

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 37 (1938)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** CONTRIBUTION À LA CLASSIFICATION DES TRANSFORMATIONS CORRÉLATIVES RÉGULIÈRES DANS UN PLAN ET DANS UN ESPACE À TROIS DIMENSIONS  
**Autor:** Vyichlo, F.  
**Kapitel:** 3. — La classification des corrélations dans un espace à trois dimensions.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-28594>

### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 22.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

THÉORÈME 21. — La polarité plane peut être écrite d'une des manières suivantes:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & 0 \\ a_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Le choix des systèmes des coordonnées est évident. (Voir fig. 6 et 7.)

### 3. — LA CLASSIFICATION DES CORRÉLATIONS DANS UN ESPACE À TROIS DIMENSIONS.

THÉORÈME 22. — Chaque corrélation régulière dans l'espace possède un couple involutif des éléments qui coïncident.

*Démonstration:* Le théorème 9 montre que chaque corrélation  $A$  a un couple involutif  $(^1a; ^2\alpha)$ . Soit le point  $^1a$  en dehors du plan  $^2\alpha$ . Les plans  $^2\xi$ , qui correspondent aux points  $^1x$  du plan  $^2\alpha$ , coupent  $^2\alpha$  aux droites  $^2X$ . Les éléments des couples  $(^1x; ^2X)$  correspondent l'un à l'autre dans une corrélation plane  $B$  non singulière (Dét.  $|B| \neq 0$ ) qui possède un couple  $(^1b; ^2B)$  involutif des éléments coïncidents. Ensuite le plan déterminé par le point  $^1a$  et par la droite  $^2B$  correspond involutivement au point  $^1b$  dans  $A$ .

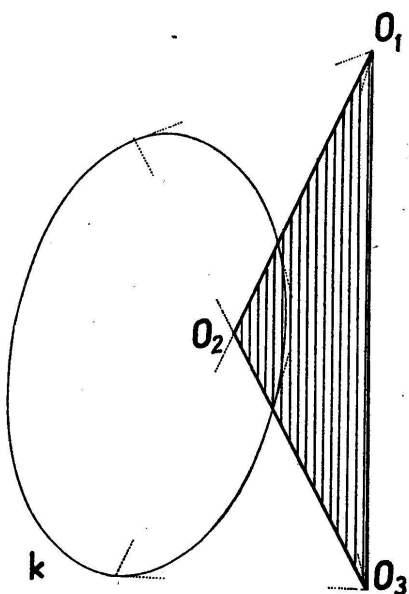


Fig. 7.

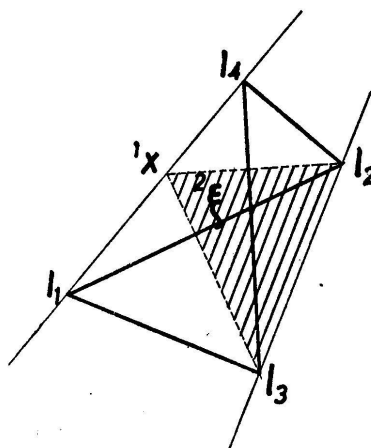


Fig. 8.

THÉOREME 23. — Quand les quadriques fondamentales de la corrélation A ont le rang 4, cinq cas vont se présenter:

1° Les quadriques  $K_1, K_2$  possèdent un quadrilatère gauche  $l_1 l_2 l_3 l_4$  en commun. La corrélation a quatre couples involutifs:

$$(l_1; \lambda_1), \quad (l_2; \lambda_2), \quad (l_3; \lambda_3); \quad (l_4; \lambda_4)$$

où

$$\lambda_1 \equiv (l_1 l_2 l_3), \quad \lambda_2 \equiv (l_1 l_2 l_4), \quad \lambda_3 \equiv (l_1 l_3 l_4), \quad \lambda_4 \equiv (l_2 l_3 l_4).$$

(Voir fig. 8.)

