

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 38 (1939-1940)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** LA GÉOMÉTRIE SENSIBLE  
**Autor:** Hjelmslev, Johannes  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-515771>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 15.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# LA GÉOMÉTRIE SENSIBLE

(1<sup>er</sup> article)

PAR

Johannes HJELMSLEV (Copenhague)

---

## INTRODUCTION

1. — Des recherches importantes sur les bases de la Géométrie ont eu lieu autour du commencement de notre siècle et pendant les années suivantes — essentiellement grâce aux travaux de HILBERT — et ont apporté des progrès scientifiques remarquables qui engendrent des problèmes plus profonds que ceux d'EUCLIDE. Mais elles ont surtout jeté de la clarté sur le système d'Euclide. Elles ont apporté la solution définitive du problème que les Grecs ont l'honneur d'avoir posé et l'honneur, au cours de quelques siècles, d'avoir résolu d'une façon déjà si complète que deux milliers d'années et plus ont été nécessaires pour en combler les lacunes.

Mais les recherches modernes ont donné d'autres résultats. On est arrivé à plus que l'achèvement du système d'Euclide. La forme de cet achèvement, le système purement déductif, a jeté une lumière nouvelle sur l'effet total de ce système. L'admirable œuvre scientifique des Grecs est, d'un certain point de vue, davantage mise en relief. Elle excite plus intensément notre admiration et servira sans doute, dans les siècles à venir, d'inspiration à d'importants travaux scientifiques.

2. — En même temps s'est posée d'une manière aiguë la question concernant le rapport du système au monde sensible

et à l'enseignement. L'effet immédiat à cet égard a plutôt été une frayeur générale, car on était habitué à voir une sorte de description de l'espace réel dans le système géométrique, malgré toutes ses idéalizations. A mesure qu'on se rend mieux compte des effets, ils finissent par cristalliser le point de vue inéluctable que ni le système grec, ni aucune de ses formes modifiées ne peuvent ou ne doivent servir de base à une description de l'espace réel ou à un enseignement en Géométrie.

3. — La base du système était le groupe d'axiomes sous la forme établie dans les *Eléments d'Euclide*. A celui-ci se sont ajoutés les compléments des époques suivantes ainsi que les réductions et la précision raffinées des temps modernes, comme nous pouvons le trouver dans le traité de HILBERT intitulé « *Grundlagen der Geometrie* », chap. I. Voilà la base historique du système.

Et quel est alors le résultat actuel de ce système bimillénaire ? Quelle base de travail concise a été fournie par l'achèvement du système ?

Un seul terme peut exprimer la réponse : *la description par coordonnées* ; quant à la Géométrie plane spécialement, la détermination du point au moyen des coordonnées, la description de la droite par une équation de premier degré, la détermination de la distance entre deux points au moyen de la formule pythagorique.

La description par coordonnées est le résultat définitif que nous avons atteint et que nous ne pouvions pas ne pas atteindre. Elle seule nous donne une vue d'ensemble et la maîtrise sur les moyens auxiliaires, la clarté sur le contenu total du système axiomatique. Elle nous fournit l'équivalent complet de ce dernier.

4. — On ne peut pas cependant s'empêcher de regarder en arrière et de se demander si on ne pourrait pas *de nos jours* atteindre ce résultat par un chemin plus naturel et direct que celui qu'on a parcouru historiquement à travers ce grand espace de temps.

La réponse est tout à fait nette. Personne ne doute aujourd'hui qu'il existe des moyens beaucoup plus courts et naturels qui

aboutissent au même résultat. Ceci est bien évident d'un point de vue purement axiomatique où l'on ne s'occupe que de la déduction pure, tout en reconnaissant que le système axiomatique historique restera une source d'inspiration précieuse pour des recherches ultérieures.

Mais d'un point de vue pédagogique et empirique s'impose indiscutablement un seul jugement : le système d'Euclide doit appartenir à l'histoire, pendant que l'enseignement de la Géométrie adoptera — peut-être lentement, mais en tout cas sûrement — d'autres formes.

5. — Une Géométrie qui doit avoir avec le monde sensible un rapport tel que chacun de ses énoncés contienne toujours et sans exception une vérité sur des objets sensibles, ne peut pas être fondée sur le système axiomatique hérité des Grecs ; en effet, beaucoup de postulats de ce système ou bien dépassent le monde sensible en ce qu'ils n'ont aucun rapport avec lui, ou ne s'occupent même pas d'objets sensibles (tel que le cinquième postulat d'Euclide ou les autres axiomes de parallélisme par lesquels il a été successivement remplacé), ou bien établissent des faits en contradiction avec le monde sensible (tel que le postulat sur la détermination uniforme de la droite par deux points ou celui sur le prolongement uniforme à l'infini du segment).

La première espèce de postulats n'est en tout cas acceptable que sous forme d'hypothèses dont l'acceptation se justifie en ce qu'on peut en déduire des résultats « corrects », c'est-à-dire des résultats qui par une interprétation convenable se révèlent corrects pour les objets sensibles.

On ne peut pas, bien entendu, accepter l'autre espèce sans réserve directe. On peut prétendre avec raison que deux points déterminent un segment uniforme, mais non qu'un tel segment possède dans tous les cas un prolongement uniforme. Deux segments d'une longueur de cinquante centimètres peuvent s'entrecouper de façon à avoir un segment commun de plusieurs centimètres. Voilà un fait qui ne se laisse pas escamoter. Quand la Géométrie traditionnelle prétend qu'un cercle et sa tangente n'ont qu'un point commun, l'on a un exemple d'une proposition qui est fausse dans la Géométrie empirique. Aucun cercle sensible



ne possède cette propriété. De même c'est un fait que deux cercles peuvent se toucher de telle sorte que le contact se révèle par un arc commun de plus de soixante degrés, tandis que la Géométrie traditionnelle prétend que deux cercles n'ont jamais plus de deux points communs.

