Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 37 (1938)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: FORMULES DU TÉTRAÈDRE

Autor: Delens, Paul

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-28593

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 04.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

FORMULES DU TÉTRAÈDRE

PAR

M. Paul Delens (Le Havre).

Des recherches récentes, exposées en particulier dans *Mathesis* (Sar la géométrie du tétraèdre, LI, 1937, p. 119-127 et 444-456; LII, 1938, p. 62-79), m'ont conduit à l'introduction, pour le tétraèdre, d'un système fondamental (surabondant) de sept angles, liés par deux relations identiques. Ceci permet d'établir, à partir d'une grandeur de base, des formules heptagonométriques du tétraèdre, suffisamment analogues aux formules trigonométriques du triangle, qui semblent susceptibles de rendre les mêmes services — au moins quand il s'agit de propriétés en rapport avec la géométrie anallagmatique; mais les relations connues relatives aux propriétés projectives, affines et purement métriques du tétraèdre s'expriment simplement aussi avec les angles en question.

Les démonstrations nécessaires ayant déjà été publiées (loc. cit.), je me contente ici — à part quelques rappels de relations intermédiaires et quelques adjonctions — de donner un tableau des formules explicites, relatives aux principaux éléments, qui en découlent; tableau qu'on prolongera sans peine en tenant compte de mes Notes précitées et des résultats classiques.

1. Définitions et notations. — Soient $\mathcal{E} \equiv ABCD$ le tétraèdre de base, V son volume, R le rayon de sa sphère circonscrite \mathcal{O} , l et sin \mathcal{E} la corde et le sinus du tétraèdre. Les longueurs des arêtes sont BC = a, CA = b, AB = c, DA = a', DB = b', DC = c'

Je désigne par J = A, B, C, D les sommets de \mathcal{E} et les angles des faces opposées avec la sphère \mathcal{O} . L'indice J est affecté aux éléments relatifs aux sommets et aux faces opposées; les angles des faces sont ainsi B_A , C_A , D_A ; C_B , D_B , A_B ; etc. De même h_J , s_J , R_J , τ_J , hauteurs de \mathcal{E} , aires des faces, rayons des cercles circonscrits à ces faces, angles trièdres de \mathcal{E} ; sin τ_J , sinus de l'angle trièdre τ_J ;

$$v_{\rm J}=4{\rm R}_{\rm J}s_{\rm J}=ab'c',\;bc'a',\;ca'b',\;abc$$
 (J = A, B, C, D).

L'indice i=1, 2, 3 est relatif aux paires d'arêtes opposées DA et BC, DB et CA, DC et AB; associé aussi aux couples de lettres j, j' et $\mathcal{J}, \mathcal{J}'; h_i$ et η_i sont les bihauteurs de \mathcal{E} et les angles des arêtes opposées

Je désigne par Θ un triangle associé à \mathfrak{T} , J_i ses angles, \mathfrak{T} sa surface, \mathcal{R} , \mathcal{R}_0 , \mathcal{R}_i les rayons des cercles circonscrit, inscrit, exinscrits. Les éléments du triangle associé Θ_s de von Staudt, de côtés

$$j_i = aa', bb', cc'$$
 $(i = 1, 2, 3)$

reçoivent en général l'indice s (S_s , R_s , R_{0s} , R_{is}), et ceux du triangle associé $r\acute{e}duit$ (de von Staudt) Θ_s^0 de côtés $j_i^0 = j_i/2R$, l'indice $sup\acute{e}rieur$ 0; plus généralement cet indice affectera les éléments $r\acute{e}duits$, obtenus en divisant par 2R les quantités homogènes à des longueurs.

Le système d'angles fondamentaux est celui des J_i et J, en relation étroite avec celui des grandeurs j_i et v_j . La grandeur de base choisie dans la suite est 2R.