2°  $K_1, K_2$  possèdent un quadrilatère gauche  $l_1 l_2 l_3 l_4$  en commun. La corrélation a les couples involutifs suivants:  $(l_2; \lambda_2), (l_3; \lambda_3), ({}^1x; {}^2\xi)$ , où  $\lambda_2, \lambda_3$  sont les plans, mentionnés plus haut et où le point  ${}^1x$  parcourt la droite  $l_1 l_4$ ; le plan  ${}^2\xi$  est déterminé par les points  ${}^1x, l_2, l_3$ . (Voir fig. 8.)

3°  $K_1, K_2$  possèdent les droites, de système gauche,  $L_2, L_3$  et leur transversale double  $l_4 l_3$  en commun. La corrélation a deux couples involutifs:  $(l_3; \lambda_3), (l_4; \lambda_4)$ , où  $\lambda_3 \equiv (l_4, L_3), \lambda_4 \equiv (l_3, L_2)$ . (Voir fig. 9.)

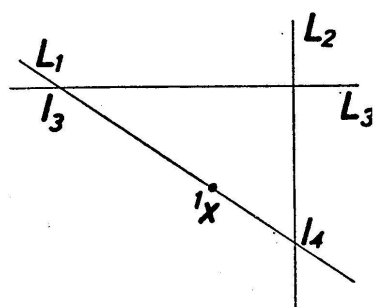


Fig. 9.

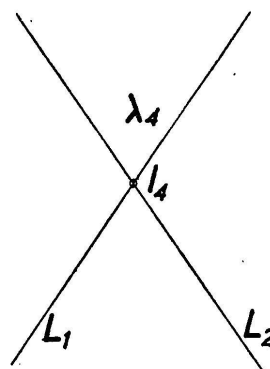


Fig. 10.

4°  $K_1, K_2$  possèdent les droites de système gauche  $L_2, L_3$  et leur transversale double  $l_4 l_3$  en commun. La corrélation a un faisceau des couples involutifs  $({}^1x; {}^2\xi)$ , où  ${}^1x$  parcourt la droite  $l_4 l_3$ ;  ${}^2\xi$  est un plan du faisceau  $(l_4 l_3)$ . (Voir fig. 9.) (Le plan  $(l_3, L_2)$  correspond au point  $l_4$  et le plan  $(l_4, L_3)$  correspond au point  $l_3$ .)

5°  $K_1, K_2$  possèdent deux droites doubles  $L_1, L_2$  (qui se coupent au point  $l_4$ ) en commun, c'est-à-dire que les surfaces  $K_1, K_2$  sont tangentes l'une à l'autre le long des droites  $L_1, L_2$ . (Voir fig. 10.)

La corrélation a un unique couple involutif, à savoir  $(l_4; \lambda_4)$ , où  $\lambda_4 \equiv (L_1, L_2)$ .

*Démonstration:* D'après le théorème 22 il existe un point  $l_4$  qui correspond au plan  $\lambda_4$  et qui coïncide avec ce plan. Ce plan est tangent à la quadrique  $K_1$  au point  $l_4$  (d'après le théorème 10). Alors, il coupe  $K_1$  aux droites  $L_1, L_2$ . Les droites  $L_1, L_2$  sont les droites doubles d'une homographie  $B$  induite en  $\lambda_4$  par l'homographie  $\bar{A}^{-1} \cdot A$ , qui a le plan  $\lambda_4$  pour le plan double. La position des points doubles  $l_2, l_3$  de l'homographie  $B$  et par suite de l'homographie  $\bar{A}^{-1} \cdot A$  donne trois cas:

a) Les points  $l_2, l_3$  sont situés sur les deux droites  $L_1, L_2$ . Les plans  ${}^2\lambda_2 \equiv \lambda_2, {}^2\lambda_3 \equiv \lambda_3$  qui correspondent aux points  ${}^1l_2 \equiv l_2, {}^1l_3 \equiv l_3$  en corrélation  $A$ , possèdent avec la quadrique respectivement les droites  $l_4l_2, l_4l_3$  en commun. Ces plans se coupent en une droite qui coupe la quadrique  $K_1$  (excepté le point  $l_4$ ) au point  $l_1$ . Le plan  ${}^2\lambda_1 \equiv \lambda_1$  qui correspond à ce point  ${}^1l_1 \equiv l_1$  possède les points  $l_1l_2l_3$ . Nous avons ainsi obtenu les cas 1<sup>o</sup> et 2<sup>o</sup> mentionnés plus haut.