6. — *Certes ; mais la Géométrie à l'école doit-elle traiter de cercles sensibles, de droites sensibles, d'objets sensibles ?*

Je ne saurais croire que personne réponde négativement à cette question. *La Géométrie à l'école doit traiter du monde sensible.* Le théorème de Pythagore, par exemple, doit énoncer quelque chose des dimensions d'un objet sensible. Tous les énoncés de la Géométrie, soit qu'on les appelle des axiomes, qui sont établis directement, soit qu'on les appelle des théorèmes, qui sont déduits par raisonnement d'autres propositions, doivent tous contenir des renseignements sur le monde sensible. Partout il faut maintenir celui-ci.

C'est pourquoi aucun système abstrait construit comme celui d'Euclide ne peut nous fournir les bases qu'il nous faut.

Même si l'on accepte d'employer le système axiomatique d'Euclide (ou une modification de celui-ci) comme un système d'hypothèses qui se justifient en ce qu'elles aboutissent à des résultats, par exemple le théorème de Pythagore, applicables au monde sensible par une interprétation appropriée, *cette applicabilité ne saurait être déduite du système géométrique quand celui-ci est fondé sur des axiomes qui ne sont pas valables dans le monde visible.* Sans quoi, il faudrait, dans chaque cas, vérifier directement ensuite si les propositions déduites se révéleraient exactes tout en étant déduites d'hypothèses fausses ou en tout cas non contrôlées.

En d'autres termes il n'y aurait aucune relation entre le système construit par hypothèses et ce monde sensible dont l'exploration est cependant la tâche principale.

Mais à ceci s'ajoute encore ce qui est, du point de vue pédagogique, le plus important : *Par un procédé pareil, on négligerait par principe de se servir d'intuition précise et de l'observation concrète qui, en dernière instance, restent notre seul guide.*

7. — Dans la littérature pédagogique et mathématique on a, comme on le sait, énoncé, de nombreuses fois, des éléments essentiels de la critique ci-dessus.

Je rappelle ROUSSEAU qui dans l'« *Emile* », Livre II, raconte ses impressions de l'enseignement habituel de la Géométrie en réclamant des réformes pédagogiques, par exemple dans les termes suivants :

« J'ai dit que la Géométrie n'était pas à la portée des enfants ; mais c'est notre faute. Nous ne sentons pas que leur méthode n'est point la nôtre et que ce qui devient pour nous l'art de raisonner ne doit être pour eux que l'art de voir... ; au lieu de nous faire trouver les démonstrations, on nous les dicte ; au lieu de nous apprendre à raisonner, le maître raisonne pour nous et n'exerce que notre mémoire... »

« ...Faites des figures exactes, combinez-les, posez-les l'une sur l'autre, examinez leurs rapports : vous trouverez toute la Géométrie élémentaire en marchant d'observation en observation, sans qu'il soit question ni de définitions, ni de problèmes, ni d'aucune autre forme de démonstration que la simple superposition ».

Je rappelle CLAIRAUT qui dans ses « *Elémens de Géométrie* » de 1741 fit un essai radical, dans un exposé pratique, pour se délivrer de la systématique d'Euclide. La préface de son œuvre célèbre commence par les lignes suivantes :

« Quoique la Géométrie soit par elle-même abstraite, il faut avouer cependant que les difficultés qu'éprouvent ceux qui commencent à s'y appliquer viennent le plus souvent de la manière dont elle est enseignée dans les Elémens ordinaires. On y débute toujours par un grand nombre de définitions, de demandes, d'axiomes et de principes préliminaires qui semblent ne promettre rien que de sec au lecteur. Les propositions qui viennent ensuite ne fixant point l'esprit sur des objets plus intéressans et étant d'ailleurs difficiles à concevoir, il arrive communément que les commençans se fatiguent et se rebutent, avant que d'avoir aucune idée distincte de ce qu'on voulait leur enseigner. »

Pour donner une impression du texte de Clairaut nous citons la page 3, en bas, où l'on fait déjà connaissance du carré et du rectangle :

« On sait par exemple que la régularité des figures telles que ABCD, FGHI, appelées rectangles, et composées de quatre côtés perpendiculaires les uns aux autres, engage à donner leurs formes aux maisons, à leurs dedans, aux jardins, aux chambres, aux pans de murailles, etc...

La première ABCD de ces figures, dont les côtés sont égaux, s'appelle communément carré. L'autre FGHI, qui n'a que ses côtés opposés égaux, retient le nom de rectangle. »

Enfin nous rappelons quelques propos de Henri POINCARÉ dans « *Science et Méthode* » :

« Peut-on définir la ligne droite ? Je partirais tout simplement de la règle et je montrerais d'abord à l'élève comment on peut vérifier une règle par retournement. »

« Devons-nous conserver la définition classique des parallèles et dire qu'on appelle ainsi deux droites qui, situées dans le même plan, ne se rencontrent pas quelque loin qu'on les prolonge ? Non, parce que cette définition est invérifiable par l'expérience et ne saurait en conséquence être regardée comme une donnée immédiate de l'intuition. Non, surtout, parce qu'elle est totalement étrangère à la notion de groupe, à la considération du mouvement des corps solides qui est la véritable source de la géométrie. »

« ...dans l'enseignement, une bonne définition c'est celle qui est comprise par les élèves. »

« Sous chaque mot, ils veulent mettre une image sensible. »

### *Les éléments sensibles.*

8. — La Géométrie que nous proposerons dans ce qui suit doit avoir comme but : le contrôle sensible de tous les résultats. Les définitions doivent être des définitions sensibles, c'est-à-dire décrire les objets dont on s'occupe de telle façon qu'on puisse reconnaître par une vérification directe si les objets ont les propriétés demandées.

