

Les raisonnements sont toujours très clairement exposés; comme ils appartiennent, ainsi que presque tous ceux relatifs aux ensembles, à cette catégorie de considérations simples mais minutieuses qu'on aime en général mieux reconstituer par soi-même que lire mot à mot, l'impression, d'ailleurs très bien faite, aurait dû mettre davantage en évidence les énoncés caractéristiques et les subdivisions des démonstrations.

H. Lebesgue (Paris).

Gabor Szegö. — **Orthogonal Polynomials** (American Mathematical Society, Colloquium Publications, Vol. XXIII). — Un vol. grand in-8° de VIII-401 pages; \$ 6,50; Mathematical Society, New-York, 1939.

Ce livre fait partie d'une collection que tout le monde connaît, ce qui me dispense de parler de sa bonne présentation et de sa parfaite impression.

L'auteur se défend à diverses reprises d'avoir cherché à être complet; comment aurait-il pu l'être sur un sujet intimement lié à tant de théories et avec presque tous les calculs qui ont été réellement effectués. Aussi M. Szegö signale-t-il des ordres de questions qu'il a systématiquement laissé de côté et il ne me pardonnerait pas d'écrire que son livre est une encyclopédie, mais il me permettra bien de le qualifier d'ouvrage de référence que devront avoir sous la main tous ceux qui s'occuperont des polynômes orthogonaux. Ils y trouveront, avec les faits et les formules, des références nombreuses à des traités et à des mémoires originaux dont l'énumération occupe plus de dix-neuf pages. Et, pour que le passage de ces traités et mémoires à son livre soit facilité, M. Szegö a soin d'indiquer les différences de dénominations ou de notations; ainsi, après avoir fixé ses propres notations pour les polynômes de Jacobi, il écrit à peu près: « Stieltjes (à tel endroit), Fejér (à tel autre) écrivent α et β là où nous écrivons $\frac{1}{2}(\beta + 1)$ et $\frac{1}{2}(\alpha + 1)$. La fonction $Z_n(u)$ de Jordan s'écrit de telle manière avec notre notation. La fonction $G_n(p, q, u)$ de Courant-Hilbert se réduit à $Z_n(u)$ avec $p = \alpha$, $q = \gamma$. »

Il ne faudrait pas croire pourtant que M. Szegö a écrit une sorte de dictionnaire ou de formulaire; c'est un traité sur les polynômes orthogonaux qu'il nous donne. Il résume les règles qu'il s'est imposées à peu près comme il suit: « Je me suis efforcé d'indiquer les méthodes principales et caractéristiques, et de mettre en évidence leurs relations avec les idées générales de l'Analyse moderne; donnant la préférence à celles qui m'ont fourni l'occasion de quelque contribution nouvelle, quoique modeste, ou d'une modification à la présentation habituelle ». Et tous ceux qui connaissent l'ingéniosité de M. Szegö savent à l'avance que de telles occasions se sont présentées très souvent.

Rattacher des méthodes aux idées générales de l'Analyse cela n'est pas