b) Seulement un point (par exemple le point  $l_3$ ) est situé sur  $L_1$  mais aucune des droites de la quadrique  $K_1$ , qui sont situées en  $\lambda_4$  (c'est-à-dire  $L_2$ ) ou en  $\lambda_3$  (c'est-à-dire  $L_3$ ) ne contiennent plus de point double de l'homographie  $\bar{A}^{-1} \cdot A$ . Dans le cas qui nous occupe nous obtiendrons les cas 3<sup>o</sup> et 4<sup>o</sup>.

c) Aucune droite des  $L_1, L_2$  (en  $\lambda_4$ ) ne contient un point double de l'homographie  $\bar{A}^{-1} \cdot A$ . C'est le cinquième cas de notre théorème. Le plan  ${}^2\lambda_4 \equiv \lambda_4$ , qui correspond au point  ${}^1l_4 \equiv l_4$  en  $A$ , possède avec la quadrique  $K_1$  deux droites  $L_1, L_2$  en commun, qui sont aussi les droites de la quadrique  $K_2$ , parce qu'elles sont les axes des faisceaux des plans tangents à la quadrique  $K_1$ .

Or, dans le cas a) les surfaces  $K_1, K_2$  ont un quadrilatère gauche en commun, dans le cas b) elles possèdent uniquement les droites  $L_2, L_3$  et leur transversale  $L_1 \equiv l_3l_4$  en commun.

Soit  ${}^1R$  une autre droite commune aux quadriques  $K_1, K_2$ . La droite  ${}^1R$  est une transversale des droites  $L_2, L_3$ . La droite  ${}^2R$  qui correspond à  ${}^1R$  en corrélation  $A$ , soit coïncide avec  ${}^1R$  soit ne coupe jamais la droite  ${}^1R$ . Si  ${}^1R \equiv {}^2R$ , nous obtiendrons les cas 1<sup>o</sup> et 2<sup>o</sup>. Si  ${}^1R$  et  ${}^2R$  sont les droites gauches, la droite  ${}^2R$



coïncide avec  $L_1 \equiv l_3 l_4$ , parce que  ${}^2R$  est aussi la droite commune aux surfaces  $K_1, K_2$ . Or,  ${}^1R \equiv L_1$ .

Dans le dernier cas *c*) les quadriques  $K_1, K_2$  possèdent uniquement les droites  $L_1, L_2$  en commun et point d'autres. Si nous supposons que  $R$  soit une autre droite commune aux  $K_1$  et  $K_2$ , nous déduirons soit que  $R$  coupe  $L_1$  mais jamais  $L_2$ , soit que  $R$  coupe  $L_2$ , mais non  $L_1$ . Or, c'est le cas *b*) considéré plus haut. Si les quadriques  $K_1, K_2$  ont un quadrilatère gauche commun, la corrélation  $A$  possède soit uniquement quatre couples involutifs que nous avons déjà pris en considération, et le cas 1<sup>o</sup> se présente, soit, outre quatre couples mentionnés, un autre couple involutif ( ${}^1p; {}^2\pi$ ). Le point  ${}^1p$  est situé dans un plan du tétraèdre  $l_1 l_2 l_3 l_4$ , mais jamais sur un côté du quadrilatère gauche. (Dans ce dernier cas la surface  $K_1$  est tangente à la quadrique  $K_2$  le long du côté mentionné.) (Voir théorème 10.) Alors le point  ${}^1p$  est situé sur  $l_1 l_4$  ou  $l_2 l_3$ . Ensuite, d'après théorème 9, n'importe quel point de cette droite est le point d'un couple involutif. C'est ce qui, en effet, a lieu tout au plus pour l'une des droites  $l_1 l_4, l_2 l_3$ . (Voir théorème 27.) Nous obtenons ainsi le cas 2<sup>o</sup>.