A bréviations:

$$\begin{split} \mathbf{\sigma}_i,\; \mathbf{\gamma}_i,\; \mathbf{\theta}_i,\; \mathbf{\chi}_i &\quad \text{pour} &\quad \sin \mathbf{J}_i,\; \cos \mathbf{J}_i,\; \operatorname{tg}\, \mathbf{J}_i,\; \operatorname{cotg}\, \mathbf{J}_i,\\ \mathbf{\sigma}_{\mathbf{J}},\; \mathbf{\gamma}_{\mathbf{J}},\; \mathbf{\theta}_{\mathbf{J}},\; \mathbf{\chi}_{\mathbf{J}} &\quad \text{pour} &\quad \sin \mathbf{J} \;,\; \cos \mathbf{J} \;,\; \operatorname{tg}\, \mathbf{J} \;,\; \operatorname{cotg}\, \mathbf{J} \;,\\ \mathbf{P} &= \mathbf{\sigma}_{\mathbf{1}} \mathbf{\sigma}_{\mathbf{2}} \mathbf{\sigma}_{\mathbf{3}} \;, &\quad \mathbf{S} &= \mathbf{\sigma}_{\mathbf{1}} + \mathbf{\sigma}_{\mathbf{2}} + \mathbf{\sigma}_{\mathbf{3}} \;;\\ \mathbf{Q}_i(x_{\mathbf{J}}) &= x_{\mathbf{B}} x_{\mathbf{C}} + x_{\mathbf{D}} x_{\mathbf{A}} \;, &\quad x_{\mathbf{C}} x_{\mathbf{A}} + x_{\mathbf{D}} x_{\mathbf{B}} \;, &\quad x_{\mathbf{A}} x_{\mathbf{B}} + x_{\mathbf{D}} x_{\mathbf{C}} \end{split}$$

pour quatre quantités arbitraires $x_{\scriptscriptstyle \rm J}$, et

$$2\,\Sigma\,\sigma_i^{}\,{\bf Q}_i^{}(x_{\scriptscriptstyle \rm J})\equiv 2{\bf P}\,(x_{\scriptscriptstyle \rm J})\,\equiv\,\Sigma x_{\scriptscriptstyle \rm J}^{}\,{\bf P}_{\scriptscriptstyle \rm J}^{}\,(x_{\scriptscriptstyle \rm J}^{})\ .$$

Pour les χ_J , je pose

$$\mathbf{Q}_{i}(\mathbf{\chi_{J}}) = \mathbf{Q}_{i}$$
 , $\mathbf{P}(\mathbf{\chi_{J}}) = \mathbf{P}$ (identité fondamentale), $\mathbf{P}_{\mathbf{J}}(\mathbf{\chi_{J}}) = \mathbf{P}_{\mathbf{J}}$.

Remarques. — Dans les formules qui suivent, les mesures d'angles sont prises en valeur absolue (de 0 à 2π); je ne reviens pas sur les conventions d'orientation que nécessite en particulier la comparaison de divers tétraèdres. Comme en trigonométrie, les formules introduiront pour certaines quantités des évaluations algébriques. Enfin ces formules seront, suivant les cas, écrites avec des lettres ou indices courants $(J, i, j, \mathcal{F}, ...)$ ou particularisés — les formules semblables à celle donnée s'obtenant alors par permutation circulaire.

2. Relations préliminaires. — Les identités angulaires fondamentales sont

$$\Sigma J_i = \pi$$
 , $\Sigma \sigma_i Q_i = P$ $\left(2P = \Sigma \chi_J P_J , P_J = \frac{\partial P}{\partial \chi_J}\right)$ (1)

La première entraîne de nombreuses identités trigonométriques connues du triangle Θ . Je détaille pour la seconde les deux systèmes de relations inverses.

$$\begin{cases}
P_{A} = \cdot & \sigma_{3}\chi_{B} + \sigma_{2}\chi_{C} + \sigma_{1}\chi_{D}, \\
P_{B} = \sigma_{3}\chi_{A} & \cdot + \sigma_{1}\chi_{C} + \sigma_{2}\chi_{D}, \\
P_{C} = \sigma_{2}\chi_{A} + \sigma_{1}\chi_{B} & \cdot + \sigma_{3}\chi_{D}, \\
P_{D} = \sigma_{1}\chi_{A} + \sigma_{2}\chi_{B} + \sigma_{3}\chi_{C}, & \cdot \\
2P\chi_{A} = -P_{A} + \gamma_{3}P_{B} + \gamma_{2}P_{C} + \gamma_{1}P_{D}, \\
2P\chi_{B} = \gamma_{3}P_{A} & -P_{B} + \gamma_{1}P_{C} + \gamma_{2}P_{D}, \\
2P\chi_{C} = \gamma_{2}P_{A} + \gamma_{1}P_{B} & -P_{C} + \gamma_{3}P_{D}, \\
2P\chi_{D} = \gamma_{1}P_{A} + \gamma_{2}P_{B} + \gamma_{3}P_{C} & -P_{D},
\end{cases}$$
(2)