Le programme de travail doit être : *voir et concevoir*.

9. — Au moyen d'exemples de la vie courante l'on fait la connaissance de différents corps solides aux surfaces variées,

tels que boîtes d'allumettes ou de cigares, briques, boîte de biscuits, boules de croquet, billes de billard, etc...

Sur la boîte d'allumettes on vérifie, par exemple, les propriétés principales du parallélépipède rectangle (la brique); sa surface se compose de six faces; là où deux faces se rencontrent se forme une arête. Chaque face est contiguë à quatre autres de sorte qu'elle est limitée par quatre arêtes; c'est pourquoi elle s'appelle un quadrilatère. Les quadrilatères opposés sont pareils, ce qu'on vérifie à l'aide d'une autre boîte d'allumettes en démontrant que chacune de ses faces peut se superposer à deux faces opposées de la première boîte et cela même de deux façons différentes. De même, on vérifie que deux briques peuvent se joindre de façon à composer une seule brique.

On établit ainsi les propriétés fondamentales de la brique; les arêtes sont de même longueur quatre à quatre, de sorte qu'elles ne présentent que trois longueurs différentes, les dimensions de la brique. Mention spéciale est faite du cube.

10. — Une sphère (boule de croquet, bille de billard, globe) est un corps rond dont la surface ne présente ni arêtes ni coins et qui est complètement pareil dans toutes ses parties. Ceci se contrôle par exemple à l'aide d'un modèle en argile. Si l'on pétrit une motte d'argile de sorte qu'une de ses surfaces s'adapte bien à une partie étendue de la surface de la sphère, alors elle se révélera capable de s'adapter à n'importe quelle partie et elle pourra donc glisser dans toutes les directions le long de la sphère sans changer de forme. On exprime ce fait en disant que la surface de la sphère peut se déplacer en elle-même dans tous les sens. La sphère peut tourner dans tous les sens à l'intérieur d'une cavité où elle s'adapte.

11. — La sphère est dite courbe tandis que chacune des six faces d'une brique s'appelle une face plane. D'autres exemples de faces planes sont la surface d'une table, le plafond, les murs ou le plancher d'une chambre (exemples assez grossiers), le verre pour miroirs, etc... (exemples plus raffinés). Mais quelle est vraiment la condition essentielle pour qu'on puisse dire qu'une face est exactement plane ? Nous exigeons d'abord qu'elle soit

pareille dans toutes ses parties, de sorte qu'une motte d'argile qui s'adapte à une partie étendue de la surface puisse glisser dans toutes les directions le long de celle-ci sans changer de forme. Mais il en était ainsi aussi pour la face sphérique, ainsi que pour toute partie limitée de celle-ci. Il y a donc encore une qualité que nous demandons pour la face plane, la voici: elle doit être pareille des deux côtés, c'est-à-dire qu'elle doit être capable de servir de face de contact commune à deux corps pareils.

Nous trouvons cette définition chez *Leibniz* (*Leibnizens math. Schr.* II, Abt. 1. S. 189 def (6)) de la façon suivante: « ut si pomum secem in duo frusta, ut extremum novum unius segmenti non possit distingui ab extremo novo alterius segmenti, sectio erit planum ».

Si l'on coupe en deux une pomme de terre, et si l'on ne peut distinguer les deux surfaces d'intersection, elles sont planes. Mais comment contrôler avec exactitude qu'elles sont pareilles ? Par ce fait, qu'elles peuvent s'adapter et glisser dans toutes les directions sur une même troisième surface, obtenue par exemple en coupant une autre pomme de terre.

L'on obtient des faces pareilles en fer en se servant de ces vérifications directes. L'on commence par faire trois plaques de fer dont un côté est à peu près plan, et on les façonne ensuite en les raclant jusqu'à ce qu'elles s'épousent deux par deux. On peut pousser ce procédé très loin en exactitude. Les plans ainsi obtenus (plans correctifs) servent à étalonner d'autres plans.

12. — Une feuille de papier à dessin étendue sur une table plane forme le plan dans lequel nous dessinons, dit plan à dessiner. Si l'on y pose une pièce de monnaie ou une médaille que l'on tient ferme pendant qu'un crayon finement taillé suit dans le plan le bord de la pièce, l'on obtient un *cercle*. Il apparaît ensuite que la pièce peut tourner tout en épousant toujours le cercle.

Prenons une pomme de terre et coupons-la de sorte que la surface d'intersection soit un cercle. On vérifie que c'est un cercle en essayant de tourner l'un des morceaux de telle façon que les surfaces d'intersection restent en contact ininterrompu.

l'une avec l'autre tout en s'épousant réciproquement avec exactitude le long du contour.

Un *disque* est une plaque qui peut se déplacer en elle-même et est pareille des deux côtés. Le bord du disque est un cercle.

13. — Nous appelons corps dièdre (ou dièdre) un corps qui a deux faces planes se rencontrant le long d'une arête. La composition du restant de la surface est sans importance. Deux dièdres s'appellent *supplémentaires* quand ils peuvent se compléter de façon à former un dièdre plat, c'est-à-dire s'ils peuvent reposer sur un plan en ayant chacun une face plane dans celui-ci et en s'ajustant étroitement le long des faces non situées dans le plan. Autrement dit, chacun d'eux doit pouvoir remplir le vide qui se forme à côté de l'autre quand on le pose sur une table. Si la position des plans est la même pour les deux dièdres supplémentaires, on les appelle dièdres normaux.

Mais comment vérifier si les deux dièdres sont pareils ? On essaie s'ils peuvent remplir le même vide, donc être des dièdres supplémentaires à un même troisième. Par ce procédé on forme des dièdres normaux, trois à la fois, en prenant soin qu'ils puissent deux par deux composer des dièdres supplémentaires. Sur ceci est basée la fabrication de dièdres normaux en fer.