Si les surfaces  $K_1, K_2$  possèdent un quadrilatère gauche incomplet en commun, la corrélation  $A$  a soit seulement deux couples involutifs, énoncés plus haut (cas 3<sup>o</sup>), soit, outre ces couples, un autre couple involutif ( ${}^1p; {}^2\pi$ ). Le point  ${}^1p$  doit être situé sur le côté  $l_3 l_4$ . Dans le cas contraire la transversale  $X$  des droites gauches  $L_2 L_3$ , passant par le point,  ${}^1p$  est la droite double de l'homographie  $\bar{A}^{-1} \cdot A$ . (Voir théorème 9.) C'est-à-dire : Un point des points d'intersection  $(X \times L_2), (X \times L_3)$  au moins, est un autre point double de cette homographie. (Mais ce n'est pas notre supposition.) Ensuite n'importe quel point de la droite  $l_3 l_4$  est le point d'un couple involutif — d'après le théorème 9. C'est le cas 4<sup>o</sup> qui a lieu.

Enfin si  $K_1, K_2$  sont tangentes l'une à l'autre le long de deux droites  $L_1, L_2$  qui se coupe en  $l_4$ , la corrélation  $A$  possède évidemment un unique couple involutif, à savoir :  $(l_4; \lambda_4)$ , où  $\lambda_4 \equiv (L_1, L_2)$ . Nous obtenons le cas 5<sup>o</sup>.

**THÉORÈME 24.** — Quand les quadriques fondamentales de la corrélation  $A$  ont le rang 3, c'est-à-dire que  $K_1$  est l'ensemble des

points du cône irréductible (au sommet  $\nu$ ), et que  $K_2$  est l'ensemble des plans qui ont pour enveloppée une conique irréductible  $K$  du plan  $\alpha$ , les cas suivants vont se présenter:

6° Le plan  $\alpha$  coupe le cône  $K_1$  en les deux droites distinctes  $L_1, L_2$ , qui sont les tangentes de la conique  $K$  aux points  $l_1, l_2$ . La corrélation a trois couples involutifs:  $(\nu; \alpha)$ ,  $(l_1; \lambda_1)$ ,  $(l_2; \lambda_2)$ , où  $\lambda_1, \lambda_2$  sont les plans tangents du cône  $K_1$  le long de la droite  $L_1$  respectivement  $L_2$ . (Voir fig. 11.)

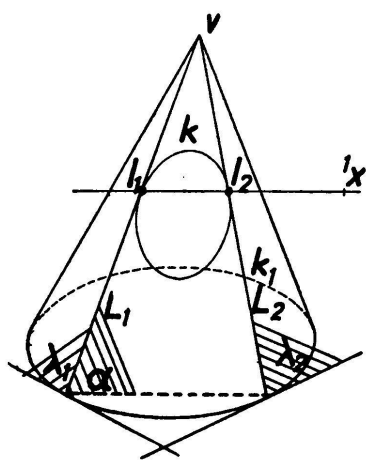


Fig. 11,

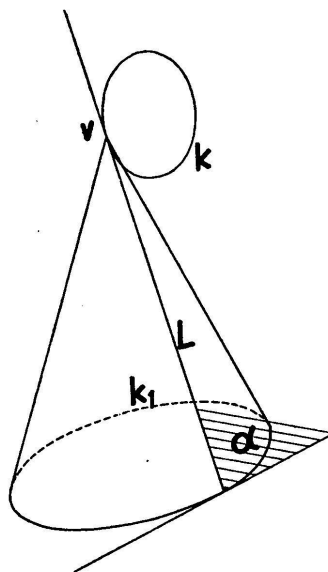


Fig. 12.