D'après l'identité $\Sigma \sigma_i \gamma_i = 2P$ de Θ , on peut encore donner à $(1)_2$ une des formes

$$\Sigma \sigma_i (\gamma_i - Q_i) = P$$
 ou $\Sigma \sigma_i (2Q_i - \gamma_i) = 0$. (1')

En posant

$$\Pi_i = Q_i(P_J) = P_B P_C + P_D P_A$$
, $P_C P_A + P_D P_B$, $P_A P_B + P_D P_C$,

on déduit de (2) les relations des types

$$\begin{split} \Pi_{\mathbf{1}} &= \left(\Sigma\,\sigma_{i}^{2}\right)\mathrm{Q}_{i} \,+\, 2\,\sigma_{\mathbf{1}}\,\sigma_{\mathbf{2}}\,\mathrm{Q}_{\mathbf{2}} \,+\, 2\,\sigma_{\mathbf{1}}\,\sigma_{\mathbf{3}}\,\mathrm{Q}_{\mathbf{3}} \,+\, \sigma_{\mathbf{2}}\,\sigma_{\mathbf{3}}\left(\Sigma\,\chi_{\mathbf{J}}^{2}\right)\;,\\ &+ 2\,\mathrm{P}^{2}\,\mathrm{Q}_{\mathbf{1}} \,=\, \left(1\,+\,\Sigma\,\gamma_{i}^{2}\right)\Pi_{\mathbf{1}} \,+\, 2\,(\gamma_{\mathbf{1}}\,\gamma_{\mathbf{2}} \,-\,\gamma_{\mathbf{3}})\,\Pi_{\mathbf{2}}\\ &+\, 2\,(\gamma_{\mathbf{1}}\,\gamma_{\mathbf{3}} \,-\,\gamma_{\mathbf{2}})\,\Pi_{\mathbf{3}} \,+\, (\gamma_{\mathbf{2}}\,\gamma_{\mathbf{3}} \,-\,\gamma_{\mathbf{1}})\,\left(\Sigma\,\mathrm{P}_{\mathbf{J}}^{2}\right)\;; \end{split}$$

d'où, en tenant compte de $\sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1^2 = 2\sigma_2\sigma_3\gamma_1 = 2P\chi_1$,

$$\begin{split} &\sigma_{\! 1} \, \Pi_{\! 1} = \, \mathrm{P} \big\{ \, \Sigma \, \sigma_{\! i}^2 \, + \, \Sigma \chi_{\! J}^2 \, - \, 2 \, (\sigma_{\! 2} \, \mathrm{Q}_{\! 2} \, + \, \sigma_{\! 3} \, \mathrm{Q}_{\! 3}) \, \chi_{\! 1} \big\} \; , \\ &\frac{\sigma_{\! 3} \, \Pi_{\! 3} \, - \, \sigma_{\! 2} \, \Pi_{\! 2}}{2 \, \mathrm{P}} = \, \gamma_{\! 3} \, \mathrm{Q}_{\! 3} \, - \, \gamma_{\! 2} \, \mathrm{Q}_{\! 2} \, - \, \mathrm{P} \, (\chi_{\! 3} \, - \, \chi_{\! 2}) \; . \end{split}$$

Finalement, d'après l'identité $P(\chi_3 - \chi_2) = \gamma_3^2 - \gamma_2^2$ de Θ , on obtient

$$\frac{\sigma_3 \Pi_3 - \sigma_2 \Pi_2}{2 P} = \gamma_3 (Q_3 - \gamma_3) - \gamma_2 (Q_2 - \gamma_2) . \qquad (3)$$