Employer cette vérification directe pour découper des dièdres normaux dans une pomme de terre ou pour en modeler en argile.

On appelle les deux plans-limites d'un dièdre normal *perpendiculaires l'un à l'autre* ; l'arête du dièdre normal est une *ligne droite*.

Dans la vie courante on trouve partout des imitations plus ou moins exactes de lignes droites, soit sous forme d'arêtes (de dièdres obliques ou droits), soit sous forme de tiges ou de fils. Si l'on étire une ficelle mince, elle se révèle capable de s'adapter avec grande exactitude à l'arête d'un dièdre normal, c'est pourquoi on peut représenter la ligne droite par une ficelle étirée.

Si l'on tient ferme un dièdre normal sur une table plane on peut déplacer un autre dièdre normal, supplémentaire au premier, le long de celui-ci de telle façon que l'arête glisse le long de l'autre arête. Un tel déplacement s'appelle un *glissement* ou une *translation*.





14. — Un *trièdre normal* est un corps qui a trois faces planes qui se rencontrent à angle droit deux par deux de sorte qu'elles forment trois arêtes se joignant dans un sommet, un point, dit le sommet du trièdre. La composition du restant de la surface est sans importance. On dit que les trois arêtes sont, deux par deux, perpendiculaires l'une à l'autre. Les faces s'appellent les faces du trièdre et forment chacune un *angle droit* dans le plan.

Deux trièdres normaux peuvent se joindre de façon à former un dièdre normal. Ceci peut avoir lieu de plusieurs façons puisque chaque face d'un trièdre peut se joindre à chaque face de l'autre.

On peut toujours poser quatre trièdres normaux sur un plan de façon que leurs faces de contact AOB, BOC, COD, DOA avec le plan occupent celui-ci autour du sommet commun O.

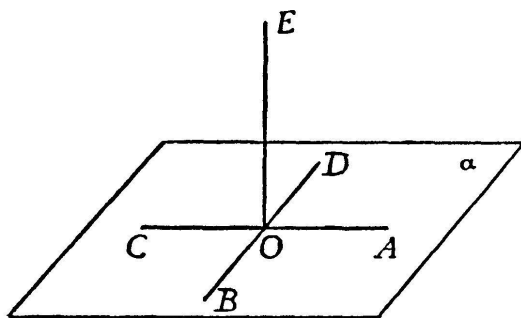


Fig. 1.

L'arête OE est commune à tous les trièdres, les arêtes AO et OC se prolongent l'une l'autre, c'est-à-dire elles forment une droite continue qui est l'arête commune de deux dièdres normaux dont chacun se compose de deux des trièdres donnés. Les arêtes BO et OD se prolongent de la même

façon. On dit que les deux droites se coupent en O et qu'elles sont perpendiculaires l'une à l'autre ( $AOC \perp BOD$ ).

On dit que chaque arête est perpendiculaire ou normale au plan limité par les deux autres arêtes, et inversement que celui-ci est perpendiculaire du plan normal à l'arête. Sur la figure, OE est normale au plan  $\alpha$ .

Par chaque point O d'un plan on peut mener une droite perpendiculaire au plan. On la détermine comme l'arête d'un trièdre normal posé sur le plan avec sommet en O. Si l'on donne au trièdre des positions différentes sur le plan en conservant le même sommet on aura toujours la même perpendiculaire.

De même on peut d'un point hors du plan mener une perpendiculaire au plan en posant le trièdre normal sur le plan de façon qu'une des arêtes passe par le point.

15. — Nous appelons *brique normale* une brique qui est limitée par des faces exactement planes qui forment un dièdre normal le long de chaque arête. La rencontre de trois arêtes forme un trièdre normal; la brique possède donc huit trièdres normaux. Toutes les propriétés que possédaient approximativement, selon nos observations, les boîtes d'allumettes, sont rigoureusement valables pour les briques normales. On peut fabriquer des briques normales pareilles entre elles avec une telle exactitude qu'une fois superposées elles s'ajustent si bien qu'il faut employer des forces considérables pour les séparer. Les faces de la brique normale sont des quadrilatères dont tous les côtés opposés sont égaux et où deux côtés voisins, quels qu'ils soient, forment un angle droit. On appelle rectangles de tels quadrilatères; exemples: une feuille de papier, une carte postale, une carte de visite, etc.

Il est établi dans notre champ d'expérience (selon les expériences acquises) que *l'on peut fabriquer une brique normale de dimensions données.*

Il s'ensuit que dans un plan *on peut former un rectangle de dimensions données.*

16. — Si l'on place un dièdre normal sur le plan à dessiner, son arête y tracera une ligne droite, et comme on peut placer un autre dièdre normal à côté du premier de sorte que son arête suive la même ligne droite, on voit que cette ligne droite partage le papier en deux parties qui doivent pouvoir se recouvrir lorsqu'on plie le papier le long de la droite. L'on peut donc produire une ligne droite en pliant simplement une feuille de papier.

Il résulte des propriétés du trièdre normal qu'en pliant encore une fois la feuille de papier, l'une des moitiés de la droite recouvrant l'autre, on obtient un angle droit, et qu'en étendant ensuite le papier dans son étendue originelle, l'on y voit marquées deux lignes droites perpendiculaires l'une à l'autre.

On dessine des lignes droites sur le plan à dessiner à l'aide d'un dièdre normal, et des angles droits à l'aide d'un trièdre normal, mais on leur préfère des instruments à dessin plats: la règle qui en réalité est un dièdre normal plat avec une large face sur le plan à dessiner et une très étroite face perpendiculaire à celle-ci, et l'équerre qui est un trièdre normal avec une large



face sur le plan à dessiner et deux faces étroites qui y sont perpendiculaires.