7° La position du cône  $K_1$  et de la conique  $K$  est la même que dans le cas précédent (6°). La corrélation possède les couples involutifs:  $(\nu; \alpha)$ ,  $(^1x; ^2\xi)$ , où le point  $^1x$  parcourt la droite  $l_1l_2$ . (Voir fig. 11.)

8° Le plan  $\alpha$  est tangent au cône le long de la droite  $L$ . La conique  $K$  est tangente à cette droite au point  $\nu$ . La corrélation a un seul couple involutif, à savoir  $(\nu; \alpha)$ . (Voir fig. 12.)

*Démonstration:* Le couple  $(\nu; \alpha)$  est le couple involutif — d'après le théorème 12 — et le plan  $\alpha$  possède le point  $\nu$ .

a) Soit  $\alpha$  le plan qui coupe le cône  $K_1$  aux deux droites différentes  $L_1, L_2$ . Une droite au moins (par exemple  $L_1$ ) coupe la conique  $K$  au point  $l_1$  différent du sommet  $\nu$ . Par suite les plans, qui correspondent aux points de la droite  $L_1$  (ils forment un faisceau de l'axe  $L_1$ ) sont tangents à la conique  $K$ , la droite  $L_1$  est aussi la tangente de la courbe  $K$  au point  $l_1$ . De la même manière nous déduirons que la droite  $L_2$  est tangente à  $K$  en  $l_2$ .



10° La position des  $K_1, K_2$  est la même que dans le cas précédent. La corrélation possède les couples involutifs  $(^1x; ^2\xi)$ ,  $(^1y; ^2\eta)$ , où  $^1x$  parcourt la droite d'intersection  $(\alpha \times \beta)$ ,  $^1y$  parcourt la droite qui joint les points  $a, b$  et les plans  $^2\xi, ^2\eta$  sont déterminés de la manière suivante: (Voir fig. 13.)

$$^2\xi \equiv (^1x a b), \quad ^2\eta \equiv [^1y, (\alpha \times \beta)].$$

11° La droite qui joint les points  $a, b$  coïncide avec la droite d'intersection des plans  $\alpha, \beta$ . La corrélation possède les paires involutives  $(^1x; ^2\xi)$ , où  $^1x$  parcourt la droite  $ab$  et où  $^2\xi$  possède la droite  $(\alpha \times \beta)$ . (Voir fig. 14.)

*Démonstration:* Soit  $L$  l'axe du faisceau des plans qui correspondent aux points de la droite  $(\alpha \times \beta)$  en corrélation  $A$ . L'axe  $L$  est formé avec  $(\alpha \times \beta)$  dans une paire gauche de droites, ou coïncide avec  $(\alpha \times \beta)$ .

a) Soient  $L, (\alpha \times \beta)$  les droites formant système gauche. Les points  $^1x, ^2x$  qui correspondent au plan  $\alpha \equiv ^1\alpha \equiv ^2\alpha$ , sont situés dans le plan  $\alpha$ .

Dans le cas contraire les plans qui correspondent aux points du plan  $\alpha$  coupent  $\alpha$  aux droites qui correspondent aux mêmes points en corrélation  $B$  (Dét.  $|B| \neq 0$ ). Mais cette corrélation possède uniquement les paires dont les éléments coïncident — ce qui n'a jamais lieu. Par conséquent les points  $^1x, ^2x$  sont situés sur  $L$ ; on a  $^1x \equiv ^2x \equiv (L \times \alpha)$ . Ce point est aussi un des points  $a, b$  (de la conique  $K_2$ ).

Soit par exemple  $^1x \equiv a$ ; ensuite il y a  $b \equiv (L \times \beta)$ .