3. Formules usuelles. — Les relations essentielles utilisées ici étant

$$\begin{cases} v_{J} = 2s_{J} \cdot 2R_{J}, & 6V = 2s_{J}h_{J}, \\ \frac{v_{J}}{6V} = \frac{2R_{J}}{h_{J}} = \frac{P_{J}}{P}, \end{cases}$$
(4)

$$l = \frac{h_{\rm A} h_{\rm B} h_{\rm C} h_{\rm D}}{6 \, \rm V} \,, \tag{5}$$

$$2\mathcal{S}_s = 6V \cdot 2R$$
 ou $6V = 2\mathcal{S}_s^0 \cdot 2R$, (6)

$$\begin{cases}
j_{1} = aa' = 2 \mathcal{R}_{s} \sigma_{1} , & j_{1} j_{2} j_{3} = (2 \mathcal{R}_{s})^{3} P = \sqrt{v_{A} v_{B} v_{C} v_{D}} , \\
a^{2} = \frac{v_{D} v_{A}}{j_{2} j_{3}} , & a'^{2} = \frac{v_{B} v_{C}}{j_{2} j_{3}} ,
\end{cases} (7)$$

on obtient

$$2R_{J} = 2R\sigma_{J} , \quad h_{J} = 2RP\frac{\sigma_{J}}{P_{J}} ,$$

$$6V = \frac{(2RP)^{3}}{P_{A}P_{B}P_{C}P_{D}} ,$$

$$2s_{A} = \frac{(2RP)^{2}}{\sigma_{A}P_{B}P_{C}P_{D}} , \quad v_{A} = 2R\frac{(2RP)^{2}}{P_{B}P_{C}P_{D}} ,$$

$$a = 2R\sqrt{\frac{P\sigma_{I}}{P_{B}P_{C}}} , \quad a' = 2R\sqrt{\frac{P\sigma_{I}}{P_{D}P_{A}}} , \quad j_{i} = (2R)^{2}\frac{P\sigma_{i}}{\sqrt{P_{A}P_{B}P_{C}P_{D}}} ,$$

$$2\mathcal{R}_{S} = (2R)^{2}\frac{P}{\sqrt{P_{A}P_{B}P_{C}P_{D}}} , \quad 2\mathcal{S}_{S} = 2R\frac{(2RP)^{3}}{P_{A}P_{B}P_{C}P_{D}} ,$$

$$l = 2RP\sigma_{A}\sigma_{B}\sigma_{C}\sigma_{D} .$$
(I)

Ajoutons encore à ces formules

$$a^2 + a'^2 = (2 \, \mathrm{R})^2 \frac{\mathrm{P} \, \sigma_1 \, \Pi_1}{\mathrm{P_A} \, \mathrm{P_B} \, \mathrm{P_C} \, \mathrm{P_D}} \; ,$$

$$\frac{c^2 + c'^2 - (b^2 + b'^2)}{2 \, a a'} = \frac{\sigma_3 \, \Pi_3 - \sigma_2 \, \Pi_2}{2 \, \sigma_1 \, \sqrt{\mathrm{P_A} \, \mathrm{P_B} \, \mathrm{P_C} \, \mathrm{P_D}}} \; , \qquad h_i \sin \, \eta_i = \frac{2 \, \mathrm{RP^2}}{\sigma_i \, \sqrt{\mathrm{P_A} \, \mathrm{P_B} \, \mathrm{P_C} \, \mathrm{P_D}}} \; ; \tag{II}$$

le deuxième est l'expression de cos η_1 , tandis que les quantités $h_i \sin \eta_i$ sont les hauteurs du triangle Θ_s^0 .