17. — Nos instruments de travail seront maintenant : le plan à dessiner fixe ; la règle pour tracer des lignes droites, spécialement une ligne qui joint un point à un autre ; l'équerre pour tracer des lignes perpendiculaires entre elles (tracé d'angles droits), spécialement une ligne droite passant par un point donné et perpendiculaire à une ligne donnée ; du papier calque (papier transparent) pour copier et déplacer les figures ; le compas à deux pointes pour déplacer des segments et pour les diviser par tâtonnements en deux ou plusieurs parties égales ; le compas à crayon pour dessiner des cercles de grandeurs différentes ; peut-être aussi un disque (pièce de monnaie ou médaille) pour dessiner des cercles de grandeur fixe ; enfin une règle graduée. Ces instruments de travail devront en principe toujours être disponibles. On n'exige pas la construction avec des auxiliaires limités, comme par exemple l'emploi traditionnel de la règle et du compas.

18. — On obtient la *symétrie* par rapport à une ligne droite d'abord par pliage le long de la ligne, puis par dessin ; l'axe d'un segment, l'axe d'un angle, l'axe du triangle isocèle servent à démontrer les propriétés habituelles.

On étudie maintenant de plus près, en dessinant, les propriétés du *rectangle* que l'on connaît depuis la mention de la brique : tracé d'un rectangle de dimensions données ; vérification des propriétés connues du rectangle à l'aide d'un calque de celui-ci qu'on déplace de façon à couvrir le rectangle de nouveau ; la première fois le calque glisse le long du plan à dessiner, chaque diagonale se retourne et se couvre elle-même, d'où l'on voit que les diagonales ont le même milieu et que chacune d'elles divise le rectangle en deux triangles pareils ; la seconde fois l'on retourne le calque, les diagonales s'intervertissent, d'où l'on voit qu'elles sont égales. A chaque triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit sont  $a$  et  $b$  correspond un rectangle dont les côtés sont  $a$  et  $b$  ; d'où l'on voit que la somme des angles aigus du triangle est égale à un angle droit. Ensuite l'on arrive facile-

ment à démontrer que la somme des angles de tout triangle est égale à deux angles droits.

On dit que deux lignes sont *parallèles* lorsque l'on peut, tout le long de ces lignes, introduire entre elles des rectangles où une paire de côtés opposés découpent deux segments correspondants sur les deux lignes. Chaque ligne qui est perpendiculaire (normale) à l'une des lignes est aussi perpendiculaire à l'autre; et tous les segments découpés sur les perpendiculaires sont égaux (la distance des lignes). Toute ligne oblique qui joint deux points situés chacun sur sa ligne est diagonale d'un des rectangles mentionnés ci-dessus et forme donc avec les lignes le même angle aigu.

La partie du plan située entre deux lignes parallèles s'appelle une bande; on vérifie à l'aide d'un calque que la bande peut se déplacer en elle-même, etc...

La *translation* le long d'une ligne s'exécute d'abord à l'aide d'un calque, ensuite seulement en dessinant sur le plan fixe. A ceci s'ajoute intimement l'emploi de la règle et de l'équerre pour dessiner des parallèles et des lignes perpendiculaires entre elles.

On démontre ensuite qu'une série de parallèles passant par une série de points équidistants sur une ligne droite  $l$  sont équidistantes elles-mêmes, car une translation le long de  $l$  qui déplace chaque point de la série sur le point suivant déplace aussi chaque parallèle de la série sur la parallèle suivante. On voit de même qu'une série de parallèles équidistantes coupent une ligne droite en des points équidistants.

Si l'on divise la diagonale d'un rectangle en un nombre de segments égaux, par exemple dix, et trace par chaque point d'intersection deux lignes parallèles aux côtés du rectangle, celui-ci se divise en petits rectangles égaux entre eux. On se sert de cette figure pour introduire l'idée de la similitude des triangles rectangles dans le rapport  $p:q$ ,  $p$  et  $q$  étant des nombres entiers plus petits ou égaux à dix. A ceci s'ajoute l'emploi du papier quadrillé, spécialement du papier en millimètres carrés.

On fait enfin pratiquer de simples mesurages d'aires (rectangle, triangle rectangle, parallélogramme, triangle quelconque, trapèze, etc...) sur des dessins présentés; on mesure les dimensions nécessaires en millimètres entiers, et l'on calcule après l'aire en établissant un jugement estimatif sur l'erreur commise.

19. — Nous achevons ce programme par le théorème de Pythagore, et nous ne saurons à cet égard faire mieux que de citer l'exposé tel qu'il est présenté dans les *Elémens de Clairaut*, seconde partie, XVI-XVII:

« Supposons d'abord que les deux quarrés ABCD, CBFE, dont on se propose de faire un seul carré, soient égaux entr'eux; il est aisé de remarquer que si on tire les diagonales AC et CF, les triangles ABC et CBF feront ensemble la valeur d'un quarré. Donc en transportant au-dessous de AF les deux autres triangles

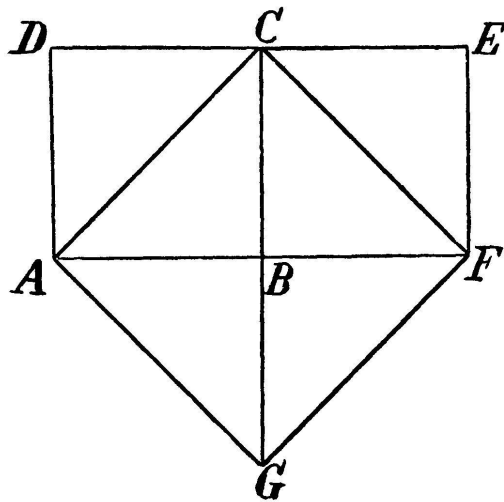


Fig. 2.