Si la corrélation  $A$  n'a d'autre paire involutive, le cas 9° se produit. Dans le cas contraire nous aurons un autre couple  $(^1x; ^2\xi)$ . D'après le théorème 13 le point  $^1x$  doit être situé sur  $ab$  et n'importe quel point de cette droite correspond involutivement à un plan et forme avec lui une paire involutive. Le cas 10° a lieu.

b) Si  $L \equiv (\alpha \times \beta)$ , les points  $a, b$ , sont situés aussi sur  $(\alpha \times \beta)$ . D'après le théorème 13 il n'est point d'autres points des couples involutifs en dehors de la droite  $ab$ . Le cas 11° va se présenter.

THÉOREME 26. — Si les quadriques fondamentales ont le rang 1, c'est-à-dire si  $K_1$  est le plan double  $\alpha$  et si  $K_2$  est le point double  $a$ , une seule possibilité se produit.

12° Le point  $a$  est situé dans le plan  $\alpha$  et forme avec ce plan une paire involutive de la corrélation  $A$ . La corrélation possède les couples involutifs  $(^1x; ^2\xi)$ , où  $^1x$  parcourt le plan  $\alpha$ ,  $^2\xi$  passe par le point  $a$ .

*Preuve:* Les points  $^1a, ^2a$  qui correspondent au plan  $\alpha$  sont situés dans le plan  $\alpha$ . D'après le théorème 12 (et par analogie avec la démonstration du théorème 25  $a$ ) nous avons  $^1a \equiv ^2a \equiv a$ . Enfin il n'existe pas d'autre couple involutif  $(^1x; ^2\xi)$  pour lequel  $^1x$  ne soit pas situé dans  $\alpha$ . Dans le cas contraire on a  $^2\xi \equiv \alpha$  (d'après le théorème 13); mais ce n'est jamais possible.

Dans ce qui suit, nous divisons les cas 1° à 12°, que nous avons pris en considération, en les quatre groupes suivants:

En I<sup>er</sup> groupe sont les cas: 1°, 2°, 9°, 10°;

en II<sup>e</sup> groupe sont les cas: 5°, 6°, 7°, 12°;

en III<sup>e</sup> groupe sont les cas: 3°, 4°, 11°;

en IV<sup>e</sup> groupe est le cas: 8°.

THÉOREME 27. — Les corrélations du premier groupe peuvent être écrites de la manière suivante:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & 0 & a_{23} & 0 \\ 0 & a_{32} & 0 & 0 \\ a_{41} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les conditions nécessaires et suffisantes pour que les cas particuliers aient lieu sont dans:

le cas 1°:  $a_{41} \neq a_{14}$ ,  $a_{32} \neq \pm a_{23}$ ;

le cas 2°:  $a_{41} = a_{14}$ ,  $a_{32} \neq \pm a_{23}$ ;

le cas 9°:  $a_{41} = -a_{14}$ ,  $a_{32} \neq \pm a_{23}$ ;

le cas 10°:  $a_{41} = -a_{14}$ ,  $a_{32} = -a_{23}$ .

*Démonstration:* Le choix du système des coordonnées dans les cas 1° et 2° est le suivant: Le tétraèdre fondamental est donné par les points  $o_1 \equiv l_1$ ,  $o_2 \equiv l_2$ ,  $o_3 \equiv l_3$ ,  $o_4 \equiv l_4$ .

Dans les cas 9° et 10° nous choisissons  $o_1 \equiv a$ ,  $o_4 \equiv b$ ; les points  $o_2$  et  $o_3$  sont arbitraires sur la droite  $(\alpha \times \beta)$ . Les plans  ${}^2\eta \equiv (a_{14}y_4 : 0 : 0 : a_{41}y_1)$ ,  ${}^1\eta \equiv (a_{41}y_1 : 0 : 0 : a_{14}y_4)$  qui correspondent au point arbitraire  $(y_1 : 0 : 0 : y_4)$  situé sur  $o_1o_4 \equiv (\alpha \times \beta)$  doivent coïncider. (Voir le cas 9°.) On en déduit la relation:  $a_{14}^2 = a_{41}^2$ .