4. Autres formules. — On utilisera ici en particulier les relations

$$\frac{\sin \alpha}{a'} = \frac{6 \,\mathrm{V}}{2 \,s_{\mathrm{B}} \cdot 2 \,s_{\mathrm{c}}} \;, \quad \frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sigma_{\mathrm{B}} \,\sigma_{\mathrm{c}}}{2 \,\mathcal{R}_{\mathrm{s}}^{\,0}} \;, \tag{8}$$

$$l = 2 R \sin \mathcal{E} = h_{\rm J} \sin \tau_{\rm J} , \qquad (9)$$

$$\sin D_{A} = \frac{\sin \tau_{D}}{\sin \mathcal{B} \sin \mathcal{C}} = \frac{a}{2R_{A}}$$
 (10)

(g)

Les principales formules relatives aux angles sont

$$\begin{split} \sin \alpha &= \sqrt{\frac{P_{_{D}}P_{_{A}}\sigma_{_{1}}}{P}} \cdot \sigma_{_{B}}\sigma_{_{C}} \;, \quad \sin \alpha' &= \sqrt{\frac{P_{_{B}}P_{_{C}}\sigma_{_{1}}}{P}} \cdot \sigma_{_{D}}\sigma_{_{A}} \;, \\ & \sin \alpha \; \sin \alpha' = \frac{\sqrt{P_{_{A}}P_{_{B}}P_{_{C}}P_{_{D}}}}{P} \; \sigma_{_{A}}\sigma_{_{B}}\sigma_{_{C}}\sigma_{_{D}}\sigma_{_{1}} \;, \\ & \sin \beta \; \sin \beta \; = \frac{\sqrt{P_{_{B}}P_{_{C}}\sigma_{_{2}}\sigma_{_{3}}}}{P} \; \sigma_{_{A}}^{2}\sigma_{_{B}}\sigma_{_{C}}P_{_{D}} \;, \\ & \cos \alpha \; = -\gamma_{_{B}}\gamma_{_{C}} + \sigma_{_{B}}\sigma_{_{C}}\gamma_{_{1}} \;, \quad \cos \alpha' \; = -\gamma_{_{D}}\gamma_{_{A}} + \sigma_{_{D}}\sigma_{_{A}}\gamma_{_{1}} \;, \quad (III) \\ & \cos \alpha \; \cos \alpha' \; = \gamma_{_{A}}\gamma_{_{B}}\gamma_{_{C}}\gamma_{_{D}} + \sigma_{_{A}}\sigma_{_{B}}\sigma_{_{C}}\sigma_{_{D}}\gamma_{_{1}}(\gamma_{1} - Q_{1}) \;, \\ & \sin \beta \; = P\sigma_{_{A}}\sigma_{_{B}}\sigma_{_{C}}\sigma_{_{D}} \;, \\ & \sin \delta \; = P\sigma_{_{A}}\sigma_{_{B}}\sigma_{_{C}}\sigma_{_{D}} \;, \qquad \sin D_{_{A}} \; = \frac{P}{\sigma_{_{A}}\sqrt{P_{_{B}}P_{_{C}}\sigma_{_{2}}\sigma_{_{3}}}} \;, \\ & \cos \eta_{_{1}} \; = \frac{\sigma_{_{3}}\Pi_{_{3}} - \sigma_{_{2}}\Pi_{_{2}}}{2\sigma_{_{1}}\sqrt{P_{_{A}}P_{_{B}}P_{_{C}}P_{_{D}}}} \;. \end{split}$$

On trouvera, en tenant compte de $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = \theta_1 \theta_2 \theta_3$, une expression symétrique simple

$$\Sigma \theta_i \cos \mathcal{J} \cos \mathcal{J}' = \gamma_A \gamma_B \gamma_C \gamma_D \theta_1 \theta_2 \theta_3 + \sigma_A \sigma_B \sigma_C \sigma_D P . \quad (11)$$

Pour les angles η_i on a l'identité connue Σj_i cos $\eta_i = 0$ ou $\Sigma \sigma_i$ cos $\eta_i = 0$, résultant encore d'une autre identité intéressante; en effet, d'après (III) et (3),