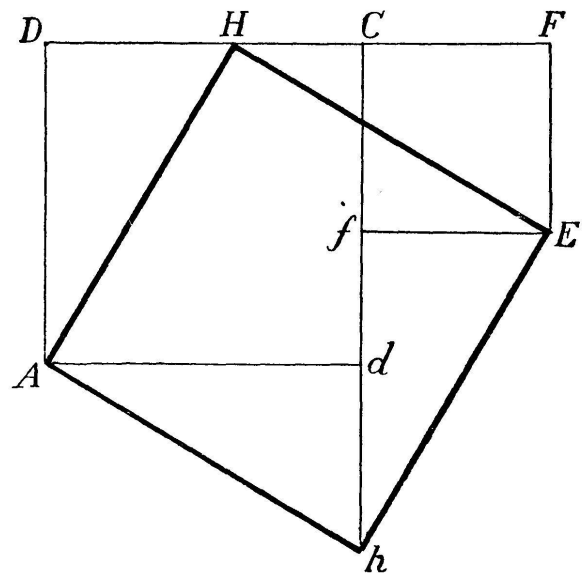


Fig. 3.

DCA et CEF, on fera le quarré ACFG, dont le côté AC fera la diagonale du quarré ABCD, et dont la superficie égalera celle des deux quarrés proposés; ce qui n'a pas besoin d'être démontré.

Supposons présentement qu'on veuille faire un quarré égal à la somme des deux quarrés inégaux ADCd, CFEf, ou, ce qui revient au même, qu'on se propose de changer la figure ADFEfd en un quarré.

En suivant l'esprit de la méthode précédente, on cherchera s'il n'est point possible de trouver dans la ligne DF, quelque point H, tel:

1<sup>o</sup> Que, tirant les lignes AH et HE, et faisant tourner les triangles ADH, EFH, autour des points A et E, jusqu'à ce qu'ils aient les positions Adh, Efh; ces deux triangles se joignent en h.

2° Que les quatre côtés  $AH$ ,  $HE$ ,  $Eh$ ,  $hA$  soient égaux et perpendiculaires les uns aux autres.

Or ce point  $H$  se trouvera en faisant  $DH$  égal au côté  $CF$  ou  $EF$ . Car de l'égalité supposée entre  $DH$  et  $CF$ , il suit premièrement que si on fait tourner  $ADH$  autour de son angle  $A$ , en sorte qu'on lui donne la position  $Adh$ , le point  $H$  arrivé en  $h$  sera distant du point  $C$  d'un intervalle égal à  $DF$ .

De la même égalité supposée entre  $DH$  et  $CF$ , il suit encore que  $HF$  égalera  $DC$ , et qu'ainsi le triangle  $EFH$  tournant autour de  $E$  pour prendre la position  $Efh$ , le point  $H$  arrivera au même point  $h$ , distant de  $C$  d'un intervalle égal à  $DF$ .

Donc la figure  $ADFEfd$  sera changée en une figure à quatre côtés  $AHEh$ . Il ne s'agit donc plus que de voir si ses quatre côtés sont égaux et perpendiculaires les uns aux autres.

Or l'égalité de ces quatre côtés est évidente, puisque  $Ah$  et  $hE$  seront les mêmes que  $AH$  et  $HE$ , et que l'égalité de ces deux derniers se tirera de ce que  $DH$  étant égale à  $CF$  ou à  $FE$ , les deux triangles  $ADH$ ,  $HEF$  seront égaux et semblables.

Il ne reste donc plus qu'à voir si les côtés de la figure  $AHEh$  formeront des angles droits; c'est de quoi il est aisé de s'assurer, en remarquant que pendant que  $HAD$  tournera autour de  $A$ , pour arriver en  $hAd$ , il faudra que le côté  $AH$  fasse le même mouvement que le côté  $AD$ . Or le côté  $AD$  fera un angle droit  $DAd$ , en devenant  $Ad$ . Donc le côté  $AH$  fera aussi un angle droit  $HAh$  en devenant  $Ah$ .

Quant aux autres angles  $H$ ,  $E$ ,  $h$ , il est visible qu'ils seront nécessairement droits. Car il ne serait pas possible qu'une figure terminée par quatre côtés égaux eût un angle droit, sans que les trois autres fussent pareillement droits. »

Dans notre exposé, nous aimerions mieux, à la place de la dernière remarque, démontrer directement que chacun des angles est droit, ce qui s'ensuit simplement du fait que la somme des deux angles aigus du triangle rectangle est égale à un angle droit.

20. — *Intersection et contact.* Deux droites perpendiculaires se coupent en un seul point. Deux droites qui se rencontrent sous un angle oblique n'ont généralement qu'un seul point

commun (point d'intersection). Mais les droites peuvent spécialement être si près l'une de l'autre qu'elles ont de nombreux points communs qui se rassemblent dans un élément continu le long de laquelle les lignes se coupent. Comme exemple nous avons les diagonales d'un rectangle étroit dont les dimensions sont respectivement 20 cm et 4 mm; elles auront, comme dans tout rectangle, le même milieu, mais se coupent le long d'un élément continu dont le centre est ce milieu.

On vérifie les propriétés fondamentales du cercle à l'aide d'un calque (centre, rayon, diamètre, rapport de symétrie, rotation); on examine ensuite les positions différentes d'une droite par rapport au cercle. On définit la tangente comme une droite qui suit la périphérie du cercle le long d'un élément continu, et qui, pour le reste, est hors du cercle. La perpendiculaire  $n$  menée du centre sur la tangente coupe celle-ci en un point qui (à cause de la symétrie par rapport à  $n$ ) doit appartenir à l'élément commun de la tangente et du cercle, et y occuper une position centrale. On appelle ce point le point central ou le point contact de la tangente. « La tangente au point A du cercle » signifie une tangente dont le point contact tombe en A; elle est perpendiculaire au rayon qui passe par ce point.