*Appendice à la démonstration du théorème 23:* Il n'est pas possible, dans le cas général, que tous les points des droites  $o_1o_4$ ,  $o_2o_3$  appartiennent aux couples involutifs. Si ce cas se présentait nous pourrions en déduire:  $a_{14} = a_{41}$ ,  $a_{23} = a_{32}$ .<sup>10</sup> D'après le théorème 7 la polarité a lieu.

THÉORÈME 28. — La matrice des corrélations du deuxième groupe est la suivante:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & 0 & a_{23} & 0 \\ 0 & a_{32} & 0 & 0 \\ a_{41} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{où } a_{11} \neq 0.$$

Le cas 5° se présente quand et uniquement quand

$$a_{41} \neq \pm a_{14}, \quad a_{23} \neq \pm a_{32};$$

pour le cas 6° il est nécessaire et il suffit que:

$$a_{41} = -a_{14}, \quad a_{32} \neq \pm a_{23};$$

pour le cas 7° que:

$$a_{41} = -a_{14}, \quad a_{32} = a_{23};$$

pour le cas 12° que:

$$a_{41} = -a_{14}, \quad a_{32} = -a_{23}.$$

*Démonstration:* Le choix du système de coordonnées est le suivant: Dans le cas 5°:  $o_4 \equiv l_4$ , le plan  $\lambda_4 \equiv (L_1, L_2)$  a l'équation  $x_1 = 0$ ;  $o_2$  est un point sur  $L_2$ , ( $o_2 \not\equiv o_4$ ),  $o_3$  est un point sur  $L_1$ , ( $o_3 \not\equiv o_4$ ). Le plan  $x_3 = 0$  correspond au point  $o_2$  en A et  $x_2 = 0$  correspond au point  $o_3$ . Enfin  $o_1$  est le point d'intersection des droites de la surface  $K_2$  qui sont situées dans les plans  $x_2 = 0$ ,  $x_3 = 0$ .

<sup>10</sup> Nous obtenons, en tenant compte de la caractéristique de la corrélation A,  $a_{14} \neq -a_{41}$ ,  $a_{23} \neq -a_{32}$ .

Les cas 6<sup>o</sup>, 7<sup>o</sup>:  $o_4 \equiv v$ ,  $o_2 \equiv l_1$ ,  $o_1 \equiv l_2$ , les plans  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  ont les équations  $x_3 = 0$  respectivement  $x_2 = 0$ .

Le cas 12<sup>o</sup>:  $o_4 \equiv a$ , le plan  $\alpha$  a l'équation  $x_1 = 0$ . Les points  $o_2$ ,  $o_3$  sont les points arbitraires dans le plan  $\alpha$ , mais ils ne sont pas situés sur une droite qui passe par  $a$ . Les plans  $x_2 = 0$ ,  $x_3 = 0$  correspondent respectivement aux points choisis  $o_3$ ,  $o_2$ . Le coefficient  $a_{11}$  est différent de zéro afin que les cas du premier groupe n'aient pas lieu. Nous ferons la distinction des cas 5<sup>o</sup>, 6<sup>o</sup>, 7<sup>o</sup>, par analogie avec celle que nous avons faite dans les cas 1<sup>o</sup> et 2<sup>o</sup>.

THÉORÈME 29. — La matrice des corrélations du troisième groupe peut être écrite de la manière suivante:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{14} \\ a_{21} & 0 & a_{23} & 0 \\ 0 & a_{32} & 0 & 0 \\ a_{41} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{où } a_{21} \neq 0.$$

Le cas 3<sup>o</sup> va se présenter quand et uniquement quand

$$a_{41} \neq -a_{14}, \quad a_{32} \neq -a_{23} \\ a_{14}a_{23} - a_{41}a_{32} \neq 0.$$