$$\begin{split} \cos\mathcal{C}\cos\mathcal{C}\cos\mathcal{C}' - \cos\mathcal{B}\cos\mathcal{B}' &= \sigma_{_{\!A}}\sigma_{_{\!B}}\sigma_{_{\!C}}\sigma_{_{\!D}}\big\{\,\gamma_3(\gamma_3 - Q_3) - \gamma_2(\gamma_2 - Q_2)\,\big\} \\ &= -\sigma_{_{\!A}}\sigma_{_{\!B}}\sigma_{_{\!C}}\sigma_{_{\!D}}\frac{\sigma_3\Pi_3 - \sigma_2\Pi_2}{2\,P} = -\sigma_{_{\!A}}\sigma_{_{\!B}}\sigma_{_{\!C}}\sigma_{_{\!D}}\frac{\sqrt{P_{_{\!A}}P_{_{\!B}}P_{_{\!C}}P_{_{\!D}}}}{P}\sigma_1\cos\eta_1 \ , \\ &\cos\mathcal{C}\cos\mathcal{C}' - \cos\mathcal{B}\cos\mathcal{B}' = -\sin\mathcal{A}\sin\mathcal{A}'\cos\eta_1 \ . \end{split}$$

5. Coordonnées tétraédriques. Angles de Brocard. — Rappelons, au risque d'une banalité, que la recherche des relations de position doit précéder l'établissement des formules numériques, qui les traduisent de façon fragmentaire. A l'origine de nos formules sont les relations du tétraèdre & avec son tétraèdre tangentiel et des systèmes desmiques de tétraèdres reposant sur

un point remarquable, le deuxième point de Lemoine L, et ses points associés. Nous devrions compléter nos tableaux de formules par des tableaux de coordonnées de points et autres éléments. Les relations en cause nous ont en particulier conduit à l'introduction, à côté des coordonnées tétraédriques barycentriques et normales, d'un nouveau système de coordonnées, dites principales, dont L est le point-unité. Les coordonnées barycentriques, normales et principales absolues d'un point, désignées par $\mu_{\rm J},\,d_{\rm J},\,\varpi_{\rm J}$, sont liées par les relations

La comparaison avec (13) donne aussi

$$\varpi_{\rm J} = \frac{2 \,\mathrm{RP}}{\mathrm{P}_{\rm J}} \,\mu_{\rm J} \;, \qquad \Sigma \,\mathrm{P}_{\rm J} \,\varpi_{\rm J} = 2 \,\mathrm{RP} \;, \qquad (13')$$

donc on passe d'un système de coordonnées barycentriques ou normales homogènes à un système de coordonnées principales homogènes en divisant respectivement les premières par les quantités σ_J , les secondes par les quantités P_J . Aux divers systèmes de coordonnées tétraédriques se rattachent, comme on sait, les transformations dites inversions tétraédriques (barycentrique, normale, principale 1 , ...). Tirons-en quelques conséquences. Les χ_J sont des coordonnées principales homogènes du centre O de la sphère O; quels sont les points ayant pour coordonnées principales homogènes les σ_J , ou les P_J ? L'inverse tétraédrique principal du premier a ses coordonnées normales égales, donc est le centre I de la sphère inscrite à I; celui du second a ses coordonnées barycentriques égales, donc est le centre de gravité I. Ce qui définit bien ces deux points I et I

Je rappelle que la correspondance entre coordonnées barycentriques et principales absolues donne

$$\Sigma \, \sigma_i \, Q_i (\varpi_J) \, \equiv \, P \, \Sigma \, (a^2 \, \mu_B \, \mu_C \, + \, a'^2 \, \mu_D \, \mu_A) \; ; \label{eq:sigma}$$

¹ L'inversion principale conserve la sphère \mathcal{O} .

la forme polaire de cette forme quadratique est construite avec les quantités

$$Q_{\mathbf{1}}(\boldsymbol{\varpi}_{_{\mathbf{J}}},\,\boldsymbol{\varpi}_{_{\mathbf{J}}}') = \frac{1}{2} \left(\boldsymbol{\varpi}_{_{\mathbf{B}}}\boldsymbol{\varpi}_{_{\mathbf{C}}}' + \boldsymbol{\varpi}_{_{\mathbf{C}}}\boldsymbol{\varpi}_{_{\mathbf{B}}}' + \boldsymbol{\varpi}_{_{\mathbf{D}}}\boldsymbol{\varpi}_{_{\mathbf{A}}}' + \boldsymbol{\varpi}_{_{\mathbf{A}}}\boldsymbol{\varpi}_{_{\mathbf{D}}}'\right),\,\,\ldots,\,\,\ldots,$$

et aux coordonnées barycentriques $\nu_{\rm J}=\mu_{\rm J}-\mu_{\rm J}^*$ d'un vecteur $\stackrel{\rightarrow}{\nu}$ correspondent les coordonnées principales (absolues)

$$\lambda_{\mathtt{J}} = rac{2\ \mathrm{RP}}{\mathrm{P}_{\mathtt{J}}} (\varpi_{\mathtt{J}} - \varpi_{\mathtt{J}}^{*}) \ .$$