Tout le cercle se laisse diviser en éléments si petits que chacun fait partie d'une tangente. On peut ainsi concevoir le cercle comme un polygone dont les côtés sont ces petits éléments. La longueur de la périphérie du cercle est le périmètre de ce polygone. On trouve par expériences qu'elle est environ  $3\frac{1}{7}$  fois aussi longue que le diamètre.

L'on divise un arc de cercle en deux ou plusieurs parties égales par expériences à l'aide du compas à deux pointes. On construit de la même façon des polygones réguliers inscrits dans le cercle.

Pour mesurer les angles on introduit le rapporteur.

La distance d'un point P à une droite  $l$  signifie la perpendiculaire PQ menée du point P au pied Q de la perpendiculaire. Le cercle au centre P et rayon PQ a un élément situé autour de Q commun avec la droite. On voit donc que PQ est la distance la plus courte de P à  $l$ , mais qu'il existe d'autres segments de P à  $l$  de même longueur. On en conclut encore qu'en général

l'hypoténuse d'un triangle rectangle est plus grande que chacun des autres côtés, mais qu'elle peut être — en certains cas — égale à l'un de ces côtés quand l'autre est très petit par rapport au premier.

On en déduit enfin qu'en général chaque côté d'un triangle est plus petit que la somme des deux autres, mais qu'il peut en certains cas (quand deux angles du triangle sont très petits) être égal à cette somme.

On dessine la tangente d'un point à un cercle en appuyant la règle contre le point et le cercle, et les tangentes communes de deux cercles en appuyant la règle contre les deux cercles.

Le problème concernant les points d'intersection de deux cercles se traite de même par une vérification empirique directe en se servant de la symétrie par rapport à la droite des centres. Si tant est que les cercles aient un point commun, ou bien ils se coupent en deux points distincts (ou deux éléments distincts) ou bien ils se touchent, c'est-à-dire qu'ils ont un seul élément continu commun pourvu d'un point central situé sur la droite des centres (point contact); ils ont alors la même tangente en ce point.

21. — Aussi loin que s'étend l'histoire des sciences, l'on a entremêlé ou, en tout cas, dressé des conflits entre deux domaines, le monde sensible et la Géométrie abstraite. Le paradoxe de Zénon sur Achille et la tortue, ainsi que les démonstrations géométriques de l'existence des grandeurs incommensurables, voilà des exemples célèbres.

Dans son livre renommé « *La Géométrie grecque* », 1887, page 97-98, Paul TANNERY écrit comme suit :

« Mais, à l'origine, on fondait la corrélation entre la Géométrie et l'Arithmétique sur la proportion géométrique dans l'hypothèse de la commensurabilité de toutes les grandeurs, hypothèse certainement aussi naturelle qu'elle est fausse, et qui, à l'époque où Platon écrivait les Lois, était encore très répandue. La découverte de l'incommensurabilité par Pythagore dut donc causer, en Géométrie, un véritable scandale logique, et pour y échapper on dut tendre à restreindre autant que possible l'emploi du principe de similitude, en attendant qu'on fût arrivé à l'établir



sur une théorie de la proportionnalité indépendante de l'hypothèse de la commensurabilité. »

Oui, telle fut la vraie conséquence historique du « scandale logique ». Mais en réalité le scandale se trouve ailleurs. Il se trouve dans l'hypothèse — tacitement acceptée — de la corrélation entre la Géométrie et l'Arithmétique, l'hypothèse qui décrète que *toute grandeur géométrique correspond à un nombre-mesure déterminé. C'est ici qu'on a introduit une hypothèse fausse.* L'hypothèse de la commensurabilité des grandeurs géométriques, au contraire, n'est pas fausse. Tout mesurage sensible la confirme, et il n'existe pas d'autre mesurage. L'hypothèse de l'uniformité du nombre-mesure, par contre, est fausse. L'Arithmétique dispose de différences très fines, et cela même dans le domaine des nombres rationnels, mais à ces différences indéfiniment fines ne correspondent pas des différences sensibles pour les grandeurs géométriques. *Toute grandeur géométrique n'a pas seulement un, mais plusieurs nombres-mesure qui tous sont corrects.*

Si l'on avait arrêté ce principe comme le vrai principe empirique concernant la corrélation entre la Géométrie et l'Arithmétique, il n'y aurait eu aucun « scandale logique ». Les recherches de Pythagore sur la diagonale d'un carré de côté 1 n'auraient pas abouti à découvrir l'existence de grandeurs « incommensurables », mais seulement à constater qu'on peut attribuer à la diagonale deux nombres-mesure  $a_1$  et  $a_2$  dont le produit est égal à 2.

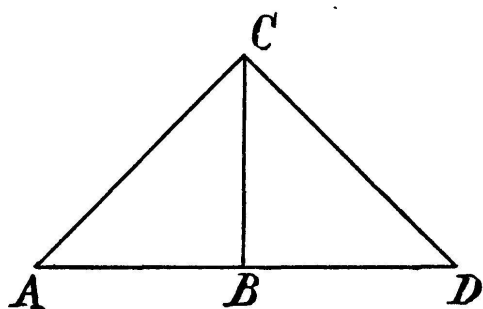


Fig. 4.

On ne saurait, en effet, rien déduire d'autre des deux triangles ABC et ACD que l'existence de deux nombres-mesure  $a_1$  et  $a_2$  pour AC, tels que

$$\frac{a_1}{2} = \frac{1}{a_2}.$$

Quand on fait connaissance ensuite du nombre  $\sqrt{2}$ , par un procédé purement arithmétique, on adopte bien entendu la façon de parler et de calculer qui s'attache au fait que le nombre  $\sqrt{a_1 a_2}$  peut être adopté comme un nombre-mesure artificiel puis-

qu'il est situé entre les deux nombres-mesure naturels  $a_1$  et  $a_2$ ; ceci est une tout autre affaire qui en elle-même est très intéressante et importante, mais qui ne démontre aucunement « l'existence des grandeurs géométriques incommensurables ».