Le cas 4<sup>o</sup>:

$$a_{41} \neq -a_{14}, \quad a_{32} \neq -a_{23} \\ a_{14}a_{23} - a_{41}a_{32} = 0;$$

Le cas 11<sup>o</sup>:

$$a_{41} = -a_{14}, \quad a_{32} = -a_{23}.$$

*Démonstration*: Dans les cas 3<sup>o</sup> et 4<sup>o</sup> nous choisissons le système des coordonnées suivant:  $o_3 \equiv l_3$ ,  $o_4 \equiv l_4$ , le point  $o_2$  est situé sur  $L_2$  et correspond au plan  $x_3 = 0$ . Le point  $o_1$  est le point d'intersection du plan  $x_3 = 0$  avec la droite  $L_1$ . Le choix du tétraèdre fondamental dans le dernier cas 11<sup>o</sup> du troisième groupe est le suivant:  $o_4 \equiv a$ ,  $o_3 \equiv b$ ; les plans  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 0$  sont les plans  $\alpha$  (resp.  $\beta$ ). Enfin le point  $o_1$  se trouve sur la droite d'intersection des plans  $x_3 = 0$ ,  $\beta$ . Nous déduirons la relation  $a_{21} \neq 0$  en exprimant que la droite  $o_4o_2$  ne contient que le point  $o_4$ , considéré comme l'élément d'un couple involutif.

Enfin nous allons différencier les cas 3<sup>o</sup> et 4<sup>o</sup> (l'un et l'autre) à l'aide de la méthode mentionnée dans les cas 1<sup>o</sup> et 2<sup>o</sup>.



THÉORÈME 30. — Les corrélations du quatrième groupe sont:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & 0 \\ a_{31} & -a_{23} & 0 & 0 \\ -a_{14} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{où } a_{22} \neq 0, \quad a_{31} \neq 0.$$

*Démonstration:* Le choix du système fondamental des coordonnées est le suivant:  $o_4 \equiv \nu$ ; le plan  $\alpha$  a l'équation  $x_1 = 0$ ;  $o_3$  est situé sur L, le plan  $x_3 = 0$  correspond à  $o_3$  dans A. Le plan  $x_4 = 0$  contient la seconde tangente (par  $o_3$ ) de la conique K et le point  $o_1$  correspond à  $x_4 = 0$  dans A. Enfin  $o_2$  est le point commun aux plans  $x_1 = 0$ ,  $x_4 = 0$  et au plan qui correspond à  $o_1$  dans  $\bar{A}$ . Le cône  $K_1$  a le sommet  $\nu \equiv o_4$  et il est tangent au plan  $x_1 = 0$  le long de la droite  $\overline{o_4 o_3}$ . On en déduit  $a_{23} = -a_{32}$ ,  $a_{41} = -a_{14}$ . Le cône  $K_1$  n'est pas irréductible. Or,  $a_{22} \neq 0$ ,  $a_{21} \neq 0$ .

THÉORÈME 31. — La matrice de la corrélation polaire (de la polarité) peut être écrite des manières suivantes:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & 0 & a_{23} & 0 \\ 0 & a_{23} & 0 & 0 \\ a_{14} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{pmatrix}.$$

Ces formules correspondent aux deux équations bien connues des quadriques irréductibles.

THÉORÈME 32. — La matrice de la corrélation nulle (du système nul) peut être écrite:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & 0 & a_{23} & 0 \\ 0 & -a_{23} & 0 & 0 \\ -a_{14} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le choix du tétraèdre fondamental des coordonnées y est suivant: Un point de l'espace soit  $o_4$ ; le plan qui lui correspond dans A soit  $x_1 = 0$ . Soient  $o_2, o_3$  deux points arbitraires de ce plan. Que les plans correspondants à ces points dans A soient  $x_3 = 0$  respectivement  $x_2 = 0$  et enfin soit  $o_1$  un point de la droite d'intersection des plans  $x_2 = 0, x_3 = 0$ . Or, le tétraèdre fondamental est choisi.