Ceci étant, le produit scalaire de deux vecteurs et la puissance d'un point pour la sphère $\mathcal O$ sont, en coordonnées principales absolues, traduits par

$$\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{v'} = -\frac{1}{P} \Sigma \sigma_i Q_i (\lambda_{\rm J} , \ \lambda_{\rm J}') \ , \qquad p = -\frac{1}{P} \Sigma \sigma_i Q_i (\varpi_{\rm J}) \ , \ (14)$$

d'où le calcul facile de nombreuses expressions métriques.

Je reviens enfin sur l'introduction des angles de Brocard, U principal, ψ auxiliaire ou normal (ainsi que leurs associés U_i , U_J , ψ_i , ψ_j), conduisant au cercle et à l'ellipsoïde de Brocard, à la sphère de Lemoine, aux sphères équibrocardiennes, etc. (loc. cit.)

$$\Sigma \chi_{J} = \cot g U$$
, $\Sigma \rho_{J} = 12 V \cot g \psi$. (15)

La relation (15)₂ s'écrit encore, par (4),

$$\Sigma P_{J} = 2 P \cot \psi$$
 , (15')

et la comparaison des angles U et ψ , soit

$$\frac{\cot g \ U}{\cot g \ \psi} = \frac{\mathcal{R}_0}{\mathcal{R}} = \frac{2 \ P}{S}$$

revient à $\Sigma P_{_J} = S \, \Sigma \chi_{_J},$ comme cela résulte de (2); je rappelle les inégalités

$$\cot g \psi \ge 2 \cot g U$$
, $\cot g U \cot \psi \ge 4$. (16)

(Pour les angles U_i et ψ_i , on a cotg $U_i/\text{cotg }\psi_i = -\mathcal{R}_i/\mathcal{R}$.)

6. Tétraèdres particuliers. — J'indique brièvement les simplifications apportées dans les formules pour un tétraèdre isodynamique, ou équifacial, ou régulier (isodynamique et équifacial), ou orthocentrique.

E isodynamique. — On sait que les triangles associés \(\theta\) sont

équilatéraux, ou aa' = bb' = cc'. On a donc

$$\begin{cases} J_{i} = \frac{\pi}{3} , & \sigma_{i} = \frac{\sqrt{3}}{2} , & \gamma_{i} = \frac{1}{2} , & \theta_{i} = \sqrt{3} , & \chi_{i} = \frac{\sqrt{3}}{3} , \\ P = \frac{3\sqrt{3}}{8} , & S = 4P = \frac{3\sqrt{3}}{2} , & \cot \psi = 2 \cot \psi , \\ P_{J} = \frac{\sqrt{3}}{2} (\cot \psi - \chi_{J}) , & \Sigma P_{J} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cot \psi . \end{cases}$$
(17)

 \mathcal{E} équifacial. — Les trois égalités $a=a',\ b=b',\ c=c'$ correspondent à A=B=C=D et les symétries de ce tétraèdre entraînent de nombreuses simplifications, basées sur