Si l'on doit déterminer un carré dont on a fixé l'aire par le nombre-mesure  $a$ , on aura de même à fixer deux nombres-mesure  $a_1$  et  $a_2$  dont le produit est égal à  $a$ . S'il existe un nombre rationnel dont le carré est égal à  $a$ , on peut employer ou celui-là ou un nombre-mesure avoisinant convenable; au cas contraire on choisit deux nombres différents  $a_1$  et  $a_2$ , suffisamment proches l'un de l'autre, dont le produit est égal à  $a$ . Comme on peut trouver ces nombres en calculant arithmétiquement  $\sqrt{a}$  avec un certain nombre de décimales, on est amené à se servir de la locution que le côté du carré s'exprime par  $\sqrt{a}$ , car on obtient ainsi plusieurs facilités formelles dans le langage. Mais ceci ne prouve d'aucune façon que les grandeurs incommensurables existent en Géométrie, et bien entendu on n'en saurait rien prouver.

Le théorème général de Pythagore peut s'exprimer de la même manière. Pour l'hypoténuse on peut fixer deux nombres-mesure  $c_1$  et  $c_2$  dont le produit est égal à la somme des carrés des nombres-mesure qu'on a fixés pour les côtés de l'angle droit.

On voit ainsi que les nombres irrationnels ne sont point nécessaires pour décrire les mesures des figures géométriques, mais qu'on peut les introduire pour des raisons formelles afin de pouvoir formuler plus facilement les résultats. Et de cette manière on évite ici, une fois de plus, un conflit avec le monde sensible.

22. — Dans l'enseignement on peut introduire la Géométrie quantitative par les exemples suivants:

1<sup>o</sup> Dans un triangle rectangle chacun des côtés de l'angle droit est égal à 1 dm. Trouver le nombre-mesure de l'hypoténuse. Nous commençons par dessiner le triangle, ce qui est chose facile si nous avons du papier en millimètres carrés. Ensuite nous mesurons l'hypoténuse; sa longueur est comprise entre 141 et 142 mm.



On peut cependant aussi trouver ce résultat par calcul à l'aide du théorème de Pythagore. Le carré de chaque côté de l'angle droit étant égal à 10000 mm<sup>2</sup>, le carré de l'hypoténuse doit donc contenir 20000 mm<sup>2</sup>. Le nombre carré le plus proche se trouve par le calcul suivant:

$$\begin{array}{r} \sqrt{20000} = 141 \\ 1 \\ \hline 24) 100 \\ \quad 96 \\ \hline 281) 400 \\ \quad 281 \\ \hline 119 \end{array}$$

$$141^2 = 19881, 142^2 = 20164$$

Donc 141 est un nombre inférieur, 142 un nombre supérieur pour l'hypoténuse.

2° Nous considérons maintenant un plus grand triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit sont 1 m. La longueur de l'hypoténuse sera alors située entre 1414 et 1415 mm calculée comme la racine carrée de 2000000.

On est ainsi amené à la façon de parler qui consiste à dire que l'hypoténuse du triangle rectangle défini ci-dessus est égale à  $\sqrt{2}$ , ce qui, cependant, n'indique que l'algorithme à employer pour trouver les nombres inférieurs et supérieurs qui sont appropriés à chaque cas.

Pour un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit sont respectivement 2 et 3, on arrivera de la même façon, en calculant les nombres-mesure de l'hypoténuse, à l'algorithme qui s'exprime par le symbole  $\sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$  et ainsi de suite.

On arrive ainsi dans tous les cas à calculer l'hypoténuse  $c$  dans un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit sont  $a$  et  $b$  par l'algorithme qui s'exprime par la formule  $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ .

23. — Ces exemples et d'autres pareils doivent être complétés par des exercices destinés à apprendre l'usage d'une table trigonométrique à trois décimales, c'est-à-dire une table qui pour un triangle rectangle où l'hypoténuse AB est 1 m établit la

longueur des côtés de l'angle droit — en millimètres entiers — en fonction de la grandeur — en degrés entiers — de l'angle A. La table doit non seulement contenir les côtés de l'angle droit ( $\sin A$  et  $\cos A$ ) mais aussi leur rapport ( $\operatorname{tg} A$  et  $\operatorname{cotg} A$ ), et les élèves doivent apprendre à se servir de ces tables pour les calculs concernant le triangle rectangle.

On peut y ajouter des applications plus avancées ainsi que la Trigonométrie du triangle ordinaire.

---

## LA GÉOMÉTRIE DE PORT-ROYAL

PAR

Jean ITARD (Paris).

---

1. — L'enseignement élémentaire de la Géométrie, en France, ignore aujourd'hui d'une façon quasi absolue les Eléments d'Euclide. Nous allons essayer de noter, dans cet article, les faits historiques les plus marquants qui expliquent cette désaffection, puis cet oubli du plus ancien monument de la Géométrie élémentaire.

2. — Une première attaque, fort vive, contre les éléments d'Euclide, fut menée par Pierre LA RAMÉE, alias Ramus (1515-1572), mais les massacres de la Saint-Barthélemy semblent avoir arrêté net en France l'influence des Ramistes, qui fut au contraire considérable en Allemagne rhénane.

Les éléments d'Euclide restent encore, durant un siècle, l'ouvrage d'enseignement de beaucoup le plus répandu.

3. — Une nouvelle offensive, victorieuse cette fois-ci, est déclenchée par les Messieurs de Port-Royal, d'abord dans leur « *Logique ou l'art de penser* » (1662), puis dans leur Géométrie en 1667.