$$\begin{split} \chi_{\mathtt{J}} &= \sqrt{\frac{\mathrm{P}}{2\mathrm{S}}}\,, \quad \operatorname{cotg} \, \mathrm{U} = \sqrt{\frac{8\,\mathrm{P}}{\mathrm{S}}}\,, \quad \operatorname{cotg} \, \psi = \theta_{\mathtt{J}}\,\,, \\ \operatorname{donc} \quad \psi &= \frac{\pi}{2} - \mathrm{J} \quad \left(\operatorname{aussi} \quad \psi_{i} = \frac{\pi}{2}\right)\,, \\ \gamma_{\mathtt{J}} &= \sqrt{\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{P} + 2\,\mathrm{S}}}\,, \quad \sigma_{\mathtt{J}} = \sqrt{\frac{2\,\mathrm{S}}{\mathrm{P} + 2\,\mathrm{S}}}\,, \quad \operatorname{cos} \, \mathcal{J} = \operatorname{cos} \, \mathcal{J}' = \frac{-\,\mathrm{P} + 2\,\mathrm{S}\,\gamma_{i}}{\mathrm{P} + 2\,\mathrm{S}}\,, \\ \sin \mathcal{J} &= \sin \mathcal{J}' = \sqrt{\frac{\mathrm{S}\,\sigma_{i}}{2}} \cdot \frac{2\,\mathrm{S}}{\mathrm{P} + 2\,\mathrm{S}}\,, \\ \mathrm{P}_{\mathtt{J}} &= \sqrt{\frac{\mathrm{PS}}{2}}\,, \quad \sqrt{\mathrm{P}_{\mathtt{A}}\mathrm{P}_{\mathtt{B}}\mathrm{P}_{\mathtt{C}}\mathrm{P}_{\mathtt{D}}} = \frac{\mathrm{PS}}{2}\,, \\ \mathrm{Q}_{i} &= 2\,\chi_{\mathtt{J}}^{2} = \frac{\mathrm{P}}{\mathrm{S}}\,, \quad \Pi_{i} = 2\,\mathrm{P}_{\mathtt{J}}^{2} = \mathrm{PS}\,\,. \end{split}$$

& régulier. — D'après (17) et (18), en particulier

$$\chi_{J} = \frac{\sqrt{2}}{4} , \quad \cot g U = \sqrt{2} , \quad \cot g \psi = 2\sqrt{2} ,$$

$$\gamma_{J} = \frac{1}{3} , \quad \sigma_{J} = \frac{2\sqrt{2}}{3} , \quad \cos \mathcal{J} = \cos \mathcal{J}' = \frac{1}{3} , \quad \sin \mathcal{J} = \sin \mathcal{J}' = \frac{2\sqrt{2}}{3} , \quad (19)$$

$$P_{J} = \frac{3\sqrt{6}}{8} , \quad Q_{i} = \frac{1}{4} , \quad \Pi_{i} = \frac{27}{16} .$$

& orthocentrique. — Ce tétraèdre est caractérisé par les relations équivalentes

$$a^2+a'^2=b^2+b'^2=c^2+c'^2$$
, $\cos\eta_1=\cos\eta_2=\cos\eta_3=0$, $\coslpha\coslpha'=\coslpha\coslpha'=\coslpha\coslpha'$,

comme cela résulte de (II), (III) et (12). Il s'ensuit encore l'équivalence de ces relations et de

$$\sigma_1 \Pi_1 = \sigma_2 \Pi_2 = \sigma_3 \Pi_3$$
 ou $\gamma_1 (\gamma_1 - Q_1) = \gamma_2 (\gamma_2 - Q_2) = \gamma_3 (\gamma_3 - Q_3)$ (20)

On en tire facilement

$$\begin{pmatrix}
Q_{1} = \gamma_{1} - \gamma_{2} \gamma_{3}, & Q_{2} = \gamma_{2} - \gamma_{3} \gamma_{1}, & Q_{3} = \gamma_{3} - \gamma_{1} \gamma_{2}, \\
\cos \mathcal{J} \cos \mathcal{J}' = \gamma_{A} \gamma_{B} \gamma_{C} \gamma_{D} + \sigma_{A} \sigma_{B} \sigma_{C} \sigma_{D} \gamma_{1} \gamma_{2} \gamma_{3}, \\
\sigma_{i} \Pi_{i} = P \left(4 + \Sigma \chi_{J}^{2} - \Sigma \sigma_{i}^{2}\right) = P \left(\Sigma \frac{1}{\sigma_{J}^{2}} - \Sigma \sigma_{i}^{2}\right),
\end{pmatrix} (21)$$

sans qu'il en résulte des simplifications pour l'ensemble des formules données, moins intéressantes pour les propriétés ici en jeu. Mais cet exemple même suffit à marquer la distinction des divers groupes de propriétés du tétraèdre.